

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

МІЛЯН РОКСОЛАНА СТЕПАНІВНА

УДК 373.011.3-052:005.336.2

ДИСЕРТАЦІЯ

**ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ СКЛАДОВОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ
КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ**

014 – Середня освіта (Математика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Р.С. Мілян

Науковий керівник Матяш Ольга Іванівна, доктор педагогічних наук,
професор університету

Вінниця - 2021

АНОТАЦІЯ

Мілян Р. С. Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи. – Кваліфікаційна робота на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 014 – Середня освіта (Математика). – Вінницький державний педагогічний університет Михайла Коцюбинського, Міністерство освіти і науки України, Вінниця, 2021.

У дисертації подано теоретичний аналіз і нове практичне вирішення проблеми формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Формування логічної компетентності – складний психолого-педагогічний процес, який вимагає від учителя ґрунтовних комплексних знань з математики, психології, дидактики та методики навчання математики. Переосмислення акцентів у навчанні математики, формування системи методів, прийомів і засобів, що є основою розуміння учнями змісту, методу і важливості логічної компетентності – одне із ключових завдань вдосконалення методичної діяльності сучасного вчителя математики. Логічний складник математичної компетентності є засобом підвищення якості освіти, сприяє встановленню міжпредметних зв'язків різного рівня. Сформованість логічної компетентності створює умови розвитку в учнів готовності та вмінь логічно мислити та ефективно застосовувати отримані знання в реальному житті.

Сьогодні розвинене логічне мислення розглядається не тільки як найважливіша умова навчальної успішності школяра, але і як основа формування його вмотивованої діяльності, уміння вирішувати проблеми, що виникають в реальному житті, і здатності оцінювати свою діяльність. Велика роль логічного мислення у формуванні ціннісних орієнтацій особистості, що

забезпечують її стійкість, наступність певного типу поведінки і діяльності, що регулюють мотивацію особистості і є найважливішим елементом її структури.

Аналіз методичної літератури, дисертаційних досліджень показує, що методичні аспекти реалізації компетентнісного підходу в математичній підготовці учнів основної школи вивчені недостатньо, в тому числі відсутні науково обґрунтовані методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання їх математики. Крім того, аналіз психолого-педагогічних досліджень демонструє протиріччя:

- між сучасними вимогами до якості сформованості логічного мислення, логічної грамотності, умінь використовувати їх не тільки в навчальній діяльності, але і в реальному житті і реальною освітньою практикою математичної підготовки учнів загальноосвітньої школи;
- між достатньою вивченістю питань формування логічної компетентності на загальному психолого-педагогічному рівні і слабким вивченням логічної складової частини математичної компетентності на методичному рівні;
- між об'єктивною потребою в якісному навчально-методичному забезпеченні процесу формування логічного складника математичної компетентності учнів та недостатністю відповідного забезпечення, науково-обґрунтованих методичних рекомендацій щодо прийомів та засобів підвищення рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Розв'язання вказаних суперечностей ми шукали в контексті реалізації Концепції нової української школи та упровадження компетентнісного підходу в навчанні. Увагу акцентовано на методиці формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи в нових умовах, у новому контексті, з новими завданнями та новими засобами їх вирішення.

Об'єкт дослідження - процес формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Предмет дослідження – методика формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи.

Мета дисертаційного дослідження полягає в розробці та обґрунтуванні методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи та експериментальній перевірці ключових факторів її ефективності.

У відповідності до поставленої мети та завдань дисертаційного дослідження отримані наступні **основні результати**:

- *виділено* цілі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- *з'ясовано* психолого-педагогічні передумови формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- *виокремлено* основні напрямки вдосконалення методичної діяльності вчителя математики для формування логічного складника математичної компетентності учнів;
- *розроблено* критерії сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи та виявлено організаційно-педагогічні умови ефективності його формування;
- *апробовано* методичний інструментарій формування логічного складника математичної компетентності учнів в основній школі;
- *запропоновано* поетапну методику формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Під логічним складником математичної компетентності учнів розуміємо ту динамічну комбінацію їхніх здатностей, що поєднує розуміння логіки подій, логічні вміння та досвід їх використання, які необхідні для здійснення математичної та/або особистісно значущої продуктивної діяльності.

Структуру логічного складника математичної компетентності, на нашу думку, утворює єдність мотиваційно-ціннісної, когнітивної, діяльнісної та рефлексивно-оцінної компонент, в яких відображена специфіка навчання математики у школі:

- *мотиваційно-ціннісна компонента* - розуміння учнями необхідності формування логічної складової математичної компетентності, її значення в подальшій навчальній та у майбутній професійній діяльності;
- *когнітивна компонента* - фундаментальні теоретичні математичні знання, знання алгоритмів і методів розв'язання математичних задач;
- *діяльнісна компонента* - здібності до застосування не тільки вже відомих умінь, навичок і відповідних знань (в репродуктивній діяльності), а й засвоєння нових (у творчій діяльності) під час розв'язування логічних і прикладних задач; вміння раціоналізувати свою діяльність у виборі способів і засобів розв'язування завдань з логічним аспектом;
- *рефлексивно-оцінна компонента* - вміння аналізувати, осмислювати, усвідомлювати процеси і результати власної та колективної діяльності при розв'язуванні логічних і прикладних задач, вміння критично оцінювати і коригувати діяльність при необхідності (розуміння важливості відповідальності за результати діяльності).

Основним засобом формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у дисертації вказується спеціальна система задач сконструйована вчителем математики. Нами виокремлено основні типи задач, організаційно-педагогічні умови та етапи (діагностико-прогностичний, мотиваційно-пізнавальний, активно-діяльнісний, пошуково-творчий) формування логічного складника математичної компетентності учнів.

Важливим складником технології формування логічного складника математичної компетентності учнів стали розроблені й експериментально

апробовані нами навчально-методичний посібник для учнів «Вчимося мислити логічно» та методичні рекомендації для вчителя «Навчаємо мислити логічно». У посібнику запропоновано систему задач формування логічного складника математичної компетентності, пояснено методичні аспекти розв'язування задач. У методичних рекомендаціях для вчителя подано та обґрунтовано теоретичні аспекти формування логічного складника математичної компетентності, дано методичні рекомендації щодо організації самостійної пізнавальної діяльності учнів з метою формування в них логічної компетентності, діагностичного інструментарію сформованості логічного складника математичної компетентності.

Практичне значення отриманих результатів полягає в створенні навчально-методичного забезпечення поетапного формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи; розробці методичних рекомендацій для вчителів математики щодо ефективних методів, прийомів та засобів формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Методичні рекомендації, обґрунтовані в процесі дослідження, можуть бути використані вчителями математики для підвищення якості навчального процесу, викладачами під час підготовки майбутніх учителів математики у ВНЗ та науковцями, які досліджують проблеми шкільної математичної освіти та проблеми формування математичних компетентностей учнів.

Результати дослідження впроваджено в освітній процес у наступних навчальних закладах: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка; Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» та загальноосвітні школи: Чернівецька загальноосвітня школа I-II ступенів № 19, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 37, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 38, Тернопільська

загальноосвітня школа I-III ступенів № 16 імені Володимира Левицького, Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 3.

Ключові слова: математична компетентність, логічне мислення, формування логічного складника математичної компетентності, основна школа, логічні задачі, система задач, методика розв'язування задач.

SUMMARY

R. Milian. Pupils` logical component of mathematical competence formation in base secondary school. – Research paper as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 014 – Secondary education (Mathematics). – Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Vinnytsia, 2021.

The thesis describes a theoretical analysis and a new practical solution to the problem of pupils` logical component of mathematical competence formation in base secondary school.

The formation of logical competence is a complex psychological and pedagogical process that requires from the teacher a thorough comprehensive knowledge of mathematics, psychology, didactics and methods of teaching mathematics. Redefining the stresses in teaching mathematics, forming a system of methods, techniques and tools that are the basis for pupils to understand the content, method and importance of logical competence - one of the critical tasks of improving the methodological activities of modern mathematics teachers. The logical component of mathematical competence is a means of improving the quality of education, and helps to establish interdisciplinary links at different levels. Furthermore, the formation of logical competence creates conditions for developing pupils' readiness and ability to think logically and effectively apply the acquired knowledge in real life.

Nowadays, developed logical thinking is considered an essential condition for pupils' achievement and as a basis for forming their motivated activities, solving problems that arise in real life, and evaluating their activities. The significant role of logical thinking in developing value orientations of the individual, ensuring its stability, the continuity of a particular type of behaviour and activities that regulate the individual's motivation is the most important element of its structure.

Analysis of methodological literature, dissertation research shows that the methodological aspects of the competence approach in mathematical training of base secondary school pupils are insufficiently studied. There are no scientifically substantiated methods of forming the logical component of mathematical competence of base secondary school pupils in the process of teaching their mathematics. In addition, the analysis of psychological and pedagogical research shows the contradictions:

- between modern requirements for the quality of the formation of logical thinking, logical literacy, the ability to use them not only in educational activities but also in real life and actual educational practice of mathematical training of base secondary school pupils;
- between sufficient study of the formation of logical competence at the general psychological and pedagogical level and the weak research of the logical component of mathematical competence at the methodological level;
- between the objective need for quality teaching and methodological support of forming the logical component of mathematical competence of pupils and the lack of appropriate support, scientifically substantiated guidelines for techniques and means to improve the logical component of mathematical competence of base secondary school pupils.

We sought to resolve these contradictions in the context of implementing the Concept of the new Ukrainian school and introducing a competency-based approach to learning. Emphasis is placed on the method of forming the logical

component of mathematical competence of base secondary school pupils in new conditions, in a new context, with new tasks and new means of solving them.

The object of study is forming a logical component of the mathematical competence of base secondary school pupils.

The subject of research is a method of forming a logical component of the subject mathematical competence of base secondary school pupils.

The purpose of the dissertation research is to develop and substantiate a method of forming the logical component of the subject mathematical competence of base secondary school pupils and to test the key factors of its effectiveness experimentally.

Following the goal and objectives of the dissertation research, the following **main results** were obtained:

- the goals of the mathematical competence logical component formation of base secondary school pupils are specified;
- the psychological and pedagogical prerequisites for the mathematical competence logical component formation of base secondary school pupils are clarified;
- the main directions of improvement of the mathematics teacher's methodical activity for the mathematical competence logical component formation of pupils are allocated;
- the criteria for the mathematical competence logical component formation of base secondary school pupils is developed, and the identification of organizational and pedagogical conditions for the effectiveness of its formation is revealed;
- the methodical tools of the mathematical competence logical component formation of base secondary school pupils are tested;
- a step-by-step method of forming a logical component of mathematical competence of base secondary school pupils is proposed.

Under the logical component of mathematical competence, we will understand the set requirements for pupils' educational training, including logical

skills and experience of using them. These skills are necessary for the personal and socially significant productive activities implementation.

The structure of the logical component of mathematical competence, in our opinion, is formed by the unity of motivational, cognitive, activity-oriented and reflexive-evaluative components, which reflect the specifics of teaching mathematics at school:

- motivational component - pupils' understanding of the need to form a logical component of mathematical competence, its importance in further educational and future professional activities;
- cognitive component - fundamental theoretical mathematical knowledge, knowledge of algorithms and methods for solving mathematical problems;
- activity-oriented component - the ability to apply not only already earned skills, abilities and relevant knowledge (in reproductive activities), but also the acquisition of new ones (in creative activities) in solving logical and applied problems; ability to rationalize their actions in choosing ways and means of solving problems with a logical aspect;
- reflexive-evaluative component - the ability to analyze, comprehend, understand the processes and results of their own and collective activities in solving logical and applied problems, the ability to critically evaluate and adjust activities if necessary (understanding the importance of responsibility for performance).

The primary means of forming the logical component of mathematical competence of base secondary school pupils in the dissertation is a special system of problems designed by a mathematics teacher. We have identified the main types of problems, organizational and pedagogical conditions and stages (diagnostic-prognostic, motivational-cognitive, activity-oriented, search-creative) of formation of the logical component of mathematical competence of pupils.

An important component of the technology of forming the pupils' mathematical competence logical component were the textbook for pupils "Vchymosia myslyty lohichno" ("Learning to think logically") and guidelines for

teachers "Navchaiemo myslyty lohichno" ("Learning to think logically") which were developed and experimentally tested by us. The textbook offers a system of problems for forming the logical component of mathematical competence and explains the methodological aspects of solving problems. The methodical guidelines for the teacher present and substantiate the theoretical aspects of forming the logical component of mathematical competence, methodical recommendations for the organization of pupils' independent cognitive activity to develop their logical competence, and diagnostic tools for the formation of the logical component of mathematical competence.

The practical value of the obtained results is in the creation of educational and methodological support for the gradual formation of the mathematical competence logical component of base secondary school pupils; development of methodical recommendations for mathematics teachers on practical methods, techniques and means of forming a logical component of mathematical competence of base secondary school pupils. Furthermore, mathematics teachers can use the methodological recommendations substantiated in the research process to improve the quality of the educational process, teachers in the training of future mathematics teachers in universities and scientists who study the problems of school mathematics education and the formation of mathematical competencies.

The results of the research are introduced into the educational process in the following educational institutions: Vinnytsia Mykhailo Kotsyubynsky State Pedagogical University; Ternopil Volodymyr Hnatyuk National Pedagogical University; Regional Boarding School of the Municipal Institution of Higher Education "Vinnytsia Humanitarian and Pedagogical College" and secondary schools - Chernivtsi Secondary School № 19, Chernivtsi Secondary School № 37, Chernivtsi Secondary School №38, Ternopil Volodymyr Levitsky Secondary School № 16, Ternopil Secondary School № 3.

Keywords: mathematical competence, logical thinking, formation of logical component of mathematical competence, base secondary school, logical problems, system of problems, methods of solving problems.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України

1. Бачинська Р. С. Аналіз вітчизняної теорії та практики формування математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2017. Випуск 49. С. 12 – 15.
2. Бачинська Р. С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2018. Випуск 51. С. 29–33.
3. Мілян Р. С. Порівняльний аналіз дефініцій «критичне мислення» та «логічне мислення». *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. 2019. Випуск 54. С. 121 – 125.

Статті в зарубіжних наукових періодичних виданнях

4. Bachynska R. Criteria and indicators of pupils' logical competence formation. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale: Materialele Conferintei Stiintifice Internationale*, Chisinau, Moldova, 9-10 Noiembrie 2017. P. 250 – 252.
5. Мілян Р. С. Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (95), Issue: 239, 2020 Nov. P. 33 – 37.

6. Milian R. Pupils` mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX (99), Issue: 252, 2021 May. P. 21 – 25.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

7. Бачинська Р. С. Математична компетентність учнів: ключова чи предметна?. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017), м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р, С. 48 – 49.
8. Бачинська Р. С. Сучасні проблеми впровадження компетентнісного підходу у навчанні учнів математики. Матеріали V Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень», м. Вінниця, 21-22 листопада 2017 р. С. 238– 240.
9. Бачинська Р. С. Логічна складова математичної компетентності учнів базової школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 30 травня – 1 червня 2018 р. С. 194–196.
10. Бачинська Р. С. Проблемне навчання як технологія формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Чернівці, 11 -12 жовтня 2018 р. С. 38 – 41.
11. Бачинська Р. С. Типологія завдань для розвитку логічної компетентності учнів на уроках математики. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр.

дистанц. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 18 жовтня 2018 р. С. 137–140.

12. Мілян Р. С. Geogebra як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2019. С. 138 – 140.
13. Мілян Р. С. Добірка задач для формування логічної компетентності учнів на уроках геометрії. *Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами III Всеукр. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 25 квітня 2019 р.* С. 142 – 150.
14. Мілян Р. С. Формування логічного складника математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Тернопіль, 12–13 листопада, 2020). С. 136 – 139.
15. Матяш О.І. Мілян Р. С. Вчимося мислити логічно. Навчально-методичний посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 2020. 106 с.
16. Матяш О.І. Мілян Р. С. Навчаємо мислити логічно. Методичні рекомендації для вчителів. Тернопіль: Вектор, 2020. 104 с.
17. Мілян Р. С. Мова вчителя як засіб формування логічного мислення учнів. Матеріали IX Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси, 9-10 квітня 2021 р. С. 75-76.
18. Мілян Р. С. Віртуальні дошки як інструмент формування математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Тези доповідей Дистанційної Всеукраїнської наукової конференції з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження*

професора З. І. Слєпкань», 15–16 квітня 2021 р., Київ, Україна [електронне видання]. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. С. 111 – 113.

19. Мілян Р. С. Логічний складник геометричної компетентності учнів основної школи. *Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика: тези доповідей II міжнародної конференції (23–25 березня, м. Харків, Україна). Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. С.130-131.*

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

20. Бачинська Р. С. Місце і роль історичних задач на уроках математики в школі. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики : зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 26-27 листопада 2015 р., м. Вінниця, 2015. С. 227–229.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	27
1.1. Логічна компетентність як складник математичної компетентності випускників школи	27
1.2. Загальна характеристика технологій формування логічної компетентності учнів основної школи.....	36
1.2.1. Психолого-педагогічні аспекти технологій формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи	36
1.2.2. Технології організації навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи.....	40
1.3. Критерії та показники сформованості логічного складника математичної компетентності учнів.....	48
1.4. Аналіз сучасних досліджень та практики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи	54
1.4.1. Результати досліджень українських науковців щодо формування логічної компетентності учнів.....	54
1.4.1.1. Огляд результатів дисертаційних досліджень	54
1.4.1.2. Огляд публікацій у фахових збірниках наукових праць ...	63
1.4.2. Аналіз стану формування логічної компетентності учнів основної школи в Україні	69
1.4.3. Результати досліджень закордонних науковців щодо формування логічної компетентності учнів.....	77
1.4.4. Порівняльний аналіз українських та закордонних шкільних підручників математики щодо умов розвитку логічного мислення учнів.....	89
Висновки до розділу 1	100
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 1.....	102
РОЗДІЛ 2. ПОЕТАПНА МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО СКЛАДНИКА ПРЕДМЕТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ	131

2.1. Загальна характеристика авторської методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи	131
2.2. Модель формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи	141
2.3. Діагностико-прогностичний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи	150
2.4. Мотиваційно-пізнавальний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи	161
2.5. Активно-діяльнісний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи	173
2.6. Пошуково-творчий етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи	185
Висновки до розділу 2	202
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 2.....	204
РОЗДІЛ 3. ОРГАНІЗАЦІЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	214
3.1. Організація й перебіг дослідно-експериментальної роботи.....	214
3.2. Обробка й аналіз результатів педагогічного експерименту	221
3.3. Статистичний аналіз ефективності авторської методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи.....	234
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 3.....	240
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	245
ДОДАТКИ.....	253

ВСТУП

Актуальність дослідження. Традиційна спрямованість загальної освіти на засвоєння системи знань не відповідає сучасному соціальному замовленню, що вимагає виховання самостійних, ініціативних і відповідальних членів суспільства, здатних взаємодіяти у вирішенні соціальних, виробничих і економічних задач. Знання та вміння як результати освіти необхідні, але недостатні, щоб бути успішним в інформаційному суспільстві. Сьогодні стає об'єктивною необхідністю посилення самостійної діяльності школярів, розвиток їх особистісних якостей і творчих здібностей, умінь самостійно здобувати нові знання в умовах швидко змінюваного світу, здатності застосовувати засвоєні знання на практиці для вирішення реальних життєвих проблем. Школа повинна не тільки відроджувати інтелектуальний потенціал країни, а й забезпечувати умови формування вільної, критично мислячої особистості, яка усвідомлює і розвиває свої здібності, здатної знайти своє місце в житті і реалізувати себе.

Такі цільові установки на підготовку учнів загальноосвітньої школи задані в Концептуальних засадах реформування середньої школи і визначені на основі прийнятого в ній компетентнісного підходу до якості підготовки учнів як до результату освіти.

Компетентнісний підхід актуалізує загальні і спеціальні вміння, безпосередньо затребувані в житті і в подальшій освіті випускників школи, задає напрям оновлення цілей і змісту загальної освіти, посилення його виховної, прикладної та практичної спрямованості. Компетентнісний підхід орієнтує на формування в учнів не тільки знань і умінь, а й досвіду діяльності, а також ціннісних орієнтацій. Визначення та склад компетентностей випускників школи описані в роботах науковців: І. А. Акуленко, М. І. Бурди, М. С. Головань, Т. Л. Годованюк, Л. С. Голодюк, І. В. Кузнецової, А. І. Кузьмінського, І. В. Ловянової, О. І. Матяш, О. В. Овчарука, О. І. Пометун, С. А. Ракова, О. Я. Савченко,

С. О. Скворцової, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця. Вони виділяють ключові, загальногалузеві та предметні компетентності, зокрема, математичну компетентність учнів.

Науковці розглядають математичну компетентність як вміння бачити та застосовувати математику у реальному житті, вміти будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати. Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей Нової української школи. Згідно з концепцією Нової української школи учні повинні набути вміння застосовувати математичні методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності, здатність до розуміння і використання простих математичних моделей та вміння будувати такі моделі для вирішення проблем.

Математична компетентність поєднує галузеві та предметні компетентності, серед її складових виділяють процедурну, логічну, технологічну, дослідницьку та методологічну компетентності.

Оволодіння учнями усіма складниками предметної математичної компетентності складає основу формування математичної компетентності. Вміння логічно мислити, аналізувати та обґрунтовувати математичні теорії є надзвичайно важливим.

Під логічним складником математичної компетентності учнів розуміємо ту динамічну комбінацію їхніх здатностей, що поєднує розуміння логіки подій, логічні вміння та досвід їх використання, які необхідні для здійснення математичної та/або особистісно значущої продуктивної діяльності.

Нині розвинене логічне мислення розглядається не тільки як найважливіша умова навчальної успішності школяра, але і як основа формування його вмотивованої діяльності, вміння вирішувати проблеми, що виникають в реальному житті, і здатності оцінювати свою діяльність. Значна роль логічної компетентності у формуванні ціннісних орієнтацій особистості,

що забезпечують її стійкість, наступність певного типу поведінки і діяльності.

Для розвитку логічного мислення засобами математики необхідне знання певних понять і законів логіки, тобто логічна грамотність. У радянській школі в сімдесяті роки ХХ ст. були зроблені спроби включення елементів логіки в зміст навчання математики. Але незабаром від цієї ідеї відмовилися через відсутність необхідної мотивації логічних знань і нерозуміння учнями та вчителями їх практичної значущості. Нині можна стверджувати, що елементи логіки певним чином наявні у змісті курсу математики загальноосвітньої школи. Проте аналіз сучасних навчально-методичних посібників з математики для школи показав, що лише окремі з них акцентують увагу на аспектах логіки і розглядають методичні питання формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики.

Таким чином, констатуємо, що нині відсутній необхідний методичний супровід для формування логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики.

Психолого-педагогічна наука наголошує на важливості того, який тип логічного мислення буде сформований в учнів: теоретичний або емпіричний. Науковці визначають період основної школи як найбільш сприятливий для розвитку логічного (теоретичного) мислення. Вважають, що потенційні розумові здібності школярів даного віку ширші і багатші тих, які використовуються і розвиваються традиційним навчанням. Традиційне навчання, орієнтоване тільки на поповнення багажу знань з переважанням репродуктивних методів, не здатне формувати необхідний рівень логічного мислення, необхідний для подальшого професійного навчання та життя в сучасному світі.

Аналіз методичної літератури, дисертаційних досліджень останнього десятиліття показує, що методичні аспекти реалізації компетентнісного підходу в математичній підготовці учнів основної школи вивчені недостатньо, в тому числі відсутні науково обґрунтовані методики

формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання їх математики. Крім того, аналіз психолого-педагогічних досліджень та практики навчання математики в основній школі демонструє протиріччя:

- між сучасними вимогами до якості сформованості логічного мислення, логічної грамотності, умінь використовувати їх не тільки в навчальній діяльності, але і в реальному житті і реальною освітньою практикою математичної підготовки учнів загальноосвітньої школи;
- між достатньою вивченістю питань формування логічної компетентності на загальному психолого-педагогічному рівні і слабким вивченням логічної складової частини математичної компетентності на методичному рівні;
- між об'єктивною потребою в якісному навчально-методичному забезпеченні процесу формування логічного складника математичної компетентності учнів та недостатністю відповідного забезпечення, науково-обґрунтованих методичних рекомендацій щодо прийомів та засобів підвищення рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Виділені протиріччя визначили проблему дослідження, яка полягає в розробці ефективної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Актуальність, недостатній рівень досліджень та практичної розробленості проблеми послужили підставою вибору теми дисертаційного дослідження: «Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи».

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Наукова робота є складовою частиною комплексної наукової теми кафедри алгебри і методики навчання математики «Формування та розвиток методико-математичних компетентностей майбутніх учителів» (номер державної реєстрації: №0113U003003). Тему затверджено на засіданні Вченої

ради Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №4 від 25. 10. 2017 р.) та узгоджено у бюро Міжвідомчої ради з координації наукових досліджень у галузі освіти, педагогіки і психології (протокол №5 від 27. 11. 2018 р.).

