

**Завдання I Турніру студентів-математиків
Вінницького державного педагогічного університету**

1. «Матриці» Нехай A і B – квадратні матриці одного порядку, для яких виконується співвідношення $ABA = BAV$. Доведіть, що одна із матриць вироджена або A і B мають однакові детермінанти.

2. «Лінійна система» Знайдіть усі розв'язки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ в дійсних числах системи рівнянь з параметром a :

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = ax_1, \\ x_1 + x_3 = ax_2, \\ x_2 + x_4 = ax_3, \\ x_3 + x_5 = ax_4, \\ x_4 + x_1 = ax_5. \end{cases}$$

3. «Площа об'єднання» Нехай $0 < a < b$. Знайдіть площу об'єднання внутрішніх частин еліпсів $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

4. «Тупі кути між векторами» Чи можна, у тривимірному просторі, знайти 5 векторів, кут між будь-якими двома із них більший 90° ?

5. «Обчислення інтегралів» Обчисліть

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

6. «Циклічна нерівність» Доведіть, що при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ виконується нерівність

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

7. «Три дільники» Знайдіть три різні непарні дільники числа

$$125^3(106^2 - 102^2) + 106^3(102^2 - 125^2) + 102^3(125^2 - 106^2).$$

8. «Раціональні чи ірраціональні» Нехай x , y , z – дійсні числа. Відомо, що $\{xy\} = \{yz\} = \{zx\} = \frac{1}{2}$. Доведіть, що числа x , y , z – ірраціональні.

9. «Найменше значення» На стороні AB вписаного чотирикутника $ABCD$ знайшлася така точка X , що відрізок CX ділиться навпіл діагоналлю BD , а відрізок DX ділиться навпіл діагоналлю AC . Якого найменшого значення досягає відношення $\frac{AB}{CD}$?

10. «Квадратний тричлен» Квадратний тричлен $P(x)$, що має два дійсних корені, для усіх дійсних x задовольняє нерівність

$$P(x^3 + x) \geq P(x^2 + 1).$$

Знайдіть суму коренів тричлена $P(x)$.