Об'єкт дослідження - процес формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Предмет дослідження – методика формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи.

Мета дисертаційного дослідження полягає в розробці та обґрунтуванні методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи та експериментальній перевірці ключових факторів її ефективності.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані **завдання дослідження**:

1. Виявити теоретичні та практичні передумови формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи.

2. З'ясувати структуру логічної складової частини предметної математичної компетентності та побудувати модель її формування в основній школі.

3. Розробити критерії сформованості логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи та визначити організаційно-педагогічні умови її ефективного формування.

4. Розробити методику формування логічної складової частини предметної математичної компетентності учнів основної школи і перевірити її ефективність в дослідно-експериментальній роботі.

Для реалізації мети та виконання поставлених завдань використовувалися такі **методи дослідження**:

- *теоретичні*: аналіз педагогічної, психологічної та методичної літератури з проблеми дослідження, навчальних стандартів, шкільних програм, навчальних посібників стосовно процесу навчання математики основної

школи; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання методів, прийомів та засобів формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;

- *емпіричні*: педагогічне спостереження за процесом навчання учнів математики; вивчення та узагальнення педагогічного досвіду вчителів з метою виявлення ефективних методичних підходів до здійснення процесів контролю та корекції навчальних досягнень учнів; анкетування, бесіди з вчителями, учнями й батьками; констатувальний, пошуковий та формувальний експерименти;
- *статистичні*: обробка результатів педагогічного експерименту методами математичної статистики – для визначення стану проблеми, апробації розробленої методичної системи, удосконалення її окремих елементів.

Загальна методологія дослідження базується на положеннях теорії пізнання, теорії особистості і її розвитку, теорії діяльності як чинника розвитку особистості; теорії навчання й освіти взагалі та методики навчання математики зокрема; використанні основних методологічних, загальнонаукових і спеціальних наукових підходів; дотриманні основних методологічних і методичних вимог до проведення експериментальних педагогічних досліджень; засадах Національної стратегії розвитку освіти України в XXI столітті, Законах України «Про освіту», «Про загальну середню освіту», «Про вищу освіту», Державній національній програмі «Освіта» («Україна XXI століття»), «Основних напрямках досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні», Державному стандарті повної загальної середньої освіти, Концепції розвитку педагогічної освіти, проектах Стандартів вищої освіти, інших нормативних документах з урахуванням вітчизняного та зарубіжного досвіду навчання учнів математики.

Наукова новизна дослідження полягає в:

- конкретизації цілей формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи, відборі прийомів та засобів навчання математики, які в сукупності презентують поетапну

- методику формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- з'ясуванні психолого-педагогічних передумов формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
 - розробці критеріїв сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи та виявленні організаційно-педагогічних умов ефективності його формування;
 - удосконаленні методичного інструментарію формування логічного складника математичної компетентності учнів в основній школі;
 - розробці поетапної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
 - виокремленні основних напрямків вдосконалення методичної діяльності вчителя математики для формування логічного складника математичної компетентності учнів;
 - подальшому розвитку методичних ідей щодо формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи; ідей щодо підготовки майбутніх учителів математики до формування в учнів логічної компетентності.

Практична значущість дослідження полягає в створенні навчально-методичного забезпечення поетапного формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи; розробці методичних рекомендацій для вчителів математики щодо ефективних методів, прийомів та засобів формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Методичні рекомендації, які обґрунтовані в процесі дослідження, можуть бути використані вчителями математики для підвищення якості навчального процесу, викладачами під час підготовки майбутніх учителів математики у ЗВО та науковцями, які досліджують проблеми шкільної математичної освіти та проблеми формування математичних компетентностей учнів.

Результати дослідження впроваджено в освітній процес у наступних навчальних закладах: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка; Обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» та загальноосвітні школи: Чернівецька загальноосвітня школа I-II ступенів № 19, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 37, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 38, Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 16 імені Володимира Левицького, Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 3.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження обговорювалися на засіданнях та науково-методичних семінарах кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського та висвітлювалися на науково-практичних і науково-методичних конференціях різного рівня, зокрема:

міжнародних: Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017), м. Черкаси (26-28 жовтня 2017); Conferinta Stiintifice Internationale «Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale», Chisinau, Moldova (9-10 Noiembrie 2017); Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики», м. Вінниця (30 травня – 1 червня 2018 р.); III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», м. Тернопіль, (5 квітня 2019 р.); VI Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», м. Тернопіль (12–13 листопада 2020 р.); Scientific and Professional Conference «Pedagogy and Psychology in the age of globalization – 2020», Budapest, Hungary (8 November 2020); International Conference «Problems of Teaching Mathematics in Educational Institutions:

Theory, Methods, Practice». м. Харків (23-25 березня 2021 р.); IX Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси (9-10 квітня 2021 р.).

всеукраїнських: V Всеукраїнська конференція молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень», м. Вінниця (21-22 листопада 2017 р.); Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю «Сучасна освіта в контексті нової української школи», м. Чернівці, (11 -12 жовтня 2018 р.); II Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики», м. Вінниця (18 жовтня 2018 р.); III Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики», м. Вінниця (25 квітня 2019 р.); Крайовий форум «Освіта – енергія майбутнього. Дистанційна освіта – сучасний формат» (секція «Сучасні формули успіху онлайн освіти. Математика та методика її навчання», м.Тернопіль (18 жовтня 2020р.); Дистанційна Всеукраїнська наукова конференція з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань», м. Київ (15–16 квітня 2021 р.).

Публікації. Теоретичні положення та основні результати дисертації представлені автором у **20** наукових працях, із них: 3 статті у фахових виданнях України (дві з них індексуються в наукометричній базі Index Scopus), 2 статті у періодичних наукових виданнях інших держав, що входять до Організації економічного співробітництва та розвитку та/або Європейського Союзу, 1 міжнародна публікація, 12 тез у збірниках матеріалів наукових конференцій різних рівнів, 1 навчально-методичний посібник для учнів, 1 методичні рекомендації для вчителів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, списку використаних джерел до кожного розділу, загальних висновків та додатків. Повний обсяг роботи становить 329 сторінок, з них 170 сторінок основного тексту, 78 сторінок додатків. Робота містить 10 таблиць та 29 рисунків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Логічна компетентність як складник математичної компетентності випускників школи

Школа нині має не тільки відроджувати інтелектуальний потенціал країни, а й забезпечувати умови формування вільної, критично мислячої особистості, яка усвідомлює і розвиває свої здібності та здатна знайти своє місце в житті і реалізувати себе. Такі цільові установки на підготовку учнів загальноосвітньої школи задані в Концептуальних засадах реформування середньої школи [63] і визначені на основі прийнятого в ній компетентнісного підходу до якості підготовки учнів як до результату освіти.

Якщо розглядати цілі й зміст загальної освіти, то компетентнісний підхід не є зовсім новим, про що свідчать надбання науковців В. В. Ачкана [7], С. П. Бондар [19], І. Д. Беха [17], Н. М. Бібік [17], М. С. Голованя [25], І. О. Зимньої [54, 55], О. І. Матяш [74, 75], О. В. Овчарук [90], О. І. Пометун [95, 96], С. А. Ракова [98, 99], О. Я. Савченко [80], С. О. Скворцової [83], Н. А. Тарасенкової [115], В. О. Швеця [140], та інших.

У працях вказаних українських науковців увага акцентується на тому, що компетентнісний підхід є одним із тих чинників, які сприяють модернізації змісту освіти, він доповнює ті освітні інновації й класичні підходи, які допомагають гармонійно поєднувати позитивний досвід для реалізації сучасної освітньої мети. Компетентнісний підхід у навчанні актуалізує загальні та спеціальні уміння, безпосередньо затребувані в житті і в подальшій освіті випускників школи, задає напрям оновлення цілей і змісту загальної освіти, посилення його виховної, прикладної та практичної спрямованості.

У словнику іншомовних слів [109] «компетентний» трактується (від лат. *competens* (*competentis*) відповідний, здібний) як: 1) такий, що володіє компетенцією; 2) такий, що знає, обізнаний у деякій області.

У Великому тлумачному словнику сучасної української мови [24] наводяться такі тлумачення понять: «компетентний – який має достатні знання в якій-небудь галузі; який з чим-небудь добре обізнаний; тямущий; компетентність – властивість за значенням компетентний».

У Законі про освіту [53] компетентність - це динамічна комбінація знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність. Саме в такому змістовому наповненні ми будемо у власному дослідженні використовувати поняття «компетентність».

Загальна структура системи компетентностей людини містить [98, с. 26]: ключові компетентності (міжпредметні, базові або надпредметні компетентності); загальногалузеві (формуються впродовж засвоєння змісту тієї чи іншої освітньої галузі протягом всього терміну навчання); предметні (формуються під час вивчення конкретної навчальної дисципліни протягом визначеного часу).

У «Енциклопедії освіти» [69] визначаються: ключові (надпредметні базові) компетентності як такі, що опираються на пізнавальні процеси і виявляються у різних контекстах; загальнопредметні – належать до певної сукупності предметів або освітніх галузей та відрізняються високим ступенем узагальненості і комплексності; предметні – часткові щодо названих вище, яких набувають у процесі вивчення певних предметів. Визначення та склад компетентностей, які мають бути сформовані в учнів або студентів, описані в роботах українських науковців: І. А. Акуленко, М. С. Головань, І. В. Кузнецової, А. І. Кузьмінського, О. І. Матяш, О. В. Овчарука, О. І. Пометун, С. А. Ракова, О. Я. Савченко, С. О. Скворцової, Н. А. Тарасенкової, А. В. Хуторського. Вони виділяють, зокрема, ключові, загальногалузеві та предметні компетентності.

Отже, одним із результатів шкільної освіти має бути набуття учнем певної комбінації компетентностей, які є необхідними для ефективної

діяльності в різних сферах суспільного життя. Причому, згідно із Законом про освіту, ця комбінація має бути динамічною.

Відповідно до Концепції нової української школи [63], до десяти ключових компетентностей, які мають бути сформовані у випускників школи, належить математична компетентність. Розвиток математичної освіти є стратегічним питанням державного значення і потребує підвищення рівня математичної освіти в Україні. Як зазначено у Концепції нової української школи [63], математична компетентність передбачає культуру логічного й алгоритмічного мислення, учні повинні набути вміння застосовувати математичні методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах, здатність до побудови, розуміння і використання простих математичних моделей.

Отже, акцентуємо увагу, що в Концепції нової української школи зазначено, що математична компетентність передбачає культуру логічного мислення.

За визначенням PISA, математична компетентність учнів є поєднанням математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини, які забезпечують успішне розв'язання проблем, що потребують застосування математики. При цьому мають на увазі не конкретні математичні вміння, а більш загальні уміння, що включають математичне мислення, математичну аргументацію, постановку та розв'язання математичної проблеми, математичне моделювання.

Проблема формування математичної компетентності учнів досліджувалася багатьма українськими вченими, зокрема, В. В. Ачканом, М. С. Голованем, Л. І. Зайцевою, В. К. Кірманом, О. І. Матяш, С. А. Раковим, С. О. Скворцовою, В. А. Старченко, І. Я. Сафоновою, Н. А. Тарасенковою, О. С. Чашечниковою та іншими.

С. А. Раков вважає, що математична компетентність визначається рівнями навчальних досягнень, для яких суттєвим є набуття математичних умінь: умінь математичного мислення, моделювання, аргументування;

вміння постановки та розв'язування математичних задач, презентації даних; уміння оперувати математичними конструкціями; вміння вести математичне спілкування; вміння використовувати математичні інструменти [98].

М. С. Головань у структурі математичної компетентності виділяє наступні компоненти: мотиваційний (система мотивів, цілей, потреб та прагнень до вивчення математичних дисциплін, удосконалення знань, умінь та досвіду математичної діяльності); когнітивний (сукупність математичних знань, що відображають зміст математики); діяльнісний компонент (комплекс математичних умінь та здатність розв'язувати типові задачі, вирішувати проблемні ситуації методами математики); ціннісно-рефлексивний компонент (сукупність особисто значущих і цінних прагнень, ідеалів, переконань, поглядів, ставлень у галузі математичних дисциплін, самоаналіз і самооцінка математичної діяльності); емоційно-вольовий компонент (розуміння власного емоційного стану в процесі математичної діяльності; переживання невдач, прояв вольових зусиль та наполегливості в процесі розв'язування математичних задач) [25].

Звертаємо увагу на висновки українських дослідників, що математична компетентність виявляється в розумінні учнем ролі математики у пізнанні дійсності; здатності розв'язувати практичні задачі, умінні оцінити доцільність використання математичних методів для розв'язання практичної задачі; умінні формулювати математичні моделі практичних задач, розв'язувати їх математичними методами та інтерпретувати результати; умінні логічно розмірковувати, обґрунтовувати свої дії; володінні математичною термінологією, умінні користуватися знаковою та графічно поданою інформацією; здійснювати аналіз та оцінку отриманих результатів.

Отже, математична компетентність учнів виявляється, зокрема, в умінні логічно розмірковувати, обґрунтовувати свої дії.

30 вересня 2020 року затверджено Державний Стандарт базової середньої освіти, в якому до ключових компетентностей віднесена математична компетентність, що передбачає здатність розвивати й

застосовувати математичне мислення для розв'язання широкого спектру проблем у повсякденному житті; моделювання процесів і ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому й суспільному житті людини [41, с.3].

У Державному Стандарті базової середньої освіти у всіх 12 ключових компетентностях (вільне володіння державною мовою, здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) мовою, здатність спілкуватися іноземними мовами, математична компетентність, компетентності в галузі природничих наук, техніки й технологій, інноваційність, екологічна компетентність, інформаційно-комунікаційна компетентність, навчання впродовж життя, громадянські та соціальні компетентності, культурна компетентність, підприємливість і фінансова грамотність) вказано наскрізні вміння. У контексті нашого дослідження акцентуємо увагу на таких, виокремлених у Стандарті базової середньої освіти, вміннях:

- вміння виявляти припущення та інформацію, надану в тексті в неявному вигляді, доводити надійність аргументів, підкріплюючи власні висновки фактами з тексту та неявними доказами, висловлювати ідеї, пов'язані з новим розумінням тексту після його аналізу та добору контраргументів;
- критичне та системне мислення, що виявляється у визначенні характерних ознак явищ, подій, ідей, умінні аналізувати й оцінювати доказовість і вагу аргументів у судженнях, враховувати протилежні думки і контраргументи, розрізняти факти та їхні інтерпретації, розпізнавати спроби маніпулювання даними;
- логічне обґрунтування позиції, що передбачає вміння висловлювати послідовні, несуперечливі, обґрунтовані міркування у вигляді висновків/ суджень, що є виявом власного ставлення до подій, явищ і процесів.

Вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі передбачають, зокрема, що учень/учениця критично оцінює процес та результат розв'язання проблемних ситуацій; розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності.

Підсумовуючи ключові положення Концепції нової української школи, Державного Стандарту базової середньої освіти, висновки знаних в Україні науковців, можна стверджувати, що *розвинене логічне мислення розглядається нині не тільки як найважливіша умова навчальної успішності школяра, але і як основа формування його вмотивованої діяльності, уміння вирішувати проблеми, що виникають в реальному житті, і здатності оцінювати свою діяльність.* Значна роль логічного мислення у формуванні ціннісних орієнтацій особистості, що забезпечують її стійкість, наступність певного типу поведінки і діяльності, що регулюють мотивацію особистості.

В розумових діях відомий український психолог С. Д. Максименко виокремлює їх основні складові частини: порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення, класифікація, систематизація. Результати процесу мислення існують у формі суджень (істинні, одиничні, часткові, прості, складні, ствердні та заперечні), міркувань, умовиводів (індуктивний умовивід, дедуктивний умовивід, умовивід за аналогією) і понять (родові, видові, одиничні, загальні, конкретні та абстрактні). На думку С. Д. Максименка, «мислення починається там, де перед людиною постає щось нове, невідоме і коли вона починає щось аналізувати, порівнювати, узагальнювати» [51, с. 80].

Для розвитку логічного мислення засобами математики необхідне знання певних понять і законів логіки, тобто логічна грамотність. Про розвиток логічного мислення засобами логіки і математики писали Н. Я. Виленкин, Ю. М. Колягін, Н. А. Менчинська, Т. Н. Міракова, І. Л. Нікольська, Д. Пойа, А. А. Столяр, А. Я. Хинчин й ін. Вчені неодноразово підкреслювали важливість вивчення логіки для розвитку логічного мислення.

Провідною особливістю розвитку логічного мислення в процесі навчання математики є те, що воно має забезпечувати як загально-інтелектуальний рівень розвитку учнів, так і максимально можливу реалізацію їх математичних здібностей. Погоджуємося із тими дослідниками, які основними критеріями розвитку логічного мислення в учнів вказують: вміння виділяти суттєві ознаки з другорядних, вміння міркувати, порівнювати, аналізувати, класифікувати предмети, аргументувати свою точку зору, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, розвивати нестандартність мислення.

Базис логічної складової частини математичної компетентності учнів початкової школи, який включає в себе когнітивний, діяльнісний і ціннісноорієнтований. компоненти, на думку Н. П. Листопад [67], передбачає: володіння мінімальним переліком понять і законів логіки, необхідних йому для подальшого навчання, міжособистісних стосунків в соціумі і вирішення проблем, які виникають у житті; грамотне виконання алгоритмічних інструкцій математичною і нематематичною мовою; сформованість уявлення про особливості математичної мови і вміння зіставляти її з рідною мовою; аргументоване доведення своєї думки, здатність робити логічно обґрунтовані висновки; вміння узагальнювати і встановлювати закономірності на основі аналізу окремих прикладів; вміння висувати припущення і розуміння необхідності їх перевірки; володіння прийомами побудови і дослідження моделей під час розв'язування практикозорієнтованих задач; ясне і точне висловлення своєї думки.

Логічну компетентність серед складових частин математичної компетентності виділяє С. А. Раков [99]. Науковець логічну компетентність трактує як володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень. Вчений виділяє наступні напрямки набуття логічної компетентності: володіти й використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій; будувати, вдосконалювати й використовувати на практиці власну систему математичних уявлень в арифметиці, геометрії,

алгебрі та початках аналізу на основі понятійного апарата дедуктивних теорій; відтворювати дедуктивні доведення теорем й доведення правильності процедур розв'язування типових задач; проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв'язування задач й шукати логічні помилки у неправильних дедуктивних міркуваннях; використовувати математичну й логічну символіку на практиці при оформленні математичних текстів.

Основою логічної компетентності, на думку Г. Д. Катеринюк [59], є логічна грамотність і розвинене логічне мислення, а також здатність використовувати логічну грамотність і логічне мислення в навчальній діяльності та в житті. Ознаками логічної компетентності школярів, на думку науковця, можуть виступати наступні здатності: здатність мислити точно й послідовно, не допускаючи протиріч у своїх міркуваннях, та вміння викривати логічні помилки; здатність до володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, що передбачає володіння і використання понятійного апарату (поняття, висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми) на практиці; здатність будувати, вдосконалювати та використовувати власну систему математичних уявлень на практиці, на основі понятійного апарату; здатність до відтворення доведень теорем та доведення правильності процедур розв'язування типових задач; здатність до проведення обґрунтувань правильності розв'язування задач та відшукування логічних помилок у неправильних міркуваннях.

Доцільність формування логічних умінь, що визначають логічну компетентність під час вивчення математики, викликана потребами як самого курсу математики, так і інших дисциплін. Курс математики вимагає більш розвинених логічних умінь, зокрема, правильного формулювання визначень, вміння класифікувати різні об'єкти, доводити твердження.

Маємо переконання, що *серед основних завдань під час вивчення математики в школі має бути формування логічних умінь як основних компонентів логічної компетентності учнів.*

У нашому дослідженні поняття «логічний складник математичної компетентності учнів», «логічна складова частина математичної компетентності учнів» та «логічна компетентність учнів» ми використовуємо як синонімічні поняття.

Під логічним складником математичної компетентності учнів розуміємо ту динамічну комбінацію їхніх здатностей, що поєднує розуміння логіки подій, логічні вміння та досвід їх використання, які необхідні для здійснення математичної та/або особистісно значущої продуктивної діяльності.

Структуру логічного складника математичної компетентності, на нашу думку, утворює єдність мотиваційно-ціннісної, когнітивної, діяльнісної та рефлексивно-оцінної компонент, в яких відображена специфіка навчання математики у школі:

- мотиваційно-ціннісна компонента - розуміння учнями необхідності формування логічної складової математичної компетентності, її значення в подальшій навчальній та у майбутній професійній діяльності;
- когнітивна компонента - фундаментальні теоретичні математичні знання, знання алгоритмів і методів розв'язання математичних задач;
- діяльнісна компонента - здібності до застосування не тільки вже відомих умінь, навичок і відповідних знань (в репродуктивній діяльності), а й засвоєння нових (у творчій діяльності) під час розв'язування логічних і прикладних задач; вміння раціоналізувати свою діяльність у виборі способів і засобів розв'язування завдань з логічним аспектом;
- рефлексивно-оцінна компонента - вміння аналізувати, осмислювати, усвідомлювати процеси і результати власної та колективної діяльності при розв'язуванні логічних і прикладних задач, вміння критично оцінювати і коригувати діяльність при

необхідності (розуміння важливості відповідальності за результати діяльності).

Підсумовуючи зауважимо, що нещодавній експеримент, проведений дослідниками з кафедри експериментальної психології Оксфордського університету [251], продемонстрував, що у підлітків (від 14 до 18 років), які не вивчали математику, була менша кількість критично важливої для пластичності мозку хімічної речовини, що бере участь у багатьох важливих когнітивних функціях. Зокрема, вирішенні проблем, запам'ятовуванні, навчанні тощо. Крім того, дослідники зауважують, що математика та логіка задіюють одну і ту ж область мозку. На основі кількості хімічної речовини в мозку дослідники змогли розрізнити тих, хто вивчав або не вивчав математику.

1.2. Загальна характеристика технологій формування логічної компетентності учнів основної школи

1.2.1. Психолого-педагогічні аспекти технологій формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи

З метою загального огляду технологій формування логічної компетентності учнів основної школи розглянемо базові психолого-педагогічні аспекти. В педагогіці прийнято (Л. С. Виготський, Д. Б. Ельконін, В. М. Поліщук та ін.) розглядати певну вікову періодизацію. Підлітковий вік визначають як період від 10–11 до 14–15 років, виокремлюючи, відповідно, молодший підлітковий вік (10–12 років) і старший підлітковий вік (13–15 років). Для характеристики технологій формування логічної компетентності учнів це важливо, оскільки, за результатами досліджень психологів, розумові операції мають різну динаміку упродовж підліткового віку. В учнів 10-ти років провідними є операції класифікації та абстрагування, а в учнів 15

років – аналізу та синтезу. Також спостерігається значна варіативність за показниками таких мисленнєвих операцій, як аналіз та порівняння в дітей 10 років і операції абстрагування у дітей 15 років [131].

Когнітивна сфера підлітків розвивається у напрямі зростання довільності та вираженості абстрактних форм. З. І. Калмиковою [57] було з'ясовано, що з 5-го по 7-й клас підвищується інтенсивність розвитку словесно-логічного мислення. За наявності необхідних умов може зростати його самостійність, глибина, стійкість та гнучкість [58]. В учнів молодшого підліткового віку (5–6 класи) недостатньо сформованими є операції абстрагування, порівняння та аналізу поняття, а в учнів старшого підліткового віку (7–9 класи) особистість уже здатна до складного аналітико-синтетичного сприймання, удосконалюється вміння розмірковувати, порівнювати і робити висновки.

Як свідчать дослідження психологів, будь-яка психічна структура розвивається на основі утворень, що виникають у попередні вікові періоди. Звичайно, це стосується і підліткового мислення. Досить детальну схему таких вікових зв'язків запропонував Ж. Піаже [94], який одним з перших розпочав експериментальні дослідження когнітивної сфери підлітків. На його думку, між 7–8 і 11–12 роками формується основна передумова для інтелектуальних операцій підлітків – встановлюється логіка обернених дій.

Психолого-педагогічна наука наголошує на важливості того, який тип логічного мислення буде сформований в учнів: теоретичний або емпіричний. Сформований тип мислення дитина буде використовувати при вирішенні різних завдань і проблемних ситуацій, що виникають у навчальному процесі та у житті. В. В. Давидов [40] відзначає, що емпіричне мислення з'являється у дитини поза школою і певною мірою може розвиватися поза шкільним навчанням, яке лише оформлює його. Теоретичне мислення формується тільки при організації цілеспрямованої роботи для розвитку відповідних операцій; якщо в школі дитина не вчиться теоретичному підходу вирішення проблемних ситуацій, то якісні зміни в її розвитку не відбуваються.

В підлітковому віці у дитини, що відповідає періоду основної школи, продовжує розвиватись теоретичне мислення. Операції, здобуті в молодшому шкільному віці, стають формально-логічними операціями. Учень здатен досить легко абстрагуватись від конкретного, наочного матеріалу і розмірковувати в чисто словесному плані. На основі загального, він може будувати гіпотези, перевіряти та спростовувати їх, що свідчить про пріоритетний розвиток у нього логічного мислення. На відміну від молодших школярів, проявляється здатність оперувати гіпотезами при вирішенні інтелектуальних задач. Причому, стикаючись з необхідністю розв'язати задачу, яка є для нього новою, в більшості випадків учень основної школи прагне використати різноманітні підходи для її розв'язання, намагаючись виявити найбільш ефективних з них [134].

В 11–12 років з'являється рефлексивне мислення. Його основою є здатність до гіпотетико-дедуктивних міркувань на основі загальних посилянь, що не ґрунтуються на особистому досвіді. У підлітковому віці починає формуватися логіка, що складає сутність логіки дорослого і стає основою елементарних форм наукового мислення. На цьому етапі в учнів з'являється здатність оперувати твердженнями, які не обмежуються його досвідом.

У дисертаційному дослідженні М. М. Волчатої [30] обґрунтовано, що в учнів 4 класу спостерігається зародження елементів абстрактного логічного мислення, яке поступово розвивається у 5 – 6 класах. Учні основної школи починають усвідомлювати значення дедукції, а складні логічні міркування можуть здійснювати, відволікаючись від конкретної природи геометричних об'єктів. Школярі можуть мисленнєво уявляти можливі випадки та події, робити висновки про гіпотетичні співвідношення, які можуть бути в подальшому перевірені шляхом експерименту. На цьому етапі в учнів з'являється здатність до формального вираження ідей, якими вони оперували на попередніх етапах при розв'язуванні задач, але які вони могли описати на формальному рівні. За допомогою формальних операцій здійснюється

групування висловлювань, в яких відображаються конкретні операції. У процесі засвоєння основних понять важливо допомогти поступово перейти від конкретного мислення до використання абстрактно-понятійних способів мислення [125, с. 68-76].

В учнів молодшого шкільного віку відбувається зменшення кількості запитань в мові та інтенсивний розвиток питань до себе. Питання стають пошуковими, спрямованими на самостійний пошук відповіді. В учнів молодшого підліткового віку зростає дослідницька активність, її широта та різносторонність, відбувається розвиток питань як способу самостійного мислення. У старшому підлітковому віці відбувається зниження рівня дослідницької діяльності, в той же час змінюється характер запитань: від загального дослідження проблемної ситуації до поглибленого дослідження виділеної проблеми [125, с. 84].

З іншого боку, аналіз психолого-педагогічної літератури з питань розвитку підлітків (11—15 років) свідчить, що цей період є одним із найскладніших у житті людини, його називають «критичним», «зламним», або «перехідним» віком. Характерною особливістю даного періоду вважається інтенсивний фізичний і фізіологічний розвиток, що призводить до підвищення активності дитини, емоційної нестабільності, розумової пасивності. Учні підліткового віку намагаються проявити себе як дорослі особистості, це «проявляється не у вигляді наслідування (як було в дошкільному й молодшому шкільному дитинстві), а в приналежності до світу дорослих - постійному намаганні зайняти місце дорослого в системі реальних стосунків між людьми» [25]. Таким чином, учитель при організації навчального процесу повинен враховувати як особливості психічного розвитку підлітків, так і їх прагнення до самовираження. У зв'язку із цим значної популярності набули нині інтерактивні технології навчання, проєктні технології, методи мультимедійного навчання тощо, перевагу яким часто сучасні вчителі математики надають у процесі формування математичної компетентності учнів.

Вищевказане означає, що з метою активізації мислення учнів у процесі навчання математики слід використовувати різні технології, які враховують особливості мислення учнів конкретного віку. Активність учнів значною мірою залежить від того, як організована їх діяльність. Ефективність формування логічної компетентності учнів залежить від стратегій, які реалізує вчитель, зокрема засобів, методів та прийомів, які він використовує, організовуючи навчання математики.

1.2.2. Технології організації навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи

Розглянуті вище психолого-педагогічні аспекти дозволяють стверджувати, що період основної школи є найбільш сприятливим для формування логічної компетентності учнів. Потенційні розумові здібності школярів даного віку ширші і багатші тих, які використовуються і розвиваються традиційним навчанням. Якщо традиційне навчання, орієнтоване тільки на поповнення багажу знань з переважанням репродуктивних методів, то воно не здатне формувати необхідний рівень логічного мислення, необхідний для подальшого професійного навчання та життя в сучасному світі.

У нашому дослідженні технологічний підхід до формування логічної компетентності учнів передбачає оптимальне поєднання методів, форм та засобів навчання, які створюють навчальне середовище, що забезпечує активність навчальної діяльності кожного учня та сприяє розвитку його необхідних якостей. Розглянемо основні тенденції у технологіях організації навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики, які нині набувають поширення в українській школі.

Технології інтерактивного навчання О. І. Пометун та Л. В. Пироженко [95] поділяють на чотири групи: *технології кооперативного навчання* (робота в парах, ротатійні (змінювані) трійки, два-чотири-всі разом, карусель, робота

в малих групах, акваріум); *технології колективно-групового навчання* (мікрофон, незакінчені речення, мозковий штурм, ажурна пилка, аналіз ситуацій (case-метод), дерево рішень тощо); *технології ситуативного моделювання* (симуляційні або імітаційні ігри, судові або громадські слухання, розігрування ситуацій за ролями); технології опрацювання дискусійних питань (метод ПРЕС, займи-зміни позицію, дискусія, дебати тощо).

Інтерактивне навчання передбачає постійну, активну взаємодію всіх учнів під час навчального процесу. Згідно досліджень психологів, робота в групах є більш продуктивною, ніж індивідуальна; робота в співпраці – більш ефективна, ніж в режиму суперництва. Таким чином, інтерактивні технології передбачають навчання, коли кожен член створеної групи повинен внести певний вклад у спільне розв'язання завдання. Учитель в інтерактивному навчанні виступає організатором процесу навчання.

Зокрема, згідно багатьох досліджень, у підлітковому віці ефективним є застосування у навчанні учнів математики наступних методів інтерактивного навчання: «Мікрофон», «Незакінчене речення», «Мозковий штурм», «Навчаючи - навчаюсь», «Дерево рішень», «Обери позицію», «Зміни позицію», «Дебати» тощо.

Наприклад, застосування методів «Мікрофон» і «Незакінчене речення», основною умовою яких є швидка відповідь на запитання або особисте висловлення власної думки кожного учня по черзі, сприяє угамуванню надмірної фізичної активності. Відмінності у розвитку дівчат і хлопців часто призводять до непорозумінь між ними. Використання методів «Мозковий штурм», «Обери позицію», «Зміни позицію» сприяють формуванню навичок співпраці та взаємопорозуміння. За допомогою методу «Навчаючи - навчаюсь» формується вміння опрацьовувати інформацію у групах та репрезентувати її іншим.

На думку О. І. Матяш [75], технології інтерактивного навчання можуть бути доцільними для уроків розв'язування задач на побудову. Серед переваг

використання технологій інтерактивного навчання у дослідженні виділяються: створення кращих умов для усвідомлення та закріплення навчального матеріалу; урізноманітнення умов, при яких необхідно аргументувати відповіді, дискутувати, відстоювати власну точку зору; розвиток умінь слухати та аналізувати відповіді інших учнів; підвищення внутрішньої мотивації навчання, інтерес учнів до процесу навчання та навчального матеріалу.

У дослідженні Н. А. Тарасенкової [114] здійснено акцент на технології інтерактивного навчання, що передбачає спільну роботу всього класу одночасно. Наприклад, технології «Мікрофон», «Мозкова атака», «Незакінчені речення», «Сходинки», «Навчаючись - учусь» та ігрові технології. Як стверджує дослідниця, застосування інтерактивних технологій на уроках математики позитивно впливає на емоційний стан учнів, розвиваючи їх пізнавальну активність. Учні працюючи злагодженим колективом, активно та творчо підходять до розв'язання поставленої задачі, вчать чітко аргументувати свої відповіді. Для прикладу, для учнів 5-6 класів притаманна недостатня сформованість волі до досягнення поставленої мети, уміння прийняти завдання і діяти, усвідомлюючи його виконання, відсутність цілеспрямованості в поведінці. Тому використання таких методів, як: «Асоціативний куш», «Читання із зупинками», «Карусель», «Займи позицію», «Мозковий штурм», гра «Так - ні», «Робота в парах», «Робота в малих групах», - спонукає учнів до розвитку уяви і творчості, відвертого висловлювання думки, знаходження кількох рішень конкретної проблеми, комунікативних умінь і навичок. Таким чином, ці методи забезпечують перший етап розвитку понятійного та теоретичного мислення школярів. Під час їх використання діяльність учнів стає більш осмисленою та ефективною.

За результатами досліджень багатьох українських дослідників-педагогів, використання таких методів, як «Ротаційні трійки», «Два - чотири - всі разом», «Робота в малих групах», «Акваріум», методу «ПРЕС», «Обери позицію», «Зміни позицію», «Дебати», «Ток-шоу», - сприяє розвитку

мислення, уміння ефективно використовувати свої психофізіологічні особливості. Наприклад, метод «Два - чотири - всі разом» розвиває в учнів одночасно різні сфери мислення і спілкування. Метод «Обери позицію» допомагає самостійно обґрунтовувати обрану позицію щодо вирішення актуальної проблеми й під час дискусії визначити, яка з них є правильною.

На думку багатьох дослідників в основній школі варто долучати учнів до проєктної діяльності. Це можуть бути міні-проєкти на дослідження життя відомих математиків, складання кросвордів, проєкти спрямовані на систематизацію набутих знань. Метод проєктів є ефективним засобом залучення учнів до самостійної діяльності. Важливо враховувати вікові та індивідуальні особливості учнів, пропонуючи спочатку невеликі за обсягом та складністю проєкти [85]. На думку Л. О. Левченко [66], метод проєктів є найбільш ефективним у старшій школі, оскільки учні володіють та оперують глибшими теоретичними знаннями. Проте, використання методу проєктів варто розпочинати в основній школі, адже знайомлячись з окремими аспектами проєктної діяльності учні привчатимуться до самостійності.

В. Г. Моторіна [85] виділяє типологію проєктів за пріоритетним видом діяльності: дослідницькі проєкти (передбачають продуману структуру, визначені цілі, актуальність для учня, соціальну значущість, експериментальні, дослідницькі методи та методи обробки інформації), інформаційні проєкти (спрямовані на пошук і збір інформації про об'єкт дослідження, її аналіз та узагальнення фактів), творчі проєкти (структуру проєкту визначають із врахуванням логіки та інтересів учня, наприклад, міжпредметний проєкт) та практичні проєкти (чітко структуровані та орієнтовані на соціальні інтереси учня).

Математика піддається моделюванню та творчим ігровим відкриттям. Таким чином, практика ігрових завдань дозволяє математичній освіті набути деяких цікавих якостей гри, в яку учні матимуть намір грати. Гейміфікація дозволяє створити умови для мотивації учнів, перетворюючи їх навчання на навчальну та цікаву гру, сприяє вдосконаленню засвоєння учнями

навчального матеріалу та знижує рівень стресу під час оцінювання, змінює поведінку учнів, сприяє формуванню нових звичок [198].

Відеоігри мають значний позитивний потенціал, крім своєї розважальної цінності, коли ігри призначені для формування певних навичок чи вивчення певного матеріалу. Відеоігри привертають увагу учнів. Науковці та практикуючі вчителі використовують ігри у процесі навчання, наводячи такі причини, чому ігри є корисними інструментами у навчанні: ігри можна використовувати як інструменти дослідження та / або вимірювання; ігри можуть допомогти дітям у постановці цілей, забезпеченні зворотного зв'язку; ігри можуть бути корисними, оскільки вони дозволяють вчителю вимірювати результативність різноманітними способами, і їх можна легко змінити та стандартизувати; ігри дозволяють учням відчувати новизну, цікавість та виклики, що стимулюватиме процес навчання [173; 183; 216; 247; 248].

Створення ефективної освітньої гри передбачає набагато більше, ніж просто створення захоплюючої гри та введення освітнього змісту. Завдяки гейміфікації можна не лише створити засіб, який заохотить учнів випробувати нові речі і не боятися невдач, але також може дати можливість учням активніше включатися в процес навчання. Гейміфікація є інноваційним підходом до навчання, оскільки нові технології та програми постійно з'являються, вона все ще розвивається [142]. Однак найважливішою метою будь-якої навчальної технології є підвищення рівня навчання. Порівняно з традиційними уроками, підходи на базі цифрових ігор дійсно можуть дати кращі ефекти навчання, що підкреслює їх необхідність [162].

Одним із засобів формування математичної компетентності учнів нині є інтерактивні освітні сервіси, які дозволяють створювати сприятливі умови для активної взаємодії вчителя та учня. Серед інтерактивних освітніх сервісів виділяють: Khan Academy, EdEra, Go-Lab, Graasp, GeoGebra, Desmos, Міксіке, LearningApps, Kahoot тощо, які допомагають під час розв'язування геометричних задач (GeoGebra); виконують функції графічних калькуляторів та створюють малюнки та анімовані картинки за допомогою графіків

функцій (Desmos); надають можливості учителям, учням та батькам брати участь у навчальних курсах та змаганнях та створювати власні навчальні онлайн-матеріали (Міксіке); допомагають створювати інтерактивні навчальні вправи (LearningApps, Kahoot) [3].

Надзвичайно актуальними нині є засоби інформаційно-комунікаційних технологій в умовах дистанційного навчання. В Україні дистанційну форму навчання з використанням дистанційних технологій впроваджують на законодавчому рівні уже певний час. Зокрема, Постановою Міністерства освіти і науки у 2000 році було затверджено «Концепцію розвитку дистанційної освіти». Також, відповідно до Постанови Кабінету Міністрів України «Про затвердження Програми системи дистанційного навчання на 2004–2006 рр.» у 2004 році було затверджене Положення про дистанційне навчання.

Згідно методичних рекомендацій щодо організації дистанційного навчання в школі, схвалених для використання у загальноосвітніх навчальних закладах (Лист МОН України № 22.1/12-Г-372 від 18.06.2020) для забезпечення дистанційного навчання учнів можна створювати власні веб-ресурси або використовувати інші веб-ресурси на свій вибір. При цьому важливо надавати учням рекомендації щодо використання ресурсів, послідовності виконання завдань, особливостей контролю тощо. Найголовнішим критерієм вибору інструментів для організації дистанційного навчання має бути відповідність поставленим методичним цілям, тобто те, наскільки певний сервіс чи ресурс уможливує досягнення очікуваних результатів навчання в дистанційному форматі. При цьому бажано також урахувати універсальність цих інструментів, щоб скоротити кількість різних платформ, які використовуються для навчання. Порівнюючи кілька інструментів, важливо врахувати можливі особливі потреби учнів та засади універсальної доступності програмних засобів. В умовах, коли навчання відбувається за допомогою персональних пристроїв, слід зважати на розмаїття цих пристроїв та обирати ресурси, які максимально підходять для

різних платформ (персональні комп'ютери, планшети, мобільні пристрої Apple, Android тощо).

Методичним та дидактичним проблемам і перспективам використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі присвячено роботи Ю. В. Горошка, Л. В. Грамбовської, М. І. Жалдака, Т. Г. Крамаренко, В. М. Монахова, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, С. О. Семерікова, О. А. Смалько, О. І. Скафи, Ю. В. Триуса, С. В. Шокалюк та інших.

Серед ефективних засобів під час дистанційного навчання ми виділяємо мережеві ресурси для спільної роботи: освітні спільноти у соціальних мережах, відеосервіси, дистанційні платформи тощо. Одним з інструментів, який можна активно використовувати в дистанційному навчанні є віртуальні дошки. Сам термін «віртуальний» походить від «virtual» і означає можливе, таке, що може або повинно з'явитися за певних умов. Одна із найголовніших властивостей віртуальної реальності - це потужний зворотний зв'язок, інтерактивність. Глядач, слухач, читач перетворюється на співтворця того чи іншого матеріалу. Віртуальна інтерактивна дошка являє собою мережевий соціальний ресурс, призначений для організації спільної роботи зі створення й редагування зображень і документів, спілкування в реальному часі.

Можливості роботи на віртуальних дошках дуже різноманітні: від імпортування та обміну файлами до одночасної правки матеріалу в реальному часі. Потрібно обрати лише ту, інструменти і функції якої будуть найзручнішими. Таким чином, використовуючи віртуальні дошки, з'являється можливість урізноманітнити педагогічну діяльність зручним, легким інструментом для організації спільної роботи з різним контентом у визначеному віртуальному просторі. А завдяки інтерактивній взаємодії у процесі роботи, самостійному освоєнню досліджуваного матеріалу тим, хто навчається, а також консультаційному супроводу з боку учителя, є змога ефективно навчатися на відстані.

Так, на дошці можна розмістити попередньо підготовлені матеріали (тексти, зображення, відео, аудіо), робити записи шляхом друкування тексту або створення малюнків. Крім того, зазвичай у сервісах онлайн-дошок є можливість використовувати додаткові інструменти побудови рівних фігур, готові шаблони організаційних діаграм (карти понять, мозковий штурм, алгоритм тощо). З дошкою можна організувати спільну роботу, зокрема під час синхронного онлайн-заняття. Учні можуть робити записи на дошці одночасно або по черзі. Перевагою онлайн-дошки є те, що всі записи можна зберегти і надати для відсутніх на занятті. Прикладами цифрових сервісів онлайн-дошок є Padlet, Jamboard, Miro.

Використовуючи електронні засоби навчання, учитель має більше можливостей для організації роботи учнів, обирати різні прийоми використання електронних засобів навчання та знаходити нові.

Вивчення математики в умовах дистанційного навчання часто стає надто затеоретизованим, що не сприяє формуванню логічного складника математичної компетентності. Важливо застосовувати різноманітні підходи до навчання, які передбачають використання програмних засобів навчання. Програмне забезпечення з математики, яке є у вільному доступі, при методично виваженому його використанні, полегшить завдання формувати логічний складник математичної компетентності в умовах дистанційного навчання. В умовах дистанційного навчання важливо збалансувати звичайні та цифрові інструменти для формування логічного складника математичної компетентності [193].

Таким чином, в психолого-педагогічній літературі належно обгрунтовано що використання схарактеризованих у цьому підрозділі навчальних технологій дозволяє оптимізувати процес навчання, більш раціонально використовуючи час; здійснювати диференційований підхід в навчанні; сприяти формуванню різних складників математичної компетентності учнів, в тому числі логічний складник.

1.3. Критерії та показники сформованості логічного складника математичної компетентності учнів

З'ясування критеріїв, показників та рівнів сформованості логічної складової частини математичної компетентності учнів та засобів її оцінювання дасть можливість не тільки об'єктивно проєктувати процес і контролювати результат формування логічної компетентності учнів, але й дозволить діагностувати ступінь досягнення поставлених цілей навчання.

Рівні сформованості логічної складової частини математичної компетентності учнів – це чітко помітні індикатори розвитку потрібної компетентності. При цьому перехід від одного рівня до іншого повинен відображати ступінь розвитку, кожен рівень має взаємодіяти як з попереднім, так і з наступним, будучи або умовою, або результатом розвитку об'єкта [36].

Діагностувати рівень сформованості логічної компетентності учнів важливо для визначення джерела проблем пізнавальної діяльності учнів, оскільки найчастіше вони пов'язані не так зі старанністю і знанням матеріалу, скільки з труднощами виконання логічних операцій і використання аналітичного інструментарію при роботі з інформацією. Уміння грамотно аналізувати, класифікувати, порівнювати і т.п. дозволяють істотно зменшити обсяг матеріалу, який необхідно запам'ятати, та дають змогу вибудовувати отримані знання в систему.

Для визначення рівнів сформованості логічного складника математичної компетентності учнів ми, на основі результатів досліджень українських науковців, вважаємо доцільним використовувати такі критерії:

- мотиваційно-ціннісний критерій передбачає формування мотивів, інтересу, позитивного ставлення, потреб в оволодінні логічною компетентністю;
- когнітивний критерій передбачає систему знань, необхідних для успішного формування логічного складника математичної компетентності та ступеню розуміння його сутності та структури;

- діяльнісний критерій передбачає сформованість умінь і навичок учнів логічно грамотно розв'язувати задачі; прояв логічного складника математичної компетентності, апробованого в дії та засвоєного учнями;
- рефлексивно-оцінний критерій передбачає здатність адекватно оцінювати власні результати; прагнення до самовдосконалення.

Опираючись на вимоги до освітньої підготовки учнів, спроектовані в додатку 8 Державному Стандарті базової середньої освіти «ВИМОГИ до обов'язкових результатів навчання учнів із математичної освітньої галузі» [41] вкажемо ті результати навчання, за якими зручно робити висновки про формування і розвиток логічного складника математичної компетентності учнів:

- вирізняє життєві ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами і класифікує їх відповідно до методів розв'язання;
- виокремлює в конкретній життєвій ситуації її окремі складники, які можуть бути розв'язані математичними методами;
- розпізнає аналогію щодо способу розв'язання нової життєвої ситуації до вже відомої;
- описує зв'язки між даними;
- визначає дані, які є необхідними для розв'язання проблемної ситуації;
- оцінює достовірність даних, аналізує та систематизує пов'язані між собою дані, подає їх у різних формах;
- пропонує альтернативний спосіб розв'язання проблемної ситуації;
- визначає компоненти математичної моделі проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними, їх повноту;
- здійснює перехід від абстрактного до конкретного і навпаки ;
- аналізує дані та невідомі елементи проблемної ситуації, визначає їх достатність чи надлишковість;
- встановлює залежності між елементами проблемної ситуації;

- встановлює аналогію між результатом заданої та результатом відомих проблемних ситуацій;
- виокремлює простіші проблеми у складі запропонованої проблемної ситуації;
- обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, аналізує і оцінює їх з огляду на їхню доказовість;
- зв'язує різні елементи математичних знань і вмінь, узагальнює їх, робить висновки.

Конкретизуємо вказані результати навчання, окремо за кожним критерієм, виокремлюючи показники сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Мотиваційно-ціннісний критерій. У нашому дослідженні ми розуміємо мотив як «внутрішнє спонукання» учня до формування логічного складника математичної компетентності. Серед мотивів можуть виступати ідеали, інтереси, переконання, соціальні установки, цінності тощо. Якщо розглядати навчальну діяльність учнів, то на її успішність суттєво впливає мотивація, її сила і структура. Наші наукові розвідки дозволяють стверджувати, що сильна мотивація та внутрішні мотиви сприяють формуванню логічної складової частини математичної компетентності. До основних показників мотиваційно-ціннісного критерію будемо відносити:

- розуміння цінності і важливості сформованості логічної компетентності;
- розуміння сутності логічних прийомів (аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення);
- усвідомлена потреба сформованості логічних прийомів.

Когнітивний критерій. За допомогою цього критерію будемо оцінювати об'єм і рівень знань учнів, необхідних для логічного складника математичної компетентності, інтегрованість знань, здатність відтворювати, узагальнювати та застосовувати математичні знання у проблемних ситуаціях.

Показники сформованості логічної компетентності згідно когнітивного критерію виявляються у певному рівні знань:

- логічних прийомів мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних з реальними об'єктами;
- математичних об'єктів та їх властивостей для обґрунтування своїх тверджень та їх наслідків;
- математичних понять, фактів та послідовностей дій для розв'язання проблемних ситуацій й одержання результату;
- правил та послідовностей дій з математичними об'єктами для розв'язування проблемних ситуацій;
- способів запису та представлення математичної інформації у різних формах (числовій, графічній, табличній тощо);
- способів побудови та дослідження математичних моделей;
- стратегій пошуку оптимальних способів розв'язання проблемних ситуацій.

Діяльнісний критерій. За допомогою діяльнісного критерію оцінюється прояв логічної компетентності, апробованої в дії та засвоєної учнями. Показники діяльнісного критерію виявляються у певному рівні розвитку аналітичних, прогностичних та проєктивних умінь і навичок Деталізуємо показники діяльнісного критерію сформованості логічного складника математичної компетентності:

- аналітичні:
 - аналізувати, виокремлювати складники проблемної задачі, які можуть бути розв'язані математичними методами;
 - класифікувати математичні об'єкти за спільними ознаками для застосування подібних методів під час розв'язування, розпізнавати аналогії;
 - досліджувати, аналізувати дані та зв'язки між ними;

- визначати та описувати математичні характеристики навколишніх об'єктів, зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу;
- прогностичні:
 - відбирати дані, потрібні для розв'язання, які можуть мати обмеження або потребують припущень;
 - прогнозувати результат розв'язання (точність, можливі форми представлення результату, наявність кількох розв'язків);
 - формулювати припущення і досліджувати їх істинність різними способами;
 - передбачати можливість існування альтернативного розв'язку, враховуючи ризики;
 - розробляти стратегії, плани дій;
 - створювати математичну модель (визначати компоненти, взаємозв'язки між ними), добираючи математичний апарат для побудови моделі.

Рефлексивно-оцінний критерій. За допомогою рефлексивно-оцінного критерію будемо оцінювати сформованість здатності до аналізу, осмислення, усвідомлення і переосмислення власної діяльності та її результатів. Формування рефлексивних умінь учнів є необхідною умовою для формування і розвитку логічної складової частини математичної компетентності. Нами виділені наступні показники для виявлення рівня сформованості логічного складника математичної компетентності згідно з рефлексивно-оцінним критерієм:

- представляти результати розв'язання проблемної ситуації, конструктивно реагуючи на аргументи інших, надавати аргументи, формулювати контраргументи;
- критично оцінювати процес та результат розв'язання проблемної ситуації;

- робити висновки на основі отриманих результатів;
- уміння здійснювати контрольну-оцінну діяльність, спрямовану на себе, на осмислення і аналіз власних дій,
- визначати причини успіхів і невдач, помилок і труднощів у процесі реалізації поставлених завдань.

Співвідношення та ступінь прояву критеріїв та показників, дозволяють виокремити чотири рівні сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. У процесі дослідно-експериментальної роботи розглядаємо наступні рівні сформованості логічної компетентності учнів, погоджуючи їх із загальноприйнятими рівнями їхніх навчальних досягнень:

- *початковий рівень* сформованості логічної компетентності учнів характеризується низькою сформованістю мотивів для виконання діяльності з логічним навантаженням, засвоєнням лише найпростіших логічних операцій, які школяр може виконати самостійно, але повільно; відсутністю здатності переносити аналітичні дії на різний зміст; учні не вміють критично оцінити власні дії.

- *середній рівень* сформованості логічної компетентності учнів може бути встановлений в тому випадку, якщо визначається середній рівень сформованості мотивів виконання діяльності з логічним навантаженням; відносно вільне володіння логічними прийомами під час розв'язування задач; уміння застосовувати логічні операції для розв'язання нескладних завдань;

- *достатній рівень* сформованості логічної компетентності учнів передбачає досить високий рівень математичних знань, швидкий темп роботи; частково самостійний вибір способу контролю; уміння застосовувати логічні операції для розв'язання завдань достатнього рівня складності;

- *високий рівень* сформованості логічної компетентності учнів встановлюється в тому випадку, коли у школярів сформована досить стійка мотивація виконання діяльності з логічним навантаженням; високий рівень правильності виконання логічних операцій; вільне перенесення аналітичних

дій на досить складні завдання; високі обсяг і точність виконання завдань; вміння критично оцінювати свої дії, уміння застосовувати логічні операції для розв'язання завдань високого складності, розв'язання яких передбачає творчий підхід.

Діагностика рівнів сформованості логічного складника математичної компетентності передбачає моніторинг успішності виконання учнями специфічних завдань, що дозволяють перевірити ступінь сформованості конкретних умінь і навичок.

1.4. Аналіз сучасних досліджень та практики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи

1.4.1. Результати досліджень українських науковців щодо формування логічної компетентності учнів

1.4.1.1. Огляд результатів дисертаційних досліджень

Аналіз дисертаційних досліджень за напрямом нашої дослідницької проблематики дає можливість узагальнити наукову цінність результатів попередніх українських дослідників і зосередитися на найменш розкритих аспектах у сучасному контексті. Зважаючи на порівняно значну кількість дисертацій, що мають відношення до нашої проблеми дослідження, згрупуємо їх у наступні рубрики:

- розвиток логічного мислення учнів *основної школи* у процесі навчання *різних навчальних дисциплін* (О. І. Федоренко, Н. С. Чернега, П. В. Бельчев, О. І. Бедлінський, Л. І. Шилова);
- системи вправ для розвитку логічного мислення учнів *5-6 класів* у процесі навчання *математики* (І. А. Акуленко, І. М. Богатирьова);

- розвиток логічного мислення учнів *початкової* школи (О. В. Белкіна–Ковальчук, І. О. Кашуб'як);
- розвиток логічного мислення учнів *старшої* школи (О. В. Марченко, В. В. Ачкан, Г. І. Шолом);
- підготовка учителів до розвитку логічного мислення учнів основної школи (Ю. О. Музика, Т. А. Ваколюк, О. М. Ящук).

У 1999 році за спеціальністю 13.00.01 - теорія та історія педагогіки захищена дисертація О. І. Федоренко «Формування логічних умінь учнів основної школи». В дисертації розглянуто поняття «логічні уміння», «умовивідні знання», «логічні прийоми», умови їх формування і зв'язок з пізнавальною самостійністю. О. І. Федоренко обгрунтовує, що оволодіння логічними прийомами розумової діяльності відбувається під час самостійного розв'язування пізнавальних задач і завдань з логічним навантаженням. Дослідниця стверджує, що сформованість логічних прийомів позитивно впливає на якість отриманих знань (їх обсяг і міцність); на розвиток логічного мислення (міркування, встановлення причинно-наслідкових зв'язків, аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, обгрунтування тощо) [124, с. 13]. Встановлено взаємозв'язок між формуванням логічних умінь учнів і розвитком пізнавальної самостійності, зокрема із змістовно-операційним її компонентом. Логічні уміння учнів формуються в процесі активної навчально-пізнавальної діяльності в процесі розв'язування системи пізнавальних задач з логічним навантаженням. На основі результатів дослідження розроблено методичні рекомендації, які можуть використовуватися вчителями при проведенні уроків з предметів природничого циклу.

У 2005 році, за спеціальністю 13.00.09 - теорія навчання, захищена дисертація Н. С. Чернеги [133] «Розвиток логічного мислення учнів основної школи в процесі вивчення предметів природничо-математичного циклу». У роботі проаналізовано зміст поняття «мислення» у філософській та психолого-педагогічній літературі на різних історичних етапах суспільного

розвитку; розкрито сутність поняття «логічного мислення», визначено критерії його розвитку; обґрунтовано доцільність розвитку логічного мислення учнів в умовах особистісно орієнтованого навчання; розроблено і експериментально перевірено комплекс навчальних завдань, спрямованих на оволодіння учнями логічними операціями та логічними уміннями, та його вплив на розвиток логічного мислення учнів у процесі вивчення предметів природничо-математичного циклу.

У тому ж році, за спеціальністю 13.00.02 - теорія і методика навчання фізики, захищена дисертація П. В. Бельчева «Розвиток логічного мислення учнів основної школи у процесі навчання фізики». У дисертації визначено загальне співвідношення логічного й інших видів мислення в навчанні фізики учнів основної школи. На основі теоретичної моделі структури фізичної задачі визначено роль і місце логічного оператора у розв'язанні фізичної задачі. Розроблено нові дидактичні засоби розвитку логічного мислення в навчанні фізики, комп'ютерне забезпечення та методика їх використання, методичні прийоми, які складаються з діагностичних та навчально-корекційних завдань тестового характеру, вправ на актуалізацію логічних операцій та узагальнених розумових дій на навчальному фізичному матеріалі, фізичних задач і завдань з логічним навантаженням. Зокрема, П. В. Бельчев [16, с. 2-3] зазначає: аналіз чинних державних освітніх програм з фізики та відповідного їх навчально-методичного забезпечення свідчить, що вони не містять обсягу конкретизованих вимог щодо знань і умінь логічного характеру, розвитку логічного мислення в цілому. Цей процес має виключно опосередкований характер, тобто через інші знання і вміння, де логічне мислення відіграє важливу, але допоміжну роль; в умовах значної необхідності в нових технологіях управління розвитком логічного мислення в процесі вивчення фізики існує брак ефективних методів діагностування та методик розвитку розумових здібностей учнів.

У 2008 році, за спеціальністю 19.00.07 – педагогічна та вікова психологія, захищена дисертація О. І. Бедлінського [14] «Формування

мисленнєвої стратегії аналогізування учнів 6-8 класів у процесі навчання фізичної географії». В дисертації визначено найбільш адекватні різновиди стратегії пошуку аналогів для формування стратегії аналогізування у процесі навчання географії. Виявлено причини типових помилок підлітків під час розв'язування творчих географічних задач. Обґрунтовано, розроблено та апробовано програму формування стратегії аналогізування при вивченні підлітками географії у вигляді дидактичної гри «Аналогія».

У 2009 році, за спеціальністю 13.00.09 - теорія навчання, захищена дисертація Л. І. Шиловой [135] «Формування логічної культури учнів основної школи». У роботі проведене комплексне дослідження дидактичних основ формування логічної культури учнів основної школи. Як зазначає авторка дисертації, логічна культура – це не вроджена якість, вона формується у процесі вивчення усіх шкільних предметів, кожний з яких додає свій певний внесок, обумовлений його специфікою. Специфіка математики як навчального предмета, зокрема, виражена в тому, що в процесі навчання учнів формується особлива культура, яка називається математичною. Основними компонентами її Л. І. Шилова вказує: уміння конструювати означення математичних понять; уміння виділяти загальні (специфічні) ознаки математичних понять; уміння відбудовувати «ланцюжки» умовиводів; уміння встановлювати структуру теореми та її види; уміння знаходити логічні помилки в судженнях; уміння формулювати гіпотези і перевіряти їхню вірогідність; уміння складати алгоритми розв'язування задач; уміння класифікувати об'єкти і задачі; уміння проводити дослідження результатів розв'язування тощо. У дисертаційному дослідженні Л. І. Шиловой визначено комплексний склад логічної культури і встановлено її взаємозв'язок із розвитком учнів. Розроблено дидактичну модель процесу формування логічної культури школярів, визначено основні критерії її сформованості.

Системи вправ для розвитку логічного мислення учнів 5-6 класів у процесі навчання математики розглядалися у дисертаціях І. А. Акуленко [4]

«Система диференційованих вправ з логічним навантаженням як засіб розвитку логічного мислення учнів 5-6 класів при вивченні математики» (2000) та І. М. Богатирьової [18] «Методика розробки й упровадження системи розвивальних завдань у навчанні математики учнів 5 – 6 класів» (2009).

І. А. Акуленко [1] обґрунтувала, що система завдань, які сприятимуть розвитку логічного мислення учнів, має відповідати наступним критеріям: зростання ступеня складності завдань; якісний і поетапний розвиток розумових дій; функціональне призначення вправ. На думку науковця, у шкільній практиці складність завдань створюється завдяки: відсутності або зміні підказки; введенню у зміст завдання нових для учнів елементів або таких, що передбачають наявність знань з інших дисциплін; зміні форми викладу завдання; введенню завдань, що передбачають новий спосіб виконання; введенню завдань, що вимагають від учнів гнучкості розумових дій та операцій. І. М. Богатирьова [18] розробила й науково обґрунтувала методику створення системи розвивальних завдань з математики, що сприяють цілеспрямованому розвитку в учнів 5–6 класів математичного мислення з урахуванням його семіотичного аспекту. З'ясовано змістові та семіотичні особливості розвивальних завдань, їх функції у шкільному курсі математики 5–6 класів, встановлено види таких завдань та специфіку їх поєднання в систему. Розроблено прийоми посилення розвивальної функції математичних задач. Побудовано методичну модель упровадження системи розвивальних завдань у навчання математики в 5–6 класах. Підготовлено методичні рекомендації для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів щодо розробки й упровадження в навчальний процес 5–6 класів системи розвивальних завдань з математики.

Формування логічного мислення учнів початкової школи у своїх дисертаціях розглядали: О. В. Белкіна–Ковальчук у дисертації «Формування критичного мислення учнів початкових класів у процесі навчання» (2006) та І. О. Кашуб'як «Розвиток критичного мислення учнів початкової школи у процесі навчання математики» (2019). У дисертації О. В. Белкіної–Ковальчук

[15] теоретично обґрунтовано й розроблено модель формування критичного мислення молодших школярів, розроблено комплекси відповідних вправ, визначено рівні сформованості критичного мислення в учнів початкових класів, виділено та обґрунтовано педагогічні умови формування критичного мислення молодших школярів, які доцільно враховувати як в організації педагогічного процесу в початкових класах, так і в методичній роботі з вчителями. Цілком погоджуємося з І. О. Кашуб'як [61], що навчання математики в початковій школі, зорієнтоване на розвиток критичного мислення учнів – це складний процес оволодіння спеціальними знаннями, формування вміння здійснювати аналіз, порівняння, аналогію, планувати послідовність дій для розв'язання окремих завдань. Цей складний процес також має бути спрямований на вироблення вміння описувати побачене, почуте, прочитане за допомогою простих математичних моделей; вироблення вміння сприймати, перетворювати та критично оцінювати отриману інформацію. Імпонує переконаність авторки дисертації, що навчання математики в початковій школі, зорієнтоване на розвиток критичного мислення учнів вимагає від учителя початкової школи ґрунтовної підготовки, методично грамотного проектування, вмілої реалізації спеціальних технологій.

Розвиток логічного мислення учнів старшої школи у своїх дисертаціях розглядали: О. В. Марченко [72], В. В. Ачкан [7], Г. І. Шолом [137].

У дисертації О. В. Марченко [72] розкрито сутність і зміст структурних компонентів мисленнєвої культури учнів старших класів. Обґрунтовано й експериментально перевірено дидактичні засади формування культури мислення, в яких визначено принципи і умови впровадження дослідницької діяльності учнів у навчально-виховний процес. Встановлені у ході дослідження чотири групи критеріїв сформованості культури мислення старшокласників відповідають певним структурним компонентам процесу особистісного розвитку учнів: логічному, особистісно-мотиваційному, емоційно-ціннісному, мовленнєвому. Для формування логічної

компетентності при вивченні рівнянь та нерівностей В. В. Ачкан [7] радить організувати діяльність учнів зі складання планів розв'язування рівнянь та нерівностей, їх реалізації, аналізу одержаних результатів. Також формуванню логічної компетентності, на думку В. В. Ачкана, сприяє розв'язування усних вправ, спрямованих на розвиток математичного мислення та математичного мовлення учнів, розв'язування прикладних задач, організація пошуково-дослідницької роботи (навчальних досліджень) учнів під час вивчення рівнянь і нерівностей з параметрами, систем рівнянь і нерівностей тощо На думку науковця, доцільно на уроках математики систематично використовувати засоби ІКТ. Застосування програмних засобів у процесі вивченні математики сприяє підвищенню ефективності формування математичної компетентності, посилює можливості для розвитку логічного, алгоритмічного та евристичного мислення, забезпечує набуття навичок математичного моделювання, сприяє формуванню математичної та інформаційної культури [7]. У дисертації Г. І. Шолом [137] запропоновано науково обґрунтовану методику формування критичного мислення старшокласників на уроках інформатики. У дослідженні уточнено поняття «критичного мислення», розглянуто його складові та шляхи їх формування в учнів загальноосвітніх шкіл при навчанні інформатиці. Обґрунтовано доцільність використання прийомів розвитку критичного мислення на різних етапах уроку інформатики. Створено й впроваджено в навчальний процес робочі зошити з розвитку критичного мислення для учнів 9-х, 10-х та 11-х класів, які передбачають реалізацію інноваційних педагогічних технологій та запропонованих прийомів розвитку критичного мислення за умов класно-урочної системи.

Особливості підготовки учителів до розвитку логічного мислення учнів досліджували в дисертаційних дослідженнях: Ю. О. Музика [86], Т. А. Вакалюк [20], О. М. Ящук [139].

У дисертації Т. А. Вакалюк [20] з'ясовано специфіку мислення старшокласників та уточнено зміст категорії «логічне мислення»,

обґрунтовано та розроблено окремі компоненти методичної системи підготовки майбутніх учителів інформатики до розвитку логічного мислення старшокласників у процесі навчання інформатики, визначено критерії, показники та рівні сформованості готовності майбутніх учителів інформатики до розвитку логічного мислення старшокласників у процесі навчання інформатики.

У дисертаційному дослідженні О. М. Ящук [139] пояснюється, що формуванню логічного мислення учнів допомагають розв'язування задач підвищеної складності, розв'язування завдань кількома способами, розв'язування задач з відсутніми чи зайвими даними, розв'язування задач, що мають кілька розв'язків, а також вправи на складання і перетворення задач. Авторка стверджує, що у ході навчання розв'язуванню задач геометричного змісту необхідно йти від реального предмета певної форми до геометричної фігури як його образу, і навпаки – від фігури образу до реального предмета. Зокрема, увага О. М. Ящук акцентується на тому, що спеціальна організація навчально-пізнавальної діяльності учнів, спрямована на формування логічних умінь, повинна здійснюватись через використання системи пізнавальних задач і завдань з логічним навантаженням, яка відповідає певним вимогам [139]. Ми повністю погоджуємося із висновками дисертації О. М. Ящук [139], що:

- розвиток логічного мислення на уроках математики під час вирішення нестандартних завдань дозволяє вчителю знайомити дітей з важливими в пізнавальному відношенні фактами, тим самим сприяти їх інтелектуальному розвитку, розширенню кругозору, встановленню тісного зв'язку між навчанням і життям;
- учитель повинен правильно підбирати і систематично використовувати вправи і завдання логічного характеру;
- завдання з елементами логіки необхідно подавати у навчальному процесі за принципом поступового ускладнення (від однієї логічної

операції до складних суджень), що забезпечує формування логічного мислення на завданнях, у яких інтегровано знання математики.

Анкетування, висвітлене у дисертаційному дослідженні Ю. О. Музики [86], засвідчує, що половина опитаних учителів не проводять роботи з розвитку логічного мислення учнів початкових класів. Згідно з результатами дослідження, вчителів з високим рівнем професіоналізму щодо розвитку логічного мислення школярів серед опитаних не було, вчителів з достатнім рівнем – 15%, з середнім рівнем – 35%, а з низьким рівнем професіоналізму щодо формування логічного мислення – 50%.

Підсумовуючи аналіз результатів дисертаційних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів зазначимо, що українські науковці отримали науково цінні результати щодо: технологій формування критичного мислення в учнів початкової школи, сутності і змісту структурних компонентів мисленнєвої культури учнів старших класів, дидактичних засад розвитку логічного мислення старшокласників, особливостей підготовки учителів до розвитку логічного мислення учнів.

Найбільший інтерес для нашого дослідження викликають результати досліджень, що стосуються розвитку логічного мислення учнів основної школи. Зокрема, виокремимо такі висновки українських дослідників:

- логічна культура – це не вроджена якість, вона формується у процесі вивчення усіх шкільних предметів, кожний з яких додає свій певний внесок, обумовлений його специфікою;
- оволодіння логічними прийомами розумової діяльності відбувається під час самостійного розв’язування пізнавальних задач і завдань з логічним навантаженням;
- обґрунтовано доцільність розвитку логічного мислення учнів в умовах особистісно орієнтованого навчання;
- в умовах значної потреби в нових технологіях управління розвитком логічного мислення існує брак ефективних методів діагностування та методик розвитку розумових здібностей учнів.

1.4.1.2. Огляд публікацій у фахових збірниках наукових праць

Значний інтерес викликають у нас наукові праці Л. С. Голодюк, оскільки вони в переважній більшості стосуються методики навчання математики учнів основної школи. Зокрема, Л. С. Голодюк [35], обґрунтовує, що формування культури мислення учнів у процесі організації навчально-пізнавальної діяльності під час навчання математики в основній школі має бути спрямованим на розуміння учнями понять, фактів, правил, означень, аксіом, властивостей, ознак, теорем як форм існування знань про математичні об'єкти та як форм мислення (побудова судження, формулювання умовиводу), які слугують засобами для здійснення розумових дій. Під час здійснення таких розумових дій, як аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення тощо у свідомості учнів формуються знання про математичні об'єкти у формі понять, фактів, правил, означень, аксіом, властивостей, ознак, теорем. Тому, практичне застосування способів виконання розумових дій (аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення тощо), способів виведення поняття про математичний об'єкт, способів здійснення логічних дій з математичними поняттями, способів побудовування системи понять визначає культуру мислення учнів під час здійснення навчально-пізнавальної діяльності в процесі навчання математики в основній школі.

Л. С. Голодюк [34, с. 144] стверджує, що основою комплексної організації навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики в основній школі має бути:

- проблемно-орієнтована діяльність (діяльність, яка спрямована на виявлення (розпізнання) пізнавальної проблеми, формулювання її змісту; установлення переліку дій, які сприятимуть її вирішенню; виконання дій; контроль і оцінка результатів діяльності та способу їх отримання; формулювання висновку про доцільність (недоцільність) подальшого використання віднайденого способу вирішення проблеми; у разі

встановлення недоцільного використання створеного доробку, продовження пошуку нового способу, який би оптимально сприяв ціледосягненню);

- пошукова діяльність (діяльність, котрою передбачено аналіз пізнавального утруднення, яке стосується математичного(их) об'єкта(ів) пізнання, виокремлення відомого і невідомого про нього (них), формулювання суті пізнавальної проблеми, вияв самостійності у пошуку інформації, яка слугуватиме інструментом розв'язання утруднення, формулювання висновків);

- варіативна діяльність (діяльність із перекомбінування, переконструювання способів подання наукових фактів про математичні об'єкти пізнання, виконання дій на основі аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення, порівняння з метою вдосконалення певних сторін власної діяльності з пізнання математичних об'єктів та (чи) сутності «еталонних образів»);

- діяльність-спостереження (цілеспрямована діяльність, яка ґрунтується на почуттєвих сприйманнях суб'єктом математичних об'єктів пізнання і передбачає формування образів сприйнятого);

- евристична діяльність (діяльність, якою передбачено самостійне конструювання майбутньої діяльності з подальшим зіставленням власних напрацювань із відомими культурно-історичними аналогами; перебіг діяльності у переважній більшості випадків супроводжується інсайтом (осаянням), виникнення якого свідчить про віднайдення суб'єктом способу конструювання майбутньої діяльності);

- дослідницька діяльність (діяльність, яка безпосередньо пов'язана з розв'язанням завдання, що передбачає перевідкриття суб'єктом того чи іншого математичного знання, та здійснюється відповідно до етапів, характерних для наукового дослідження (визначення проблеми, опрацювання різних джерел, формулювання гіпотези дослідження, власне здійснення дослідження, аналіз результатів, узагальнення й формулювання висновків);

- навчально-дослідницька діяльність (діяльність, яка здійснюється в урочний і позаурочний час як процес відкриття учнем суб'єктивно нових знань й способів діяльності на основі пізнавальної самостійності та взаємодії з іншими, виявляється у розумових і практичних діях, котрі спрямовуються на усвідомлення мети та формулювання цілей діяльності; визначення й упорядкування дій у її складі; виконання запланованого, здійснення самоконтролю ходу виконання дій, самооцінювання, встановлення розбіжності між метою і одержаним результатом та формулювання висновку про доцільність / недоцільність пошуку нових способів дій, більш адекватних меті);

- проектна діяльність (усвідомлена й упорядкована діяльність учня або учнів, яка здійснюється у певний проміжок часу з метою створення матеріального або інтелектуального продукту на основі самостійного чи колективного виконання завчасно запланованих дій);

- графічна діяльність (діяльність, під час здійснення якої зорове сприймання математичного об'єкта пізнання логічно поєднується з моторною діяльністю учнів (креслення, замальовки з натури або змальовування, складання схем, таблиць, графіків, діаграм; цей вид діяльності позначається має назву «графічна робота»);

- практична діяльність (діяльність, під час якої учні не змінюють хід явищ, які пізнають, а лише фіксують факти спостережень; цей вид діяльності окреслено терміном «практична робота»);

- діяльність із моделювання (діяльність зі створення заміника математичного об'єкта пізнання у формі моделі, у якій відтворено суттєві його властивості, та побудови власних зовнішніх опор-кодувань).

Значна частка українських науковців зауважують, що розвитку логічного мислення сприятиме розв'язування на уроках математики логічних задач, які дають змогу навчити учнів розмірковувати, критично мислити, аналізувати задані умови, виділяючи з них зайві, знаходити правильне розв'язання проблеми, виходячи із даних посилок, переносити відомі

способи дії у нові ситуації. О. В. Віхрова та Г. М. Білоусова [26] пропонують наступну типізацію логічних задач, які доцільно розглядати під час вивчення математики: задачі теоретико-множинного (комбінаторного) змісту; задачі на використання закону суперечності; задачі на використання методу від супротивного; задачі на несуперечність множини висловлень; задачі, розв'язування яких зводиться до пошуку мінімальних нормальних форм; задачі, розв'язування яких передбачає зведення до досконалих нормальних форм формули алгебри висловлень, яка логічно моделює умови конкретної задачі.

Л. Ф. Михайленко [79] формулює методичні поради майбутньому вчителю математики, використання яких на уроках математики сприятиме розвитку логічного мислення учнів, серед яких нам імпонують:

- у процесі розвитку логічного мислення у 5-7 класах немає потреби вводити у вжиток логічну термінологію;

- варто звернути увагу на правильно побудовані визначення, судження, умовиводи та навички їх використання, залежності між прямою, оберненою, протилежною і оберненою до неї теоремами;

- варто виділити методичні прийоми що сприятимуть розвитку логічного мислення учнів: застосування аналізу і синтезу при поясненні нового матеріалу і при виконанні вправ; застосування індукції при вивченні матеріалу; застосування дедукції для доведення математичних тверджень.

- виклад матеріалу курсу математики повинен відзначатися систематичністю, логічною послідовністю та науковістю.

- важливо залучати учнів до активної участі пошуку доведень і розв'язань задач на дослідження з метою розвитку логічного мислення, здатності знаходити відповіді, самостійно виконуючи необхідні міркування.

У працях А. М. Сільвейстра [105] пояснюється, що розвиток логічного мислення буде продуктивним, якщо організовувати систематичну роботу з урахуванням усіх психолого-педагогічних і методичних умов. В якості системо-утворюючих умов розвитку логічного мислення в учнів основної

школи виступає усвідомлена і мотивована їх діяльність в індивідуальній або колективній роботі, яка здебільшого реалізується через розв'язування задач і проведення експериментів (дослідів) із фізики. Розв'язування логічних задач (завдань, дослідів) із фізики сприяє розвитку пам'яті, уваги, мови, інтуїції, нестандартного та логічного мислення, підвищує інтерес не тільки до кінцевого результату роботи, а й до самого процесу пізнання. Розв'язування логічних задач формує в учнів уміння висловлювати припущення, перевіряти їх достовірність, логічно обґрунтовувати. Обговорювання з метою доведення сприяє розвитку мови учнів, виробленню вміння робити висновки. Виконуючи логічні завдання, учні аналізують умови, виділяють суттєве у запропонованій ситуації, співвідносять дані, встановлюють зв'язок між ними. Під час роботи з учнями основної школи з розвитку логічного мислення на уроках фізики слід активніше використовувати не тільки традиційні, але й інноваційні (використання засобів мультимедіа) підходи, що передбачає визначення ефективних форм, методів і засобів такої роботи.

Т. Л. Годованюк [13] зазначає, що навчання математики має значний потенціал для розвитку у суб'єктів освітнього процесу критичного мислення, оскільки засвоєння та використання математичних знань відбувається в умовах створення, дослідження та обґрунтування конкретних математичних моделей. Для цього потрібно мати навички проведення математичних досліджень і генерування нових ідей, уміння аналізувати та доводити (спростовувати) твердження, виділяти істотні зв'язки та відношення в об'єктах і явищах, обирати адекватні та раціональні методи розв'язання абстрактних і прикладних задач тощо.

Н. А. Мисліцька [77] зауважує, що студенти часто не можуть вільно, без текстів представити опрацьовану інформацію, завчають напам'ять означення, словесне формулювання фізичних законів, зазнають труднощів в засвоєнні навчального матеріалу, проведенні класифікації, встановленні правильності умовиводів і означень тощо. Зазвичай студенти використовують готові судження, а спроби самостійно сформулювати свої

думки супроводжуються логічними помилками. На думку дослідниці, в методичній підготовці майбутнього учителя фізики доцільно виділяти логічну підготовку, яка передбачала б формування у студентів логічних знань і набуття на їх основі методичних умінь.

У наукових розвідках О. В. Віхрової та Є. В. Денисенко пояснюється, що серед шляхів розвитку логічного мислення є два основні напрямки: 1) введення у змістовий компонент шкільної математичної освіти деяких понять, правил, законів класичної математичної логіки з метою підсилення його логічної складової; 2) опосередковане формування та розвиток логічного мислення школярів на основі диференціації навчання математики з використанням програмового матеріалу, без розширення змістового компоненту, в процесі доцільно підібраної системи вправ з логічним навантаженням відповідно віковим особливостям учнів [27]. На думку О. В. Віхрової та Є. В. Денисенко, система вправ, яку доцільно використовувати під час вивчення математики у 5-6 класах з метою формування логічного мислення учнів, повинна бути спрямована на: опосередковане засвоєння логічних фактів, законів, правил у поєднанні з процесом формування логічних умінь; формування в учнів комплексу логічних знань, що включають знання елементів логіки, знання про логічні помилки, знання про логічні основи окремих умінь; формування всіх видів логічних знань у процесі засвоєння математичного матеріалу чинної програми, без розширення змісту освіти [27].

О. В. Кутїна [64] стверджує, що розвиток мислення, удосконалення розумових операцій, здібність міркувати залежать від методів навчання. Значні можливості для формування логічного мислення надає розв'язування задач різними способами, одержання з них нових, більш складних задач та їх розв'язання у порівнянні з розв'язання вихідної задачі.

У науковій публікації В. Л. Юнчик [138] обґрунтовується, що математичні задачі і вправи на доведення істотно впливають на розвиток

логічного мислення учнів, розроблення логічних схем розв'язування задач, виникає потреба в обґрунтуванні математичних фактів та понять.

На основі експериментальних досліджень, Л. І. Шнайдер та С. Г. Назаренко [136] стверджують, що для формування логічного мислення необхідно перш за все навчити учнів виконувати наступні дії: виділяти ознаки в об'єктах; встановлювати загальні ознаки; виділяти відмінності; співставляти об'єкти за певною характеристикою. На думку авторів, продовжуючи формування логічної складової частини математичної компетентності потрібно ознайомити учнів з необхідними та достатніми ознаками. Поступово в навчальну діяльність учнів потрібно вводити вправи на вироблення вміння будувати індуктивні та дедуктивні умовиводи. Підсумовуючи, автори публікації стверджують, що важлива роль у цій роботі належить предметній діяльності, результати якої у процесі порівняння та узагальнення учень поступово усвідомлює та переносить на більш абстрактні поняття.

1.4.2. Аналіз стану формування логічної компетентності учнів основної школи в Україні

У радянській школі були як мінімум дві спроби включення логіки у шкільне навчання. У 1946 році була Постанова центрального комітету комуністичної партії «Про викладання логіки і психології в середній школі». Починаючи із 1947/1948 навчального року було введено чотирирічний курс «Логіки» в школі. Основний зміст цього курсу полягав у вивченні наступних тем: предмет і завдання науки логіки; логічні прийоми; поняття; судження; основні закони логічного мислення; дедуктивні та індуктивні умовиводи; аналогія; гіпотеза; доведення. В сімдесяті роки ХХ ст. також були спроби включити елементи логіки в зміст навчання математики. Але незабаром від цієї ідеї відмовилися через відсутність необхідної мотивації логічних знань і нерозуміння учнями та вчителями їх практичної значущості.

Нині можна стверджувати, що елементи логіки певним чином наявні у змісті систематичного курсу математики української школи. Зокрема, йдеться про навчання учнів доводити математичні твердження. Розвиток логічного мислення, формування в учнів прийомів несуперечливих, послідовних, доказових міркувань відбувається під час навчання учнів доведень математичних фактів. Результати опитування, висвітлені у дослідженні [2], демонструють, що вчителі вбачають вагоме значення навчання доведень у контексті формування логічного мислення учнів. Проте, дослідження, проведене науковцями, показало, що існують суттєві прогалини і недоліки у практиці навчання доведень теорем в основній школі. Поряд із тим, що вчителі усвідомлюють важливість навчання доведень, ця робота проводиться несистематично. Це призводить до ускладнень в учнів формування логічного мислення.

У сучасних підручниках математики, які використовуються під час навчання у школі, розглядаються питання, пов'язані з висловлюваннями та їх рівносильними перетвореннями, рівняння, тотожності, тотожно рівні вирази, нерівності, системи рівнянь і нерівностей, а також їх властивості. Цей матеріал, в більшості випадків, використовується при розв'язуванні текстових задач, не акцентуючи при цьому увагу на логічному складникові математичної компетентності учнів. Проаналізуємо у вказаному контексті окремі шкільні підручники математики.

У багатьох сучасних підручниках алгебри для 8 і 9 класів чітко виділені параграфи, які присвячені вивченню понять, що мають відношення до елементів логіки. У підручниках з алгебри для 8 класу колективів авторів О. С. Істер, В. Р. Кравчук, Г. П. Бевз, Н. А. Тарасенкова вводиться поняття множини, підмножини на прикладі числових множин у темі «Квадратні корені. Дійсні числа», проте завдань у параграфі не передбачено (О. С. Істер) або передбачено лише завдання на числові множини (В. Р. Кравчук, Г. П. Бевз, Н. А. Тарасенкова).

У підручнику з алгебри для 8 класу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір включено параграф «Множина та її елементи. Підмножина», вводиться поняття множини, підмножини, діаграми Ейлера у темі «Квадратні корені. Дійсні числа». Завдання, передбачені у параграфі досить широко розкривають викладений теоретичний матеріал, передбачають формування знань на різного типу матеріалі (алгебраїчний, геометричний тощо). Проте даний параграф у новому виданні підручника винесено на додаткове вивчення у рубрику «Коли зроблено уроки».

У 9 класі в курсі алгебри частково розглядаються множини, їх об'єднання та переріз, зокрема:

- підручник Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, параграф «Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки» (наводяться приклади геометричного матеріалу, числові проміжки, різні множини);
- підручник О. С. Істер, параграф «Числові проміжки. Переріз та об'єднання множин» (розглядаються тільки на прикладі числових проміжків);
- підручник В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янченко, параграф «Числові проміжки. Об'єднання та переріз множин» (розглядаються на прикладі числових множин на координатній прямій);
- підручник Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, параграф «Числові проміжки» (об'єднання та переріз множин лише на прикладі числових проміжків, окремих завдань з акцентом на матеріал «Логіки» не передбачено).

Наші дослідження дозволяють стверджувати, що методично грамотне розв'язування усіх типів задач, які присутні в сучасних українських підручниках з математики, певною мірою сприяє формуванню логічного мислення учнів. Проте, для розв'язання проблеми формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи ми особливу увагу звертаємо на задачі на доведення та задачі на дослідження.

Ми здійснили аналіз сучасних українських підручників з алгебри та геометрії для 7-9 класів (всього 24 підручники), щодо того як представлені у підручниках задачі на доведення та дослідження. Результати аналізу представлено у таблиці.

Таблиця 1.1.

**Відсоток задач на доведення та дослідження
в українських підручниках**

	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.
Алгебра 7 клас	6,15%	11%	7,2%	5,9%	6,73%	10%	6,4%	5,3%
Геометрія 7 клас	16,5%	27,75%	18,3%	17,3%	18,4%	14,3%	21%	18%
Алгебра 8 клас	7,3%	7%	5,3%	1,5%	10,6%	18%	11%	13,6%
Геометрія 8 клас	11,2%	19,2%	12,3%	18,3%	12,9%	12,2%	13,4%	12,6%
Алгебра 9 клас	4,7%	9%	6,2%	2,9%	23%	35,3%	20,4%	21,8%
Геометрія 9 клас	6,2%	15,6%	9,8%	11,2%	15,7%	11%	15%	19,2%

Проведений аналіз підручників з алгебри та геометрії для 7-9 класів дозволяє сформулювати такі основні тенденції:

- 1) у підручниках з геометрії відсоток задач на доведення та дослідження зменшується із зростанням класу, хоча, вважаємо, що навчальний матеріал і розвиток абстрактного мислення учнів

створює сприятливі умови для збільшення кількості задач на доведення та дослідження;

- 2) спрощеність, уніфікованість та переважна більшість шаблонних задач на обчислення утруднює формування логічного складника математичної компетентності учнів;
- 3) у підручниках з алгебри та геометрії для основної школи найзручніші умови для формування логічного складника математичної компетентності учнів створені авторським колективом Мерзляк, Полонський, Якір, зокрема тому, що задачі на доведення та дослідження представлені краще, ніж в інших українських підручниках математики для основної школи.

У реальній педагогічній практиці багато років основною метою навчання математики було оволодіння системою знань та умінь. Пам'ять учнів завантажувалася великою кількістю фактів, понять, алгоритмів. У результаті випускники школи за рівнем фактичних знань з математики досить суттєво випереджали своїх ровесників у більшості інших країн. Але результати міжнародних порівняльних досліджень (PISA, TIMSS та ін.), які проводяться в останні десятиріччя, виявили певні проблеми, пов'язані з математичною підготовкою українських учнів. Так, українські школярі краще, ніж учні багатьох країн світу, виконують завдання репродуктивного характеру, які відображають оволодіння предметними знаннями та вміннями. Але їхні результати нижчі при виконанні завдань на застосування знань у практичних, життєвих ситуаціях, зміст яких подано в незвичній, нестандартній формі; в яких потрібно провести аналіз даних або їх інтерпретацію, сформулювати висновки.

Не зважаючи на те, що проблема формування логічного мислення знайшла відображення в педагогічних дослідженнях і в педагогічній літературі, в масовій практиці школи формування логічного мислення відбувається не достатньою мірою.

Анкетування учителів м. Харкова, яке висвітлено в дисертаційному дослідженні О. І. Федоренко [124], свідчить, що формування логічних умінь вважають необхідним та важливим менше половини опитуваних учителів; необхідність підбору спеціальних задач і завдань з метою формування логічних умінь – чверть опитаних учителів; необхідність навчання логічним прийомам в процесі розв'язування спеціально підібраних задач з логічним навантаженням зазначили 34,7 % вчителів. На запитання анкети про навчання учнів логічних прийомів розумової діяльності на своїх уроках більше половини опитуваних учителів дали негативну відповідь, 33,6 % відповіли, що застосування логічних прийомів має епізодичний, не цілеспрямований характер.

Для того, щоб відслідкувати чи приділяється окрема увага формуванню та розвитку логічному мисленню на уроках математики, нами було здійснено аналіз змісту персональних блогів кращих українських учителів математики. Нижче наводимо деякі приклади із змісту персональних блогів.

Для розвитку критичного мислення учнів А. В. Левченко (вчителька математики Тальнівської ЗОШ І-ІІІ ступенів № 2 Тальнівської міської ради Черкаської області) використовує прийоми «Еврика», «Навмисна помилка», «Логічне дерево», «Піраміда роздумів», «Кластери», «Правильні та помилкові твердження», таблиця «Плюс-мінус-цікаво», «Переплутані логічні ланцюжки», «Свій до свого по своє», «Вилучи зайве», «Недописана фраза», «Лови помилку» та ін.

На думку Г. В. Горецької (вчителька математики Коломийського ліцею № 9 Коломийської міської ради Івано-Франківської області), третій (заключний) етап уроку є найважливіший для розвитку критичного мислення в учнів, бо його основним завданням є узагальнення та систематизація вивченого матеріалу, ефективним є діалогове навчання, під час якого учні вчать критично мислити, аналізувати, дискутувати та приймати рішення.

А. А. Михайловський (вчитель математики Лисичанського багатoproфільного ліцею Лисичанської міської ради Луганської області)

пропонує використовувати під час уроку математики різні форми, методи та прийоми для розвитку критичного мислення, наприклад: вправа «Асоціації», застосовуючи програму «Mentimeter»; платформа LearningApps (вправи «Знайди пару» і «Класифікація» (для класифікації фігур за їх властивостями або під час вивчення теми «Графіки функцій»). Учні повинні не тільки вчитися розв'язувати задачі, але й розпізнавати неточності у вже розв'язаних, тому інколи заняття варто розпочинати з вправи «Знайди помилку» (вказати арифметичну неточність, невірно застосовану формулу) або «Порушена послідовність» (вказати логічний хід розв'язку завдання, аргументувати свій вибір на основі раніше набутих знань).

Застосування проблемного навчання на уроках математики, на думку І. Л. Жаловаги (вчителька математики Горохівського ліцею № 2 Горохівської міської ради Луцького району Волинської області), сприяє розвитку логічного мислення, зокрема створення проблемних ситуацій: із застосуванням прийому «Знайди помилки»; через використання цікавих завдань; через вирішення завдань, пов'язаних з життям; через різні способи розв'язання однієї задачі.

З метою формування логічного мислення Г. В. Дем'янюк (вчителька математики ліцею № 7 м. Гайсин Гайсинської міської ради Вінницької області) значну увагу приділяє позакласній роботі, зокрема організації конкурсів усного рахунку та логічних задач, квестів, вікторин, математичних змагань, підготовці учнів до Чемпіонату логічних задач тощо. Організовано гурток логіки, на якому учні знайомляться з:

- множинами, елементами множин, графами;
- задачами на закономірність та порівняння; задачами на відповідність, логічними задачами;
- методами розв'язування задач (метод крайнього, метод припущення, метод вилучення, метод єдиної схожості та відмінності).

Крім гуртка логіки, матеріали якого представлені у персональному блозі вчителя, блог включає рубрику «Логіка», де розміщені логічні задачі та головоломки, презентації, розробки уроків та конкурси з логіки, ігри на кмітливість та відео-уроки, які вчитель рекомендує використовувати на уроках математики з метою розвитку логічного мислення.

Підсумовуючи огляд персональних блогів кращих українських учителів математики, зазначимо, що, як ми і очікували, кращі українські учителі математики переймаються проблемою розвитку логічного мислення учнів, шукають ефективні методи, прийоми та засоби підвищення логічної компетентності учнів.

Однак, аналіз результатів виконання завдань зовнішнього незалежного оцінювання демонструє, що майже половина учасників тестування не приступає до розв'язування завдань з розгорнутою відповіддю, а розв'язати такі завдання можуть лише одиниці [93]. Абітурієнти не можуть повно обґрунтовувати отримані висновки, не посилаються на аксіоми, теореми та їх наслідки, не можуть послідовно записати хід своїх думок. Особливих труднощів викликає завдання з параметром, розв'язання якого потребує не лише знаходження коренів наведеного рівняння, але й аналізу та синтезу отриманих результатів. Такі завдання потребують високого рівня логічної складової частини математичної компетентності, а їх нерозв'язання свідчить, на нашу думку, про низький рівень її сформованості.

Таким чином, наш аналіз сучасних підручників з математики та інших джерел інформації показав, що *нині недостатньо необхідного методичного супровіду для формування логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики.*

1.4.3. Результати досліджень закордонних науковців щодо формування логічної компетентності учнів

Дослідження, здійснені данськими вченими у межах проекту «Компетенції та вивчення математики, ініційовані Міністерством освіти Данії [222], стверджують, що математична компетентність передбачає сформованість її восьми складових. Проте, нашу увагу привертають наступні: *математичне мислення* (уміння ставити запитання; уміння використовувати математичні знання шляхом абстрагування деяких властивостей та узагальнень раніше отриманих результатів; уміння розмежовувати різні види математичних тверджень: аксіоми, теореми, визначення, умовні твердження (якщо – то), гіпотези, доведення тощо); *постановка та розв’язування математичних завдань* (розуміння та визначення різних типів завдань; розв’язування різних типів завдань, поставлених іншими чи собою; розв’язування завдань різними способами); *математичне моделювання* (аналіз властивостей існуючих моделей, включаючи їх оцінку та обґрунтування; аналіз і критика моделей та розробка їх альтернатив); *математичні обґрунтування* (слідування та оцінка ланцюгів аргументів, висунутих іншими; розуміння математичних доведень та їх відмінність від математичних міркувань, уміння здійснювати математичні доведення; розробка математичних аргументів та їх перетворення на доведення); *розуміння математичних об’єктів* (інтерпретація та розмежування різного роду математичних об’єктів; розуміння взаємозв’язків між об’єктами); *обробка математичних символів та їх формалізація* (інтерпретація мови математики та розуміння її зв’язків з природньою мовою; розуміння природи та правил математичних систем; обробка тверджень та виразів, що містять математичні символи та формули).

Результати цього дослідження демонструють, що значна частина складових математичних здібностей (В. А. Крутецький) чи математичної компетентності (М. Niss) передбачає логічне мислення.

Японські вчителі вже багато років наголошують на необхідності учнів удосконалювати логічні уміння. Незалежно від причини, учням необхідно вдосконалювати навички логічного мислення та розв'язування математичних задач. Глибоке розуміння математики – це основна мета вивчення математики в японській спільноті вчителів математики. «Мета навчання математики для учнів, які запам'ятовують математичні факти та застосовують їх під час розв'язування математичних задач, буде простою «отримання вищої оцінки». Це не реальна мета навчання математики. Важливо допомогти учням вдосконалювати навички логічного мислення для глибокого розуміння математики». Японські вчителі математики підкреслюють важливість формування логічних умінь та досвіду їх використання [164].

У багатьох закордонних наукових публікаціях обґрунтовується, що математика і логіка тісно пов'язані, саме на уроках математики створюються найбільш оптимальні умови для формування і розвитку логічного мислення учнів. Логічне мислення може проявлятися сформованою здатністю учня грамотно виконувати логічні операції в процесі розв'язування математичних завдань; здатністю доведення або спростовування тверджень; здатністю правильно та обґрунтовано розв'язувати завдання з логічним навантаженням тощо. Математична діяльність немислима без використання таких логічних прийомів, як порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення. Як зауважив математик і філософ Б. Рассел, «математика і логіка розвивалися останнім часом паралельно; логіка стала математичнішою, а математика – логічнішою. Унаслідок цього тепер стало зовсім неможливо провести лінію поділу між ними; фактично вони стали одним цілим». Математика розвиває здатність аналізувати на основі фактів та припущень та на їх основі робити висновки, тобто логічно мислити [182].

Про важливість математичної логіки С. Л. Едельман писав: «Математична логіка дуже важлива. Вона дає йому можливість зрозуміти суть доведення; з'ясувати зміст поняття, логічного слідування; встановити

взаємозв'язки між різного роду термінами. Символіка математичної логіки дозволяє здійснювати стисло і точно запис визначень математичних понять, запис теорем і їх доведення. Вона дає нові засоби для вироблення в учнів навичок точного мислення». У Стенфордському університеті пропонується курс математичного мислення, що складається з двох частин, і фокусом восьмитижневої базової частини курсу є формування навичок математичного мислення для повсякденного життя та професійної (не математичної) діяльності. Завдання, які вирішуються під час навчання, – засвоєння правил логіки під час аналізу мови та формулювань. Фактично – це курс формування логічного мислення.

Логіка – дисципліна, яка вивчає структуру знань, відрізняє правильні та неправильні міркування. Логічне мислення розглядають як ключ до розумових здібностей та комплексного розв'язування завдань. Логічне мислення означає отримання ідей, фактів та результатів виконання завдань. Здатність логічно мислити дає змогу зрозуміти та вирішити будь-яке завдання [234].

Словацький науковець М. Совічова [236] пропонує, з метою формування логічного мислення, використовувати нестандартні, зокрема за процедурою розв'язування, завдання. Це завдання, які потребують математичного дослідження. Зазвичай учні не можуть розв'язати таку задачу після першого прочитання умови, оскільки раніше вони не розв'язували аналогічної. Вони не можуть знайти розв'язок одразу. Проте, вони можуть проаналізувати умову, розділити задачу на часткові, окреслити стратегію розв'язування часткових задач, а після цього побудувати розв'язування задачі в цілому. Використання таких задач стимулює розвиток логічного мислення, підсилює необхідність доведень та аналізу як важливої частини навчання математики.

У дослідженні формування логічного мислення учнів у процесі навчання математики вчена використовувала наступні задачі:

1. x, y, z – додатні дійсні числа, для яких справджується рівність $xy+yz+zx=1$. Доведіть, що $x + y + z \geq \sqrt{3}$.

2. Знайдіть дві останні цифри числа 19^{92} ?

3. Дано рівносторонній $\triangle ABC$. Знайдіть таку точку P , коли $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Найбільше нам імпонує третя задача. Хоча вона є легкою, проте потребує детального аналізу, врахування способів розміщення точки P (як всередині, так і зовні трикутника). Важливо знайти всі можливі позиції точки P та довести, що інших способів розміщення точки не існує.

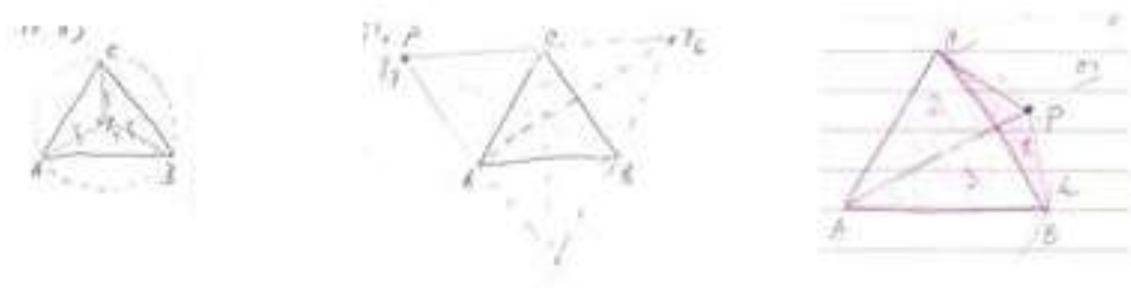


Рис. 1.1. Рисунок до задачі про трикутник

Дослідники Швеції для визначення рівня розвитку математичних здібностей, зокрема логічного мислення, використовували наступні задачі:

Задача 1. У півколі нарисовані два півкола, як показано на рисунку. Чи периметр великого півкола більший, менший або дорівнює сумі периметрів двох менших півкіл? Обґрунтуйте свою відповідь.

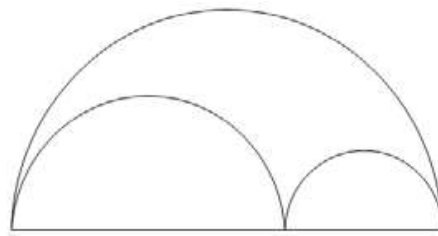


Рис. 1.2. Рисунок до задачі про півкола

Задача 2. Мері та Пітер хочуть купити компакт-диск. У магазині вони усвідомлюють, що у Мері є на 24 шведські крони менше, і в Пітера на 2 шведські крони менше ціни на компакт-диск. Навіть коли вони складуть свої

гроші разом, вони не зможуть дозволити собі CD. Яка вартість компакт-диска та скільки грошей має кожен?

Під час дослідження враховувалися не лише відповіді учнів, а й процес розв'язування. Вчені стверджують, що задачі другого типу краще сприяють розвитку логічного мислення, оскільки створюють кращі умови для формування прийомів логічних операцій.

Розв'язування задач – діяльність, яка потребує виконання різноманітних дій, кожна з яких потребує певних знань та навичок, зокрема і логічного мислення. Для аналізу та опису діяльності з розв'язування задач пропонуються різні підходи, проте їх основою є дослідження, здійснені Г. Полем, який у процесі розв'язування задач виділяє наступні етапи: проаналізувати задачу, розробити план, реалізувати його та здійснити аналіз результатів. Тобто під час розв'язування задач в учнів формуються уміння аналізувати, що передбачає формування логічного мислення в тому ж числі. Інші моделі процесу розв'язування задач є вдосконаленнями дослідження Г. Поля, проте теж передбачають формування логічного мислення у процесі розв'язування задач [229].

Логічне мислення відповідає навичкам високого рівня згідно з класифікацією цілей Блума. Використання впорядкованої системи цілей дуже важливе для побудови навчального процесу. До навичок високого рівня, які є прийомами логічного мислення належать: *аналіз* (чи можуть учні розділити інформацію на пов'язані частини та встановити зв'язок між ними; класифікувати, виділивши подібності й відмінності). Завдання, які пропонуються науковцями: проаналізуйте, порівняйте, співвіднесіть, протиставте, категоризуйте, проведіть експеримент, перевірте; *оцінка* (чи можуть учні стверджувати, обґрунтовувати власну думку, рішення або твердження). Завдання, які пропонуються науковцями: доведіть, поясніть, обґрунтуйте, підсумуйте, оцініть.

Д. Л. Бал і Х. Бас припускають, що математичне мислення передбачає математичне спілкування. Спілкування є невід'ємною частиною процесу

мислення [149]. На думку Б. Каура та Т. Лама, комунікація означає вміння використовувати математичну мову для висловлення математичних ідей та аргументів точно, стисло та логічно, використовувати математичні моделі інструменти (таблиці, діаграми, графіки тощо) стратегічно [196]. Д. Л. Бал і Х. Бас вважають, що мислення – це основна навичка математики, яка необхідна для ряду цілей – для розуміння математичних понять, використання математичних ідей та гнучкості процедур та реконструкції [149]. Як заявляють Б Каур та Т. Лам про навчальний план Міністерства освіти Сінгапуру, математичне мислення стосується здатності аналізувати математичні ситуації та будувати логічні аргументи [196].

Б. Рассел заявляє, що математичне мислення передбачає розробку, обґрунтування та використання математичних знань. Бачити математику як мережу взаємопов'язаних ідей є результатом математичного мислення [182]. Б Каур та Т. Лам вважають, що це стосується здатності бачити і пов'язувати математичні ідеї, математику та інші предмети, а також математику та повсякденне життя [196]. Таким чином, математичне мислення можна описати трьома компонентами – це спілкування, базові знання з математики та логічне мислення.

Дослідженнями закордонних науковців встановлено, що різноманітні загальнопізнавальні навички необхідні для успішності з математики [165]. Навички логічного міркування є важливими аспектом хороших математичних здібностей.

Аналіз багатьох закордонних досліджень свідчить про те, що в закордонній педагогіці належно обґрунтовано як навички логічного міркування взаємопов'язані з предметною областю математичних умінь. Наприклад, Т. Нунес, П. Брайант, Д. Еванс, Д. Белл, С. Гарднер, А. Гарднер, та Дж. Каррахер доводять причинно-наслідкові зв'язки між навичками логічного мислення та математичними здібностями у дітей. Однак, логічна компетентність була введена як застосування логічних понять з математики, наприклад, їх розуміння, зворотні відношення (наприклад, між додаванням і

відніманням), адитивність, взаємовідношення один до одного і один до багатьох тощо [223].

Це дослідження надає докази того, що математичні знання дітей ґрунтуються на розумінні їх основ логіки, що дозволяє припустити, що навички логічного міркування самі по собі необхідні для хорошого виконання математичних завдань.

Д. Перкінс наполягає, щоб задачі були проблемними. Його книга «Ванна Архімеда: Мистецтво та логіка проривного мислення» [228] присвячена задачам, які не можна розв'язати за шаблоном згідно попереднього досвіду. Тобто він пропонує задачі, які учень повинен розв'язувати опираючись на процеси логічного мислення. Д. Перкінс розділяє задачі на 2 типи. Обидва типи задач розв'язуються, проте лише задачі першого типу сприяють формуванню логічної компетентності. Д. Перкінс також зауважує, що тип, до якого відноситься задача залежить від учня: для одного учня задача може бути задачею першого типу, а для іншого – другого типу.

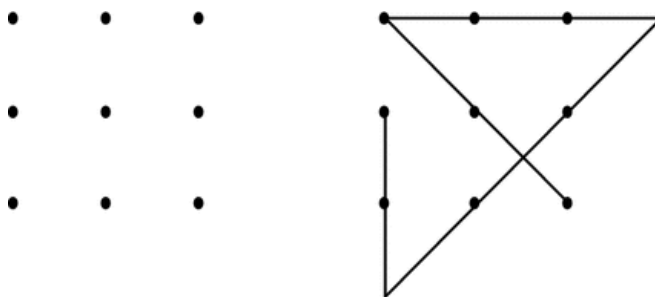


Рис. 1.3. Рисунок до задачі з книги Д. Перкінса

Наприклад, задачею першого типу є задача з'єднання дев'яти крапок у масиві 3×3 чотирма прямими лініями без відривання олівця від паперу, розв'язання якого представлено на рисунку 1.

Щоб розв'язати цю задачу, Д. Перкінс зауважує, що учень повинен визнати, що обмеження перебування в квадраті, створеному масивом 3×3 , є обмеженням, яке накладається самостійно [228].

Серед задач для формування логічної компетентності закордонні вчені виділяють задачі, що стосуються математичного моделювання. Моделювання

передбачає поєднання математики та навколишнього світу, застосування математики для розв'язування задач. Математичні засоби використовуються, наприклад, для розуміння явищ, для прогнозування подій або для оптимізації процесів [152; 153; 194]. У таких країнах, як Нідерланди, а з недавніх пір – Австрія, математичне моделювання включається до навчальних програм [166].

Н. М. Таджудін і М. Чіннаппан зауважують, що важливими під час вивчення математики для формування логічної компетентності є задачі на дослідження [243]. М. Айел стверджує, що для вдосконалення логічного мислення учнів вчителі повинні використовувати творчість у класі, а також сприяти творчим роботам та реалізації ідеї учнів [147]. Відповідно до поширених дискусій у Комітеті з навчальних програм реформи Нідерландів [170], вважається, що важливими для формування логічних умінь учнів є розв'язування задач на основі моделювання та дослідження.

Основними будівельними блоками для формування логічної компетентності, на думку Бонні М. Ходж [154], є визначення та сполучні слова «та» та «або». На жаль, учні приділяють менше уваги визначенням, ніж прикладам. Вони в основному вчать на прикладах, а не мислять дедуктивно. Кожна задача – це нова гора, на яку можна піднятися, не пов'язана з іншими задачами, які були представлені, продемонстровані чи обговорені. Що стосується дедуктивних міркувань, учні мало або зовсім не розуміють застосування визначення до конкретного прикладу. Зокрема, вони часто відмовляються (або ігнорують) частину визначення, що детально розглянуто у дослідженні Бонні М. Ходж [154]. Важливе значення для розуміння визначень та наукових позначень є сполучні слова «та» та «або». Багато учнів часто ігнорують це слово і дотримуються лише першої частини визначення. Ми погоджуємось з думкою Бонні М. Ходж, що спрямовуючи увагу учнів на аналіз частин визначення та сполучних слів, закладаються основи логічних умінь, які є важливими для розуміння математики.

На думку Бонні М. Ходж [154], логічно, якби учні підходили до розв'язування лінійних рівнянь, лише знайомившись із властивостями додавання / віднімання, множення / ділення чи рівності. Ідея полягає в тому, щоб учні логічно міркували упродовж усього процесу розв'язування задачі, а не просто запам'ятовували кроки, а потім застосовували їх. Якщо учнів навчати математиці виключно як процес запам'ятовування, вони рідко зможуть застосувати ці поняття до реальних даних. У процесі розв'язування, який використовує дедукцію, вони міркують від передумови до висновку, написавши ряд еквівалентних рівнянь. Як тільки вони обґрунтують основи пошуку алгебраїчного розв'язання рівняння, учні логічно перейдуть до розв'язування рівнянь, що містять змінну по обидві сторони від знака рівності, та до розв'язування тих, що потребують спрощення, перед початком процесу перетворення. Ознайомивши учнів із поняттям дедуктивного міркування від даної передумови до висновку, вони можуть використовувати індукцію для формування висновків про рівняння, що є тотожностями чи суперечностями. Це замінює учням запам'ятовування того, що часто називають «особливими випадками» в підручниках з математики. Таким чином можна закладати основу для розв'язування рівнянь, яку можна розвивати, досліджуючи розв'язування рівнянь, які є квадратними, раціональними чи ірраціональними тощо.

Ключовим для розвитку логічного мислення учнів є обґрунтування протягом усього процесу розв'язування задач. Незалежно від того, чи учні вивчають алгебру чи геометрію, вони повинні обґрунтувати висновки, які вони роблять, працюючи над задачею. Це обґрунтування може бути письмовим або усним, числовим, алгебраїчним чи графічним; проте обґрунтування процесів є критичним як для успіху учнів, так і для розвитку логічних умінь та досвіду їх використання під час вивчення усіх дисциплін [154].

Дослідження, проведене американськими та китайськими науковцями демонструє, що процес мислення учнів базової школи не достатньо

розвинений. Це означає, що уміння логічно мислити недостатньо розвинені. У дослідженні наведено приклади, що показують низький рівень логічного мислення в учнів [179]. В іншому дослідженні, проведеному грецькими науковцями, продемонстровано труднощі, які виникають в учнів під час вивчення геометрії. Низький рівень умінь учнів аналізувати геометричні рисунки свідчить про слабку сформованість логічного мислення [227].

Логічне мислення окремі закордонні науковці розглядають як розумову діяльність під час розв'язування задач. Взагалі, уміння логічно мислити визначає успішність у навчальному процесі [149]. Дослідження К. К. Пун та К. К. Леунг демонструють, що учні з вищими навчальними досягненнями мали більш високі бали в тестах з геометрії. Крім того, виявлено високий показник кореляції між досягненнями учнів з геометрії та їх здатністю до логічного мислення [230].

Аналізуючи праці іноземних науковців зауважуємо, що вчителі математики в інших країнах виявляють значний інтерес до засобів візуалізації математичних понять та об'єктів і наголошують, що візуалізований матеріал на уроках математики сприяє розвитку абстрактного логічного мислення [151]. Тому при навчанні математики необхідно застосовувати засоби візуалізації для вдосконалення наявних знань та їх розширення згідно когнітивної теорії мультимедійного навчання [208; 210]. Зокрема, науковцями досліджувалися методи презентації при навчанні математики, що полягають у різних методах візуалізації (дво- та тривимірні анімація) для виявлення найбільш ефективних [232].

Дослідження, здійснене іспанськими вченими, стосується ролі, яку можуть відігравати технологічні ресурси для вдосконалення логічного мислення, що, таким чином, покращує розуміння та вивчення математики. У дослідженні взяли участь 255 учнів 2-го та 3-го курсу іспанської середньої освіти (*Educación Secundaria Obligatoria, ESO*), що відповідає 8-9 класу основної школи, тобто є актуальним для нашого дослідження. Уроки, на яких вивчали теорію ймовірності та статистику, були проведені у форматі відео-

підкастів. Анімований ефект покращує синхронізацію вербальної та візуальної інформації, поступове подання письмової інформації привертає увагу учнів, покращуючи засвоєння відповідної інформації. Наявність анімованих елементів у мультимедійних матеріалах дозволяє учням краще запам'ятовувати та застосовувати вивчене. Результати дослідження, демонструють, що відповідне включення анімаційного ефекту в навчальний матеріал сприяє формуванню логічного мислення, зокрема аналізу інформації, побудові математичної моделі задачі, класифікації та встановленню зв'язків між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [205].

Про ефективність відео-підкастів свідчить дослідження канадських науковців. 59 відео-підкастів, що охоплюють функції (лінійні, квадратичні, показникові, логарифмічні та тригонометричні), розв'язування рівнянь та нерівностей, були створені як інструменти навчання та використовувалися 288 учнями. Результати показали, що більшість учнів регулярно використовували відео-підкасти, оцінюючи їх як дуже корисні, ефективні та прості у використанні засоби навчання [197].

Дослідження, проведене австралійськими науковцями, демонструє потенціал персонального комп'ютера, планшета, віртуальної дошки та інших мережевих ресурсів для навчання математики. Оскільки вчителі переходять у віртуальне середовище, мережеві ресурси є важливим інструментом, який може максимізувати можливості навчання учнів, розширюючи можливості як учня, так і вчителя. Серед переваг застосування мережевих ресурсів для навчання математики, виділених у дослідженні австралійських науковців, є: можливість реагувати на запитання учнів, одночасно зберігаючи записи; можливість розглядати складні геометричні побудова, які на дошці зобразити складно; можливість координувати групову або індивідуальну роботу; певні моменти можуть бути легко зафіксовані та повторно використані для аналізу та виконання додаткових завдань учнями; аспект новизни привабливий для учнів [180].

Дослідження, проведені науковцями різних країн, дозволяють стверджувати, що програмне забезпечення GeoGebra позитивно впливає на досягнення учнів, зокрема, самі ж учні зауважують, що вони можуть мислити творчо та критично, використовуючи програмне забезпечення GeoGebra [145]. Про актуальність використання GeoGebra на уроках математики також свідчать дослідження польських науковців [206]. Можливості GeoGebra допомагають докорінно змінити освітній процес в умовах дистанційного навчання, у якому учень від спостерігача переходить до ролі активного дослідника.

Таким чином, *за результатами закордонних досліджень, можна виокремити такі основні аспекти формування та розвитку логічного складника математичної компетентності учнів основної школи:*

- *використання впорядкованої системи цілей дуже важливе для побудови навчального процесу, в тому числі для процесу формування та розвитку логічної компетентності учнів;*
- *надважливим у навчанні математики є місце і роль кожної задачі, та методики її розв'язування;*
- *серед задач для формування логічної компетентності варто виділити задачі, що стосуються математичного моделювання, задачі на дослідження;*
- *ключовим для розвитку логічного мислення учнів є обґрунтування протягом усього процесу розв'язування задачі;*
- *з метою формування логічного мислення, необхідно і можливо використовувати нестандартні, зокрема за процедурою розв'язування, завдання;*
- *слід зосереджувати увагу учнів на аналізі частин означень математичних понять та правильному використанні сполучних слів, оскільки при цьому закладаються основи логічних умінь, які є важливими для розуміння математики;*

- *формування логічного мислення передбачає активне математичне спілкування, адже комунікація означає вміння використовувати математичну мову для висловлення математичних ідей та аргументів точно, стисло та логічно;*
- *можливості сучасних засобів візуалізації, мережевих ресурсів можуть допомогти докорінно змінити процес навчання математики, у якому учні від спостерігачів мають змогу перейти до ролі активних дослідників.*

1.4.4. Порівняльний аналіз українських та закордонних шкільних підручників математики щодо умов розвитку логічного мислення учнів

Результати досліджень науковців різних країн переконують, що зміст шкільних підручників є важливим чинником, що впливає на рівень знань та умінь учнів з математики (Л. Фан, Ю. Чжу, З. Мяо, Б. Дж. Рейс, Р. Е. Рейс, О Чавес, Дж. Тарр). Шкільні підручники математики також є основним ресурсом, на який опираються вчителі, проектуючи власну методичну та математичну діяльність при поясненні нового навчального матеріалу (А. Е. Бітон, І. В. Мулліс, М. О. Мартін, Е. Дж. Гонсалес, Д. Л. Келлі, Т. А. Сміт, М. М. Капраро).

Згідно ключових засад написання підручників, їхній зміст має відповідати навчальним програмам та відображати програмні вимоги до навчання. Підручники математики спеціально розробляються для учнів, традиційно використовуються на уроках, тому мають значний вплив на ефективність процесу навчання математики (Johansson). Зазначаючи, що підручники математики є важливим чинником, який впливає на досягнення учнів з математики, окремі дослідники стверджують, що ґрунтовний аналіз змісту та якості шкільних підручників може стати важливим аргументом пояснення різного рівня досягнень учнів у навчанні математики (Б. Дж. Рейс,

Р. Е. Рейс, О Чавес, Л. Фан, Ю. Чжу) [231, 241]. Розглядаючи підручники як важливий засіб, від якого значно залежать можливості ефективно навчати математики, науковці активізували нині дослідження, які пов'язані із порівняльним аналізом підручників математики в різних країнах.

Наш аналіз відповідних публікацій дозволяє стверджувати, що, в основному, дослідження підручників математики зосереджені на аналізі змісту, обсягу тем та кількості завдань, присвячених кожній темі [167; 184; 203; 245]. Менша увага приділяється методичному аналізу функцій завдань, запропонованих у підручниках [167; 184]. Ми погоджуємося з тими дослідниками [169; 217; 218; 219; 237], які змісту та методиці розв'язування завдань підручників математики відводять центральну роль. Завдання задач у підручниках з математики не тільки привернути увагу учнів до конкретних аспектів навчального матеріалу, але й сприяти розвитку мислення учнів. Державні стандарти математичної освіти (Національна рада вчителів математики [217]) свідчать, що можливості навчання учнів математики встановлюються за рівнем та видом мислення, яке у них розвинуто. Таким чином, окрім загального контент-аналізу підручників математики, важливим напрямом в освітніх дослідженнях має бути окремий якісний аналіз систем задач шкільних підручників.

Розглянемо ґрунтовніше окремі публікації, що стосуються дослідження взаємозв'язків між системами задач шкільних підручників математики та умовами формування математичних компетентностей учнів.

Американські дослідники Й. В Стиглер, К. Ц Фусон, М. Хем та М. С. Кім [240] порівнювали завдання в американських та радянських підручниках початкової школи та прийшли до висновку, що радянські підручники були більш збалансовані різними типами завдань порівняно з американськими підручниками. На думку дослідників, радянські підручники зосереджували увагу на складніших завданнях, які вимагали декілька дій, тоді як американські підручники зосереджували увагу на більш простих завданнях.

Китайський дослідник Ю. Лі [203] порівнював завдання в американських та китайських підручниках для 7 класу, які спрямовувалися на формування вмінь учнів виконувати дії з цілими числами. Результати досліджень показали, що переважна більшість завдань у підручниках вказаних країн вимагали однокрокових дій і мали суто математичний зміст. Крім того, завдання в американських підручниках були більш різноманітними у вимогах у порівнянні із завданнями китайських підручників математики. У дослідженні Лі передбачив можливі зв'язки між очікуваннями математичних умінь учнів та їх фактичною математичною продуктивністю.

Ще в одному дослідженні китайські вчені Ю. Чжу і Л. Фен [254] розглянули різні типи завдань, які були представлені в китайських і американських підручниках математики на початковому етапі середньої освіти. Результати показали, що більшість завдань у підручниках обох країн були традиційними та простими для розв'язування. Однак, у китайських підручниках більше уваги зосереджено, порівняно з американськими підручниками, на практичних завданнях та задачах, що передбачають практичне застосування набутих знань та умінь. Крім того, в китайських підручниках математики більше уваги було приділено багатокроковим завданням, тоді як в американських підручниках більше уваги приділено завданням у візуальній формі (наприклад, графіки, таблиці чи діаграми).

Ю. П. Хін [249] проаналізував розподіл завдань за різними типами в американських та китайських підручниках математики та їх вплив на формування в учнів різних методів та способів розв'язування завдань. Результати дослідження показали, що китайські підручники математики надавали учням більш збалансовані можливості для розв'язування різноманітних завдань. В американських підручниках математики, на думку китайського вченого, порівняно менш збалансоване представлення різних математичних завдань. Ю. П. Хін [249] прослідковував зв'язок між розподілом завдань у підручниках математики та формуванням умінь учнів

розв'язувати типові задачі. Серед отриманих висновків: незбалансоване представлення завдань може впливати на формування здатності учнів розв'язувати певні типи завдань краще, ніж інші.

У багатьох наукових публікаціях обґрунтовується, що математика і логіка тісно пов'язані, саме на уроках математики створюються найбільш оптимальні умови для формування і розвитку логічного мислення учнів. Логічне мислення може проявлятися сформованою здатністю учня грамотно виконувати логічні операції в процесі розв'язування математичних завдань; здатністю доведення або спростовування тверджень; здатністю правильно та обґрунтовано розв'язувати завдання з логічним навантаженням тощо. Вивчення математики в школі, з одного боку, передбачає певний рівень розвитку логічних умінь, з іншого боку, має завдання формувати та розвивати логічне мислення. Вважаємо доцільним здійснити порівняльний аналіз шкільних підручників математики різних країн щодо сприятливих умов для формування та розвитку логічного мислення учнів.

Для нашого дослідження були обрані підручники математики України, Молдови, Польщі та Румунії, які використовуються на останньому етапі навчання в базовій школі. Оскільки період навчання у базовій школі в обраних країнах різний, об'єктом нашого дослідження стали підручники наступних класів:

Україна	9 клас
Молдова	9 клас
Польща	8 клас
Румунія	8 клас

У всіх вказаних країнах на вивчення математики виділено по 4 години на тиждень, проте лише в Україні здійснено поділ навчання математики в умовах двох різних навчальних предметів: алгебра та геометрія.

Коротко схарактеризуємо зміст навчального матеріалу у вказаних підручниках.

Алгебраїчний матеріал у досліджуваних підручниках приблизно однаковий, проте в Польщі та Румунії більше уваги приділяється вивченню теми «Функція». Завдання, які розглядаються під час вивчення даних тем, передбачають виконання не лише математичних операцій, а й здійснення порівняння, аналізу, узагальнення, класифікації тощо.

У 9 класі в Україні передбачено вивчення лише квадратичної функції, а у Польщі, Румунії та Молдові одночасно вивчають лінійну та квадратичну функції, у Молдові включено ще функцію $y = x^3$. У Польщі значну увагу приділяють вивченню властивостей функцій та роботі з їх графіками. Завдання у підручниках передбачають визначення властивостей функцій з графіка, розуміння співвідношення між рівнянням функції та її графіком тощо. У Румунії до теми «Функції» належать початки теорії ймовірностей, статистика. У Польщі статистика вивчається на початку навчального року, а комбінаторика – в кінці навчального року окремими темами, у Молдові згаданий матеріал не вивчається у 9 класі, а в Україні вивчається тема «Основи комбінаторики, теорії ймовірності та статистики».

Вважаємо, що згаданий матеріал сприяє розвитку логічного мислення учнів, оскільки завдання з даних тем сприяють умінням встановлювати логічні зв'язки, узагальнювати інформацію тощо.

Числові послідовності передбачені лише в українських підручниках, в інших країнах ця тема вивчається в інших класах. Вважаємо, що числові послідовності (алгебраїчна та геометрична прогресії) менше впливають на формування логічного мислення, оскільки завдання передбачають обчислення членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, що потребує в більшій мірі математичних знань з теми, а не логічних операцій.

Вивченню рівнянь, нерівностей та їх систем більше уваги приділяється в українських та молдовських підручниках. У Молдові вивчаються

одночасно рівняння / нерівності першого і другого степеня, які виділено в дві теми і які займають 1/3 усього матеріалу з алгебри, у той час в Україні на цей матеріал видаляється всього 1/5 виділеного часу, у Польщі вивчаються лише рівняння та їх системи, а в Румунії – лише нерівності першого степеня та квадратні рівняння.

Зауважуємо, що існують суттєві відмінності у матеріалі з геометрії, який вивчається в останньому класі базової школи. Лише в Україні у 9 класі вивчаються координати на площині, вектори на площині, теореми косинусів і синусів, переміщення і його властивості, поворот та паралельне перенесення. Симетрія відносно точки і прямої вивчається в Україні та Польщі, а в Румунії – симетрія відносно точки, прямої та площини.

У чотирьох країнах вивчаються многокутники та їх властивості, довжина кола, довжина дуги кола, площа круга та його частин, формули для обчислення площі многокутників. У Молдові знаходження площ многокутників виділено в окрему тему. У Польщі у досліджуваному класі вивчається теорема Фалеса, подібні фігури та їх властивості.

В Україні матеріал з геометрії у 9 класі не включає відомостей з стереометрії, у той час в Польщі у 8 класі та в Молдові у 9 класі стереометрія становить 1/2 матеріалу. У польських, румунських та молдовських підручниках містяться завдання на знаходження площі поверхні та об'єму призми, піраміди, циліндра, конуса та кулі, що сприяє розвитку просторової уяви, умінню будувати графічну модель задачі та виявляти усі об'єкти у формулюванні задачі і знаходити геометричні й аналітичні відповідники.

У румунських підручниках матеріал з планіметрії та стереометрії вивчається одночасно. Наприклад, вивчається паралельність і перпендикулярність вивчається на площині і одразу в просторі. Під час вивчення паралельних площин одразу вивчаються зрізані піраміда та конус, що сприяє розумінню учнями зв'язків між темами, паралельності в повсякденному житті та властивостей зрізаної піраміди та конуса. Вивчаючи перпендикулярність, спочатку учні знайомляться з перпендикулярністю на

площині, а пізніше – у просторі. Під час вивчення перпендикулярності учні також вивчають всеможливі перпендикулярні прямі, серед яких висота піраміди, конуса, прямої призми, прямокутного паралелепіпеда, циліндра та зрізаної піраміди / конуса, діагональні та осьові перерізи в досліджуваних тілах. В курсі математики 8 класу вивчається проектування точок, сегментів та прямих на площину; кут між прямою і площиною; двогранний кут, плоский кут, що відповідає двогранному; кут між площинами; перпендикулярні площини. Після теореми про три перпендикуляри вивчається знаходження відстані від точки до прямої, відстані від точки до площини та відстані між двома паралельними площинами.

Завдання у підручниках також відрізняються. В українських підручниках основний акцент здійснено на завдання, які потребують математичних знань, завдання передбачають, у більшості випадків, обчислення. Вважаємо, що найкраще сприяють формуванню логічної складової математичної компетентності задачі на доведення та дослідження. В українських підручниках задачі на доведення становлять не більше 10% задач з усіх задач, які пропонуються учням до кожної теми, а задачі на дослідження не є у всіх темах. У румунських підручниках кількість задач на дослідження переважає кількість задач на доведення у більшості випадків, що становить 30% і 20% відповідно.

Поширеними у румунських підручниках, у тому числі під час вивчення теми «Функції», є завдання, які передбачають аналіз умови на знаходження суперечностей. Наступне завдання є таким зразком, у ньому передбачено не лише аналіз умови на знаходження помилки, а я й подальшу роботу на дослідження.

Дано функцію $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{5-x}$. Це правильна умова? виправте помилку, якщо необхідно, дослідіть властивості функції та побудуйте її графік.

Польські підручники зосереджують увагу на завдання прикладного характеру. Учням у кожній темі пропонуються завдання, в яких відображено практичне застосування матеріалу, який вивчається.

Наприклад. Транспортна компанія пропонує Томеку наступний преїскурант послуг: фіксована оплата в розмірі 5 злотих та 1,80 злотих за кожний на кілометр. Задайте функцію, за якою можна знайти вартість поїздки Томека (y) в залежності від пройдених кілометрів (x).

Що стосується завдань з логічним навантаженням, то вони становлять: задачі на доведення – 15%, задачі на дослідження 19%). Проте, якщо задачі в українських підручниках передбачають частіше роботу з заданими функціями, то завдання у польських підручниках передбачають знаходження формул функції.

До таких задач належать, наприклад:

Задача 1. Множиною значень квадратичної функції g є інтервал $(-\infty, 5]$, розв'язком нерівності $g(x) > 0$ є інтервал $(2; 8)$. Визначте формулу функції g .

Задача 2. Одним з нулів квадратичної функції $f(x)$ є число 5, максимальний інтервал, на якому ця функція спадає, $[2, +\infty)$. Найбільше значення функції $f(x)$ на інтервалі $[-8; -7]$ дорівнює - 24. Визначте формулу функції $f(x)$ та побудуйте її графік.

Молдовські та румунські підручники мають подібну структуру завдань у підручниках, що є причиною використання румунської системи освіти упродовж великого проміжку часу, проте кількість задач на доведення та дослідження значно менша, ніж у румунських підручниках. Тут переважають задачі, типові українським підручникам, на знаходження нулів, побудову графіків функції та знаходження проміжків зростання / спадання функції тощо.

У підручниках України, Польщі, Румунії та Молдови знаходимо задачі наступного типу:

Задача. Дана функція $f(x) = x^3 - 3x$ для $x \in (1, +\infty)$. Доведіть, на основі визначення, монотонність цієї функції в інтервалі $(1, +\infty)$.

Задача. Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

Розв'язування таких задач на доведення розвиває просторову уяву, сприяє усвідомленому розумінню навчального матеріалу, засвоєнню евристичних прийомів розумової діяльності, формуванню умінь аналізувати, узагальнювати, обґрунтовувати судження, стисло і чітко висловлювати думку.

Що стосується геометричного матеріалу, то проаналізувавши задачі у підручниках отримали наступні результати: в українських підручниках задачі на доведення та дослідження становлять 31 %, у польських – 38%, а найбільший відсоток задач на доведення та дослідження у молдовських (48 %) та румунських (57 %) підручника, які пропонуються до тем.

Враховуючи відмінності у навчальних програмах з математики у досліджуваних країнах, наступна діаграма подає відсоткове співвідношення задач на доведення та дослідження у підручниках.

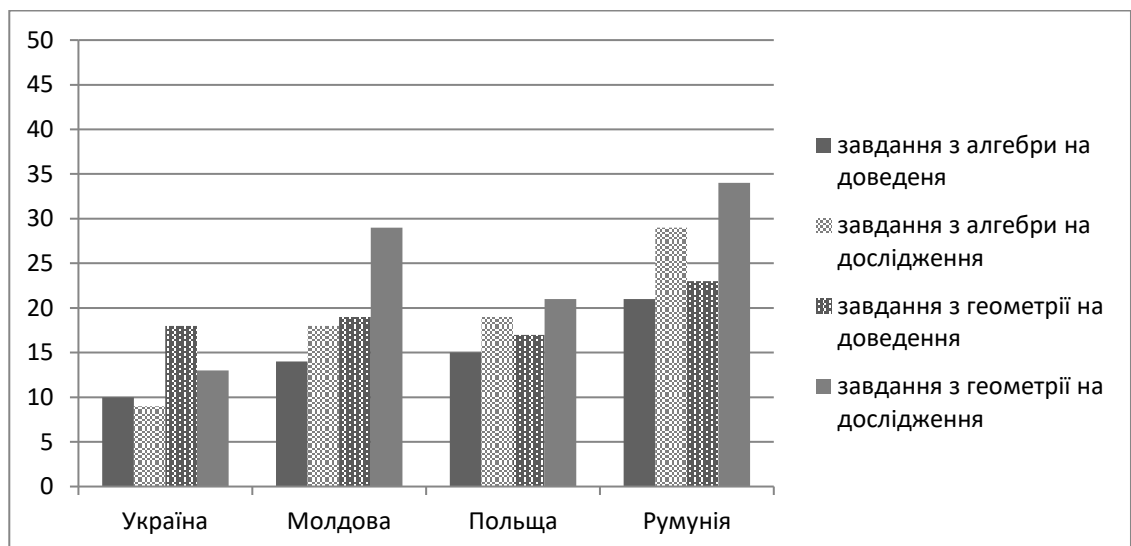


Рис. 1.4. Відсоткове співвідношення задач на доведення та дослідження у проаналізованих підручниках

Таким чином, вважаємо, що найкращі умови для формування логічної складової математичної компетентності створюють румунські підручники, оскільки найбільший відсоток задач на доведення та дослідження, як з алгебри так і з геометрії, міститься саме у них.

Нами проаналізовано завдання підручників з математики останнього класу базової школи в Україні, Молдові, Польщі та Румунії у контексті формування логічного мислення. Було встановлено, що всі чотири серії підручників містять завдання, які сприяють формуванню логічного мислення, проте найбільше завдань такого характеру містять румунські підручники. Теми в українських підручниках акцентують увагу в більшій мірі на математичних знаннях, а не логічних умінь. Геометричний матеріал, представлений у підручниках суттєво відрізняється, українські підручники передбачають лише планіметрію, тоді як в інших країнах вивчаються початки стереометрії, а в Румунії вивчається планіметрія і стереометрія одночасно.

Відсутність певних типів завдань у підручниках викликає труднощі у їх розв'язуванні (М. С. Райлі, Дж. Г. Гріно та Дж. Хеллер [188]). А відсутність або невелика кількість завдань, які потребують лише базових математичних знань негативно впливає на формування логічного мислення у процесі навчання математики. Навчальні програми з математики (підручники) повинні надавати учням можливості для розв'язування всіх видів завдань (Р. А. Чендлер, J. Свелер, Р. Тірні, М. Купер [160]). У «Принципах та стандартах шкільної математики» [220] зазначено, що учні повинні розв'язувати всі типи завдання під час вивчення математики. Крім того, результати цього дослідження показали, що румунські учні мають більше досвіду у розвитку просторової уяви та логічного мислення, тоді як в українських учнів, ймовірно, краще розвинуті математичні здібності. В цілому, результати показали інший шаблон щодо розподілу завдань та матеріалу у підручниках України, Молдови, Польщі та Румунії.

Наше дослідження також підштовхує до висновку, що у підручниках Румунії та Польщі надано учням порівняно більше можливостей формувати:

уміння узагальнювати, класифікувати та встановлювати логічні зв'язки між поняттями, виявляти усі об'єкти у формулюванні задачі і знаходити геометричні й аналітичні відповідники, будувати аналітичну чи графічну модель задачі; *здатність* узагальнювати та критично опрацьовувати інформацію; накопичувати і виокремлювати знання, необхідні для вирішення конкретних завдань; виявляти властивості понять та встановлювати зв'язки між поняттями та їх властивостями.

Наш огляд публікацій та порівняльний аналіз окремих підручників математики дозволяє виокремити низку ключових положень: неспроможність учнів виконувати певні типи завдань може бути пов'язана з відсутністю достатнього досвіду розв'язування таких завдань [249]; завдання в підручниках мають відображати прикладний аспект математичних знань, а не закріплювати матеріал лише в математичному контексті [141]; недостатній досвід учнів у розв'язуванні практико-орієнтованих завдань може призвести до труднощів у вивченні математики [185]. До таких результатів також варто віднести наступні твердження: збільшення частки завдань з візуалізацією може сприяти кращому розумінню математичного матеріалу учнями [156; 249; 253]; недостатнє використання завдань відкритого типу може призвести до труднощів під час розв'язування завдань, які вимагають умінь логічно мислити [156]; надання учням можливостей для набуття досвіду розв'язування завдань відкритого типу сприяє розвитку їх дивергентного мислення [200].

Вказані висновки досліджень показують, що *системи задач шкільних підручників математики мають задовольняти низку вимог, з поміж яких практична зорієнтованість, різноманітність типів завдань, забезпечення умов набуття достатнього досвіду в розв'язуванні типових задач тощо. Вказані вимоги спрямовані також на забезпечення необхідних умов формування логічної компетентності учнів.*

Висновки до розділу 1

Основною метою шкільної освіти, згідно з Концепцією нової української школи, є не лише забезпечення учнів певною системою знань, а й різнобічний розвиток особистості, здатної до самовдосконалення та самореалізації. Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей, серед компонентів якої виділяють логічне мислення. Уміння логічно мислити є спільним для всіх компетентностей, що свідчить про важливість його формування. Важливість логічних умінь, що визначають логічну компетентність учнів, викликана потребами як самого курсу математики, так і інших дисциплін. Курс математики вимагає більш розвинених логічних умінь, зокрема, правильного формулювання означень, уміння класифікувати різні об'єкти, доводити твердження, здійснювати класифікацію, знаходити логічні зв'язки тощо.

Ми під логічним складником математичної компетентності учнів розуміємо ту динамічну комбінацію їхніх здатностей, що поєднує розуміння логіки подій, логічні вміння та досвід їх використання, які необхідні для здійснення математичної та/або особистісно значущої продуктивної діяльності. Поняття «логічний складник математичної компетентності учнів», «логічна складова частина математичної компетентності учнів» та «логічна компетентність учнів» використовуються нами як синонімічні поняття. Структуру логічного складника математичної компетентності утворює єдність мотиваційно-ціннісної, когнітивної, діяльнісної та рефлексивно-оцінної компонент, в яких відображена специфіка навчання математики у школі:

- мотиваційно-ціннісна компонента - розуміння учнями необхідності формування логічної складової математичної компетентності, її значення в подальшій навчальній та у майбутній професійній діяльності;

- когнітивна компонента - фундаментальні теоретичні математичні знання, знання алгоритмів і методів розв'язання математичних задач, розуміння логічних аспектів у процесі розв'язування завдань;

- діяльнісна компонента - здатність до застосування не тільки вже відомих умінь, навичок і відповідних знань (в репродуктивній діяльності), а й засвоєння нових знань та умінь під час розв'язування логічних і прикладних задач; вміння раціоналізувати свою діяльність у виборі способів і засобів розв'язування завдань з логічним аспектом;

- рефлексивно-оцінна компонента - здатність критично оцінювати і коригувати власну діяльність при розв'язуванні задач з явно вираженим логічним складником.

Аналіз українських та *закордонних* психолого-педагогічних досліджень та практики організації навчання математики в школі дозволяють виокремити такі основні аспекти формування та розвитку логічного складника математичної компетентності учнів основної школи:

- важливими є місце і роль кожної задачі, та методики її розв'язування;
- ключовим для розвитку логічного мислення учнів є обґрунтування протягом усього процесу розв'язування задачі;
- з метою формування логічного мислення учнів, необхідно і можливо використовувати спеціальні нестандартні завдання;
- формування логічного мислення передбачає активну розумову діяльність учнів, спеціально організовану вчителем.

Логічна складова частина математичної компетентності учнів основної школи є важливим елементом математичної підготовки учнів, забезпечує володіння комплексом елементарних логічних понять і дій, що становлять абетку логічного мислення і необхідний базис для його розвитку.

Основні результати першого розділу дисертації відображено у роботах автора [12]; [9]; [11]; [8]; [10]; [82]; [81]; [80]; [83]; [84].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 1

1. Акуленко І. А. Система диференційованих вправ з логічним навантаженням як засіб розвитку логічного мислення учнів 5 - 6 класів при вивченні математики : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ, 2000. 19 с.
2. Акуленко І. А., Максименко І. А. Навчання учнів доведень теорем (погляд учителів). *Вісник Черкаського університету. Серія : Педагогічні науки*. Вип. 13-14. Черкаси, 2017. С. 6-14.
3. Акуленко І.А., Сердюк З.О., Розпутній О.С. Взаємодія учня й учителя з інтерактивними освітніми сервісами у навчанні математики в 5-6 класах. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. Випуск 1(15). 2020. С. 126-133.
4. Акуленко І. Вправи з логічним навантаженням на уроках математики в 5-6 класах. *Математика в школі*. Випуск 5. 2002. С. 35-38.
5. Аллагулова И. Н. Формирование математической компетентности старшеклассника в образовательном процессе : дис. ... канд. пед. наук. Оренбург, 2007. 190 с.
6. Андреев О. О., Бугайчук К. Л., Каліненко Н. О., Колгатін О. Г., Кухаренко В. М., Люлькун Н. А., Ляхоцька Л. Л., Сиротенко Н. Г., Твердохлебова Н. Є. Педагогічні аспекти відкритого дистанційного навчання. ХНАДУ, Харків: «Міськдрук», 2013. 212 с.
7. Ачкан В. В. Формування математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ, 2009. 20 с.
8. Бачинська Р. С. Логічна складова математичної компетентності учнів базової школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 30 травня – 1 червня 2018 р. – С. 194 – 196.

9. Бачинська Р. С. Математична компетентність учнів: ключова чи предметна?. *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017)*, м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р, С. 48 – 49.
10. Бачинська Р. С. Проблемне навчання як технологія формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасна освіта в контексті нової української школи: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю*, м. Чернівці, 11 -12 жовтня 2018 р. С. 38 – 41.
11. Бачинська Р. С. Сучасні проблеми впровадження компетентнісного підходу у навчанні учнів математики. *Матеріали V Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень»*, м. Вінниця, 21-22 листопада 2017 р. С. 238– 240.
12. Бачинська Р. С. Аналіз вітчизняної теорії та практики формування математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. пр. 2017. Випуск 49.* С. 12 – 15.
13. Бевз В. Г., Годованюк Т. Л. Технологія розвитку критичного мислення у методичній підготовці майбутніх учителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*. 2019. Вип. 1. С. 29-38.
14. Бедлінський О. І. Формування мисленнєвої стратегії аналогізування в учнів 6-8 класів у процесі навчання фізичної географії: автореф. дис... псих. пед. наук: 19.00.07. Київ, 2008. 22 с.
15. Белкіна-Ковальчук О. В. Формування критичного мислення учнів початкових класів у процесі навчання : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.09/ Волинський держ. педагогічний ун-т ім. Лесі Українки. Луцьк, 2006. 215 с.

16. Бельчев П. В. Розвиток логічного мислення учнів основної школи у процесі навчання фізики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Запоріж. обл. ін-т післядиплом. пед. освіти. Запоріжжя, 2004. 210 с.
17. Бібік Н. М. Компетентнісний підхід: рефлексивний аналіз застосування. *Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи*: бібліотека з освітньої політики / за ред О. В. Овчарук. Київ : «К.І.С.», 2004. С. 47–52.
18. Богатирьова І. М. Методика розробки й упровадження системи розвивальних завдань у навчанні математики учнів 5-6 класів : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Черкаси, 2009. 227 с.
19. Бондар С. П. Термінологічний аналіз понять “компетенція” і “компетентність” у педагогіці: сутність та структура. *Освіта і управління*. 2007. Т. 10. № 2. С. 93–99.
20. Вакалюк Т. А. Підготовка майбутніх учителів інформатики до розвитку логічного мислення старшокласників: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 2013. 24 с.
21. Варецька О. В. «Компетенція» та «компетентність» як ключові поняття сучасної освіти. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. II(12). Issue 25. 2014. С. 28-35.
22. Варламова Т. П. Формирование логической компетентности у учащихся 5–6 классов в процессе обучения математике: дис. ... канд. пед. наук. Красноярск, 2006. 195 с.
23. Векслер С. І. Розвиток критичного мислення учнів у процесі навчання. Київ : Рад. школа, 1971. 60 с.
24. Великий тлумачний словник сучасної української мови : 250000 / уклад. та голов. ред. В. Т. Бусел. Київ; Ірпінь: Перун. 2005. VIII, 1728 с.
25. Видра О. Г. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2011. 112 с.

26. Віхрова В. О., Білоусова Г. М. Навчання розв'язуванню логічних задач на уроках математики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі : зб. наук. праць.* Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. Вип. 1. С. 61-65.
27. Віхрова О. В., Денисенко Є. В. Розвиток логічного мислення учнів 5-6 класів учнів у процесі навчання математики. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики.* Збірник наукових праць. Випуск VII: В 3-х томах. Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2008. Т.1: Теорія та методика навчання математики. С. 349-352.
28. Власова Т. А. Развитие критического мышления на уроках истории в старших классах. *История и обществознание в школе.* 2005. № 3. С. 44–48.
29. Воєвода А. Л., Струк С.М. Застосування методу проєктів у процесі навчання алгебри і початків аналізу. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* 2014. №. 38. С. 213-217.
30. Волчаста М. М. Наступність у вивченні геометричного матеріалу в початковій та основній школі: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ, 2003. 20 с.
31. Вукіна Н. В., Дементієвська Н. П., Сущенко І. М. Критичне мислення: як цьому навчати : [наук.-метод. посіб.] / за наук. ред. О. І. Пометун. Харків, 2007. 190 с.
32. Глузман Н. А. Критерії, показники та рівні професійної математичної компетентності вчителів початкових класів з навчальної. *Вісник Луганського національного університету ім. Т. Шевченка.* Вип.5 (168). Луганськ: Вид-во Луганського національного університету ім. Т. Шевченка. 2009. С. 57-65.

33. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. *Вища освіта України*. 2008. № 3. С. 23-30.
34. Голодюк Л. С. Теоретико-методичні основи комплексної організації навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи в навчанні математики дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02. Черкаси, 2018. 652 с.
35. Голодюк Л. С. Формування культури мислення учнів у процесі організації навчально-пізнавальної діяльності під час навчання математики в основній школі. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. Черкаси: Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, 2017. Випуск 9. С. 78–88.
36. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. К. : Либідь, 1997. 376 с.
37. Гончарова І. В. Методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Черкаси, 2009. 24 с.
38. Гриценко В. И., Кудрявцева С. П., Колос В. В., Веренич Е. В. Дистанционное обучение: теория и практика : монографія. Київ: Наукова думка, 2004. 376 с.
39. Губанова М.И. Функциональная грамотность младших школьников: проблемы и перспективы формирования. *Начальная школа плюс до и после*. 2009. № 12. С.1–4.
40. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении. Москва: Просвещение, 2000. 284 с.
41. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> .
42. Державний стандарт початкової загальної освіти. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-%D0%BF#Text> .
43. Додаток до листа МОН України від 17.08.2016 1/9-437 «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у

- загальноосвітніх навчальних закладах». URL: <http://old.mon.gov.ua/ua/about-ministry/normative/6119->.
44. Дубініна К. Психологічні особливості розвитку молодшого школяра. *Вісник Інституту розвитку дитини*. № 6. Київ, 2009.
 45. Екімова М. А. Развитие логического мышления учащихся 5-7 классов посредством обучения решению задач с геометрическим содержанием. автореф. дис. ... канд. пед. наук. Новосибирск, 2002. 18 с.
 46. Енциклопедія освіти / голов. ред. В.Г. Кремень. Київ:Юрінком Інтер, 2008. 1040 с.
 47. Жалдак, М. І. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів. 3-тє вид. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. 315 с.
 48. Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии : учеб. пособие для студентов психол. специальностей и направлений / под ред. Л. Ф. Обуховой, Г. В. Бурменской. М. : Гардарики, 2001. 622 с
 49. Заболоцька О. С. Компетентнісний підхід як освітня інновація: порівняльний аналіз. *Вісник Житомирського державного університету*. Серія: Педагогічні науки. Випуск 40. 2008. С. 63–68.
 50. Заболоцька О. С. Реалізація компетентнісного підходу у вітчизняній освіті. *Вісник Житомирського державного університету*. Серія: Педагогічні науки. Випуск 43. 2009. С. 58–63.
 51. Загальна психологія. / за загальною редакцією академіка С. Д. Максименка. Підручник. 2-ге вид., переробл. і доп. Вінниця: Нова Книга, 2004. 704 с.
 52. Зайцева Л. І. Формування елементарної математичної компетентності в дітей старшого дошкільного віку : автореф. дис. ... канд. пед. наук – Київ, 2005. 20 с.
 53. Закон України «Про освіту». URL: <https://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>.

54. Зимняя И. А. Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании. Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. URL: http://old.vvsu.ru/dap /development_program/files/zimnyaya.pdf.
55. Зимняя И. А. Педагогическая психология : учебник по педагогической психологии. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. 384 с.
56. Зінченко О. В. Аналіз наукових поглядів на розвиток поняттєвого мислення підлітків. *Технології розвитку інтелекту*. № 5. К., 2014. URL: https://psytir.org.ua/upload/journals/5/authors/2014/Zynchenko_Oleksandr_Volodymyrovych_Analiz_naukovyh_poglyadiv_na_rozvytok_ponyattevo_go_myslennja_pidlitkiv.pdf.
57. Іванюта О. В. Особливості розвитку мислення підлітків. *Наука і освіта*. №2-3. Одеса: ПНЦ АПН України, 2001. С. 67-69.
58. Калмыкова З. И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. М. : Педагогика, 1981. 200 с.
59. Катеринюк Г. Д. Розвиток математичних компетентностей учнів у процесі формування здатності до математичного моделювання. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. Випуск 47. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. С. 63-67.
60. Кашуб'як І. О. Застосування методів розвитку критичного мислення у процесі роботи над сюжетними задачами. *Актуальні проблеми педагогічної освіти: європейський і національний вимір* : матеріали IV Всеукр. наук.-практич. конференції з міжнародною участю (28-29 травня 2019 р.). Луцьк : ПП Іванюк В. П., 2019. С. 104–107.
61. Кашуб'як І. О. Розвиток критичного мислення учнів початкової школи у процесі навчання математики. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Східноєвропейський національний університет імені Лесі

- Українки, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Луцьк, 2019. 269 с.
62. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник / за ред. О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. К. : Педагогічна думка, 2015. 245 с.
 63. Концепція нової української школи. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. Документ ухвалений рішенням колегії МОН 27/10/2016 URL: <https://www.kmu.gov.ua/storage/app/media/reforms/ukrainska-shkolacompressed.pdf>.
 64. Кутыина Е. В. Влияние решения задач разными способами на развитие логического мышления учащихся начальной школы. Москва: Сфера, 2004. 134 с.
 65. Лебедев О. Е. Компетентностный подход в образовании. Школьные технологии. №5. 2004. С. 3–12.
 66. Левченко Л. О. Розвиток самостійності учнів через впровадження методу проектів на уроках математики. Наукові записки. Серія: *Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*. Т. 2. 2017. №. 10.
 67. Листопад Н. Логічний складник математичної компетентності молодшого школяра: сутнісна характеристика та шляхи його формування. *Початкова школа*. № 11. 2013. С. 13-16.
 68. Лов'янова І. В., Приходько Г. О. Роль задач у формуванні логічного мислення учнів на уроках математики. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*. Збірник наукових праць. Випуск VII: В 3-х томах. Т.1: Теорія та методика навчання математики. Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2008. С. 352–357.
 69. Лозовецька В. Т. Професійна компетентність. Енциклопедія освіти. Київ : Юрінком Інтер, 2008. С. 180.

70. Луговий В. І. Компетентності та компетенції: поняттєвотермінологічний дискурс. *Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології*. К., 2009. С. 8-13.
71. Лякішева А. В., Вітюк В. В., Кашуб'як І. О. Ретроспективний огляд поняття «критичне мислення». *Педагогічні інновації: ідеї, реалії, перспективи*: зб. наук. праць / В. М. Мадзігон (голов. ред.) та ін. Київ: Інститут обдарованої дитини НАПН України. 2019. Вип. 1(22). С. 29–37.
72. Марченко О. В. Формування культури мислення старшокласників засобами дослідницької діяльності: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.09. Київ, 2007. 22 с.
73. Математика. 5–9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (автори М. І. Бурда, Б. В. Кудренко, О. Я. Білянїна, А. І. Азаренкова, О. І. Буковська, Т. С. Кіндюх, О. Є. Лисенко, А. В. Милянїк, Н. В. Панова, А. В. Паньков), 2017. URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalniprogramy.html>.
74. Матяш О. І. Розвиток просторової уяви учнів засобами комп'ютерних технологій у профільній школі. Вінниця. 2013. 44 с.
75. Матяш О. І., Дьогтева І. О. Інтерактивні технології в процесі формування знань та умінь учнів з геометрії. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Випуск 12. Київ-Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2006. С. 59-62.
76. Матяш О. І. До питання вивчення елементів логіки в шкільному курсі математики. *Сучасний стан і перспективи шкільних курсів математики та інформатики у зв'язку з реформуванням у галузі освіти* : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., 14-16 листопада 2000 р. Дрогобич, 2000. С. 34–36.

77. Мисліцька Н. А. Формування культури логічного мислення як важливий компонент методичної підготовки майбутнього учителя. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. Серія : Педагогічна. 2013. Вип. 19. С. 26-28.
78. Михайленко Л. Ф., Ковальчук М. Б. Розв'язування текстових задач як засіб формування математичної компетентності старшокласників. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Випуск 46. Київ ; Вінниця : Планер, 2016. С .37-41
79. Михайленко Л.Ф. Критерії та показники методичної компетентності майбутнього вчителя математики у процесі розвитку логічного мислення учнів. *Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету*. Серія: Педагогічні науки. Кропивницький, 2020. Випуск 191. С. 120-123. DOI: 10.36550/2425-7988-2020-28-191.
80. Мілян Р. С. Geogebra як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2019. С. 138 – 140.
81. Мілян Р. С. Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (95), Issue: 239, 2020 Nov. P. 33 – 37.
82. Мілян Р. С. Порівняльний аналіз дефініцій «критичне мислення» та «логічне мислення». *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. 2019. Випуск 54. С. 121 – 125.

83. Мілян Р. С. Формування логічного складника математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Тернопіль, 12–13 листопада, 2020). С. 136 – 139.
84. Мілян Р. С. Віртуальні дошки як інструмент формування математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Тези доповідей Дистанційної Всеукраїнської наукової конференції з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань»*, 15–16 квітня 2021 р., Київ, Україна [електронне видання]. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. С. 111 – 113.
85. Моторіна В. Г., Комір Н. В. Метод проектів як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики профільної школи : навч.-метод. посіб. Харків : ХНПУ, 2017. 97 с.
86. Музика Ю. О. Підготовка майбутніх учителів до формування логічного мислення молодших школярів : дис. ... канд. пед. наук. Одеса, 2009. 268 с.
87. Муштавинская И. В. Технология развития критического мышления на уроке и в системе подготовки учителя : учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург : КАРО, 2009. 144 с.
88. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 / кол. авт.: М. Мазорчук (осн. автор), Т. Вакуленко, В. Терещенко, Г. Бичко, К. Шумова, С. Раков, В. Горох та ін. Український центр оцінювання якості освіти. Київ : УЦОЯО, 2019. 439 с.
89. Нові підходи до викладання математики в умовах реформування вітчизняної освіти: методичний лист / Укл. Е. К. Рогожинська. Миколаїв: ОІППО, 2016. 80 с.

90. Овчарук. О. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні: рекомендації з освітньої політики. К.: «К.І.С.», 2003.
91. Онопрієнко О. Предметна математична компетентність як дидактична категорія. *Початкова школа*. № 11. 2010. С.46–50.
92. Онопрієнко О. Компетентнісно зорієнтовані задачі як засіб формування математичної компетентності учнів. *Початкова школа*. № 3. 2013. С. 23-26.
93. Офіційні звіти про проведення ЗНО. URL: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>.
94. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Москва : Международная педагогическая академия, 1984. 680 с.
95. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-метод. посібн. К.: Видавництво А.С.К., 2004 192 с.
96. Пометун О. І. Теорія та практика послідовної реалізації компетентісного підходу в досвіді зарубіжних країн. *Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи*: Бібліотека з освітньої політики. К. : «К.І.С.», 2004. С. 16–25.
97. Про затвердження Положення про дистанційне навчання: Наказ від 25.04.2013 р. № 466. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13#Text>.
98. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Х. : Факт, 2005. 360 с.
99. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. *Математика в школі*. №5. 2007. С. 2-7.

100. Романишина Л. М., Хмеляр І. М., Лукащук М. М. Формування ключових компетентностей майбутніх фахівців у процесі навчання в медичному коледжі. *Наукові записки Тернопільського нац. пед. ун-ту ім. В. Гнатюка*. Серія: Педагогіка. № 2. Тернопіль, 2011. С. 71–78.
101. Сафонова І. Я. Формування математичної компетентності у старшокласників. *Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології*. Вип. 2. 2013. С. 397-402.
102. Сафонова І. Я. Формування предметної компетентності в учнів старшої школи у процесі вивчення предметів фізико-математичного циклу: дис... канд. пед. наук. Херсон, 2015. 253 с.
103. Сверчевська І. А. Методична система вивчення геометричних тіл у загальноосвітній школі : дис... канд. пед. наук. Київ, 2006. 325 с.
104. Селевко Г. К. *Енциклопедія освітніх технологій*: в 2 т. Т. 1. М.: НІИ шкільних технологій, 2006. С. 21.
105. Сільвейстр А. М. Розвиток логічного мислення в учнів основної школи на уроках фізики. Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах: зб. наук. пр. / [редкол.: А.В. Сущенко (голов. ред.) та ін.]. Запоріжжя: КПУ, 2020. Вип. 73. Т. 1. С. 144-149. DOI: <https://doi.org/10.32840/1992-5786.2020.73-1.27>.
106. Скорик Ю. М. Критичне мислення педагога як освітня технологія. *Вісник Черкаського університету*. Серія «Педагогічні науки». 2016. Вип. 2. С. 120–124.
107. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.
108. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підручник. 2-е вид., доп. і перероб. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
109. Словник іншомовних слів / уклад.: С. М. Морозов, Л. М. Шкарапута. К.: Наукова думка, 2000. 680 с.

- 110.Смалько О. А. Розвиток творчого мислення старшокласників на уроках математики з використанням інформаційних технологій навчання : автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2003.
- 111.Смирнова-Трибульська Є. М. Теоретико-методичні основи формування інформатичних компетентностей вчителів природничих дисциплін у галузі дистанційного навчання: автореф. дис. д-ра пед. наук. Національний Педагогічний Університет ім. М.П.Драгоманова. Київ, 2008. 44 с.
- 112.Тарасенкова Н. А., Бурда М. І. Методологічні засади розробки системи засобів навчання математики. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2017»* : матеріали II Міжнар. дистан. наук.-метод. конференції, березень 2017 р., м. Суми : у 2 ч. Суми , 2017. Ч. 1. С. 52–54.
- 113.Тарасенкова Н. А. Компетентнісні засади забезпечення наступності навчання математики в різних ланках освіти. *Реалізація наступності в математичній освіті : реалії та перспективи* : Зб. наук. праць за матер. Всеукр. наук.-практ. конф., м. Одеса, 15–16 верес. 2016 р. Харків : Вид-во «Ранок», 2016. С. 108–110.
- 114.Тарасенкова Н. А., Оладенко Ю. С. Особливості застосування інтерактивних технологій на уроках математики базової школи. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. 2020. Випуск 1(15). С. 150-158.
- 115.Тарасенкова Н., Кірман В. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Наука-вчителю*. 2008. С. 3–9.
- 116.Терлецька Л. Г. Критичне мислення як засіб розвитку вмінь учнів аналізувати і застосовувати інформацію. Мат. міжн. наук.- практик. конфер. *«Розвиток навичок критичного мислення учнів у контексті розробки стандартів освіти України»*. Київ, 2001. С. 64–67.

117. Терно С. Критичне мислення: чергова мода чи нагальна потреба? Історія в школах України. 2007. № 4. С. 13–15.
118. Терно С. О. Методика розвитку критичного мислення старшокласників у процесі навчання історії : дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. Київ, 2015. 400 с.
119. Терно С. Світ критичного мислення: образ та мімікрія. Історія в сучасній школі. 2012. № 7–8. С. 27–39.
120. Тесленко І. Ф. Педагогічні основи викладання геометрії в середній школі: дис. ... д-ра пед. наук. Київ, 1969. Т. 1 (294 с.); Т. 2 (596 с.).
121. Ткаченко О. М., Кожевнікова І. М., Шатохіна Л. П.. Формування компетентностей на уроках математики. *Математика в школах України*. № 6 (414). 2014. иС. 2-3.
122. Трубачева С. Е. Умови реалізації компетентісного підходу в навчальному процесі. *Компетентісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи*: Бібліотека з освітньої політики. Київ: «К.І.С.», 2004. С. 53–58.
123. Трубачова С.Е. Умови реалізації компетентісного підходу в навчальному процесі. *Компетентісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи*. К.: „К.І.С.”, 2004. С.53-56.
124. Федоренко О. І. Формування логічних умінь учнів основної школи: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ, 1999. 22 с.
125. Фрідман Л. М. Кулагина И. Ю. Психологический справочник учителя. М. : Просвещение, 1991с. 288 с.
126. Химинець В. Компетентісний підхід до професійного розвитку вчителя. Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти. URL: <http://zakinppo.org.ua/2010-01-18-13-44-15/233-2010-08-25-07-10-49>.
127. Хміль Н. Застосування інтерактивних методів навчання при проведенні виховних заходів з інформатики. *Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету імені*

- Володимира Винниченка*. Серія : Педагогічні науки. Вип. 121(1). 2013. С. 162-166.
128. Хом'юк В. В. Математична компетентність майбутнього інженера: аналіз феномену. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. № 3 (37). 2014. С.211-217.
129. Хом'юк В. В. Структурна модель формування математичної компетентності майбутніх інженерів. *Науковий вісник Кременецької обласної гуманітарно-педагогічної академії ім. Тараса Шевченка*. Серія : Педагогіка. 2015. Вип. 5. С. 160-168.
130. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностноориентированной парадигмы образования. Ученик в общеобразовательной школе. М. : ИОСО РАО, 2002. С. 135–157.
131. Цибух Л. М. Розвиток і корекція мисленнєвих операцій у дітей різного віку та статі : автореф. дис. канд. психол. наук. Одеса, 2000. 20 с.
132. Чаплак Я. В., Резник В. Д., Марчук М. В., Солійчук І. І. Визначення поняття критичного мислення у науковій психології. URL : <http://yanchaplak.com/ua/sotsialno-psykholohichnyi-vplyv/6-krytychnemyslennia-u-psykholohii.html> (дата звернення: 28.08.2015).
133. Чернега Н. Розвиток логічного мислення учнів основної школи в процесі вивчення предметів природничо-математичного циклу: автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.09. Харків, 2005. 20 с.
134. Чумак В. В. Вікова психологія : навч. посібн. Бердянськ : Видавець Ткачук О. В., 2015 192 с.
135. Шилова Л. І. Формування логічної культури учнів основної школи. автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.09. Київ, 2009. 23 с.
136. Шнайдер Л. І., Назаренко С. Г. Розвиток логічного мислення учнів. *Математика в школах України*. 2008. № 14-15. С. 2–10.
137. Шолом Г. І. Розвиток критичного мислення старшокласників у процесі навчання інформатики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 /

- Інститут інформатики національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Київ, 2013. 297 с.
138. Юнчик В. Модель змішаного навчання математики з використанням системи GeoGebra. Гуманітарний відділ ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» - Додаток 1 до Вип. 36, Том IV (64) : Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». К.: Гнозис, 2015. С. 559-568.
139. Ящук О. М. Підготовка майбутніх учителів до формування логічних умінь в учнів початкової школи. дис. ... канд. пед. наук. Умань, 2018. С. 308.
140. Akhsanul I. A Logical Thinking Analysis through the Euclidean Geometry. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 1. 2016. P. 1069-1075.
141. Alajmi A. H. How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2). 2012. P. 239–261.
142. Al-Azawi R., Al-Faliti F., Al-Blushi M. Educational Gamification Vs. Game Based Learning: Comparative Study. *International Journal of Innovation, Management and Technology*, Vol. 7, No. 4, August 2016. P. 132-136.
143. Altman D. G. Practical statistics for medical research. London: Chapman & Hall. 1991.
144. American Association for the Advancement of Science. Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks-based evaluation. Washington DC: AAAS. 2002.
145. Arbain N., Shukor N. A. The effects of GeoGebra on Schoolchildren achievement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. 2015. P. 208-214.
146. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 2003. P. 215–241.

147. Ayele M. Mathematics teachers' perceptions on enhancing students' creativity in mathematics. *IEJME Mathematics Education*. Vol. 11(10). 2016. P. 3521-3536.
148. Bachynska R. Criteria and indicators of pupils' logical competence formation. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale: Materialele Conferintei Stiintifice Internationale*, Chisinau, Moldova, 9-10 Noiembrie 2017. P. 250 – 252.
149. Ball D. L. Bass. H. Making mathematics reasonable in school. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics). 2003. P. 27–44.
150. Beaton A. E., Mullis I. V. Martin M. O., Gonzalez E. J., Kelly D. L., Smith T. A. Mathematics achievement in the middle school years: *IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)*. Boston, MA: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College. 1996.
151. Bishop. Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 11 (1). 1989. P. 7-16.
152. Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., Niss, M. Modelling and Applications in Mathematics Education. *The 14 th ICMI Study. New ICMI Study Series* Vol. 10. New York, NY: Springer. 2007
153. Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W., & Niss, M. (Eds.). (2006) Applications and Modelling in Mathematics Education. *New ICMI Studies Series* no. 10, New York: Springer.
154. Bonnie M. Hodge. Logical Thinking in Mathematics: From Oz to Awe! Source: *Research and Teaching in Developmental Education*, Spring 2003, Vol. 19, No. 2 (Spring 2003), pp. 41-46 Published by: New York College Learning Skills Association. URL: <http://www.jstor.com/stable/42802166>
155. Brenner M. E., Mayer R. E., Moseley B., Brar T., Durán R., Smith-Reed B., Webb D. Learning by understanding: The role of multiple

- representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 1997. P. 663–689.
156. Cai J. A cognitive analysis of U.S. and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving, and complex problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 7. 1995. P. 1–160.
157. Cai J., Cirillo M. What do we know about reasoning and proving? Opportunities and missing opportunities from curriculum analyses. *International Journal of Educational Research*, 64. 2014. P. 132-140.
158. Cai J., Wang N., Moyer J. C., Nie B. Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project. *International Journal of Educational Research*, 50(2). 2011. P. 117–136.
159. Cai J. Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving of process- constrained and process-open problems. *Mathematical thinking and Learning*, 2(4). 2000. P. 309–340.
160. Chandler P. A., Sweller, J., Tierney P., Cooper, M. Cognitive load as a factor in the structuring of technical material. *Journal of Experimental Psychology: General* Vol. 119 (2), 1990. P. 176-192.
161. Charalambous C. Y., Delaney S., Hsu H.-Y., Mesa V. A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2). 2010. P. 117–151.
162. Chen H. R., Jian C. H., Lin W. S., Yang P. C., Chang H. Y. Design of digital game-based learning in elementary school mathematics. In Proc. 2014 7th International Conference on UbiMedia Computing and Workshops. 2014. P. 322–325.
163. Choi K. M., Park H. J. A comparative analysis of geometry education on curriculum standards, textbook structure, and textbook items between the U.S. and Korea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 9(4). 2013. P. 379–391.

164. Corey D.L., Ninomiya H. Values of the Japanese Mathematics Teacher Community. In: Clarkson P., Seah W., Pang J. (eds) *Values and Valuing in Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. 2019.
165. Cragg L, Gilmore C. Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in Neuroscience and Education*. 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tine.2013.12.001>.
166. De Lange J. Mathematics, insight and meaning. Doctoral thesis. Utrecht, the Netherlands: OW & OC. 1987.
167. Delil H. An analysis of geometry problems in 6-8 grades Turkish mathematics textbooks (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, Ankara. 2006.
168. Ding M., Li X. A comparative analysis of the distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(12). 2010. P. 146–180.
169. Doyle W. Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2). 1988. P. 167–180.
170. Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educ Stud Math* 102, 435–456 (2019).
171. Dufour-Janvier B., Berdnarz N., Belanger M. Pedagogical considerations concerning the Problem of representation. In C. Janvier (Eds.), *Problems of representations in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1987. P. 109–122.
172. Dwyer M. T. Tablet Usage in Secondary Mathematics Education and Recommendations for Improving Its Effectiveness in the Classroom. Honors Theses. 4. 2016
173. Facer K. Computer games and learning. *Screen*. Vol. 6. 2006. P. 35.
174. Fahlberg-Stojanovska L., Stojanovski V. GeoGebra - Freedom to explore and learn. *Teaching Mathematics and Its Applications*. 28, 2009. P. 69-76.

175. Fan L. Applications of arithmetic in US and Chinese textbooks: A comparative study, In G. Kaiser, E. Luna & I. Huntley (Eds.), *Studies in mathematics education series: II. International comparisons in mathematics education*. London: Falmer Press. 1999. P. 151–162
176. Fan L., Chen J., Zhu Y., Oiu X., Hu Q. Textbook use within and beyond Chinese classrooms: A study of 12 secondary schools in Kunming and Fuzhou of China. In F. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics*. Singapore: World Scientific. 2004. P. 228–261.
177. Fan L., Zhu Y. Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator*, 5(1/2). 2000. P. 117–141.
178. Fan L., Zhu Y., Miao Z. Textbooks research in mathematics education: Development, status and direction. *ZDM*, 45. 2013. P. 633–646.
179. Forgues H, L., Tian J., Siegler R. S. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review Science Direct*. 2016. P. 38-201.
180. Galligan L., Loch B., McDonald C., Taylor J. A. The use of tablet and related technologies in mathematics teaching. *Australian Senior Mathematics Journal*. 24(1). 2010. P. 38- 51.
181. Garofalo J., Lester F. K. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3). 1985. P. 163–176.
182. Griffin N., Lewis A. C. Bertrand Russell's Mathematical Education. *Notes and Records of the Royal Society of London*, vol. 44, no. 1, 1990. P. 51–71.
183. Griffiths M. The educational benefits of videogames. *Education and Health*, vol. 20, no. 3, 2002. P. 47–51.
184. Grishchenko S. A comparative analysis of word problems in selected United States and Russian first grade textbooks. University of California, Santa Barbara. 2009.
185. Gu L., Huang R., Marton F. Teaching with Variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li

- (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific. 2004. P. 309–345.
186. Hall J., Chamblee G. Teaching algebra and geometry with GeoGebra: Preparing pre-service teachers for middle grades/secondary mathematics classrooms. *Computers in the Schools*, 30(1-2). 2013. P. 12-29.
187. Haylock D., Cockburn A. *Understanding mathematics for young children*. London: Sage. 2008.
188. Heller J., Riley M., Greeno J. *Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York. 1983. P.47.
189. Hensberry K. R., Jacobbe T. The effects of Polya's heuristic and diary writing on children's problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 24(1). 2012. P. 59–85.
190. Hiebert J., Grouws D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 1). Charlotte, NC: Information Age Publishing. 2007. P. 371–404
191. Hohenwarter M., Jones K., BSRLM Geometry Working Group. Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27 (3), 2007. P. 126-131.
192. Hong D. S., Choi K. M. A comparison of Korean and American secondary school textbooks: The case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2). 2014. P. 241–263.
193. Husén T. (Ed.). *International study of achievement in mathematics: A comparison of twelve countries* (Vol. 2). New York: John Wiley & Sons. 1967.

194. Kaiser, G., Blomhøj, M., Sriraman, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didactik der Mathematik*. Vol. 38(2). 2006. P. 82–85.
195. Kapa E. A metacognitive support during the process of problem solving in a computerized environment. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 47(3). 2001. P. 317–336.
196. Kaur B., Lam T. Reasoning, Communication and Connections in Mathematics (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2012.
197. Kay R., Kletschin I. Evaluating the use of problem-based video podcasts to teach mathematics in higher education. *Computers & Education*, Volume 59, Issue 2. 2012. P.619-627.
198. Kirillov A. V., Vinichenko M. V., Melnichuk A. V., Melnichuk Y. A., Vinogradova M. V. Improvement in the Learning Environment through Gamification of the Educational Process. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 11(7). 2016. P. 2071-2085.
199. Kolovou A., van den Heuvel-Panhuizen M., Bakker A. Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks: A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8(2). 2009. P. 31–68.
200. Kwon O. N., Park J. S., Park J. H. Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1). 2006. P. 51–61.
201. Lappan S., Fey J. T., Fitzgerald W., Friel S., Phillips E. D. A guild to the connected mathematics curriculum: Getting to know connected mathematics. Palo Alto, CA: Dale Seymour. 1996.
202. Leung K. S. F. In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1). 2001. P. 35–51.
203. Li Y. A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2). 2000. P. 234–241.

204. Loomes M., Shafarenko A., Loomes M. Teaching mathematical explanation through audiographic technology. *Computers & Education*. Volume 38, Issues 1–3, 2002. P. 137-149.
205. Luzón J. M., Letón E., Use of animated text to improve the learning of basic mathematics. *Computers & Education*. Volume 88. 2015. P. 119-128.
206. Majerek D. Application of Geogebra for Teaching Mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal*. Vol. 8, No. 24. 2014. P. 51–54.
207. Mason J., Burton L., Stacey K. Thinking mathematically. Wokingham: Addison-Wesley. 1982.
208. Mayer R. E., Sims V., Tajika H. A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal*, 32(2). 1995. P. 443–460.
209. Mayer R. Multimedia Learning, Cambridge University Press, ISBN 0-52178-749-1, New York, United States of America. 2001.
210. Mayer R. The Cambridge handbook of Multimedia Learning, Cambridge University Press, ISBN 0-521-54751-2, New York, United States of America. 2005.
211. Menker H., Yohannes G., Bhatti A. H., Hasan R.. Impact of multimedia in Teaching Mathematics. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*. Volume 39. 2016. P. 80-83.
212. Merta Dhewa Kusuma, Undang Rosidin, Abdurrahman , Agus Suyatna. The Development of Higher Order Thinking Skill (Hots) Instrument Assessment In *Physics Study IOSR Journal of Research & Method in Education (IOSR-JRME)* e-ISSN: 2320–7388,p-ISSN: 2320–737X Volume 7, Issue 1. Ver. V (Jan. - Feb. 2017). P. 26-32
213. Milian R. Pupils` mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX (99), Issue: 252, 2021 May. P. 21 – 25.

214. Milovanovi M., Takaci D., Milajic A. Multimedia Approach in Teaching Mathematics – Example of Lesson about the Definite Integral Application for Determining an Area. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Volume 42. Issue 2. 2011. P. 175-187.
215. Ministry of Education in Singapore. Mathematics syllabus lower secondary, Singapore: Curriculum Planning and Development Division, Ministry of Education. 2001.
216. Moursund D. Introduction to using games in education: A guide for teachers and parents. 6. P. 1–155. 2006. URL: <https://scholarsbank.uoregon.edu/xmlui/handle/1794/3177>.
217. National Council of Teachers of Mathematics. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. 2000.
218. National Council of Teachers of Mathematics. Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: NCTM. 1991.
219. National Research Council. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press. 2001.
220. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Principles and Standards for School Mathematics. The Council, Reston, VA. 2000
221. Nillsen R. Does Mathematical Study Develop Logical Thinking? Testing the Theory of Formal Discipline. *Gazette of the Australian Mathematical Society*, 44 (3) 2017. P. 163-165.
222. Niss M., Jensen T. H. Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, nr. 18, Undervisningsministeriet (Ministry of Education), 2002. P. 1-334.
223. Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A., & Carraher, J. N. The Contribution of Logical Reasoning to the Learning of Mathematics in Primary School. *British Journal of Developmental Psychology*. Vol. 25. 2007. P. 147–166.

224. Nunokawa K. Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 24(3-4). 2005. P. 325–340.
225. Organization for Economic Co-operation & Development (OECD). PISA 2012 results: What students know and can do: Student performance in mathematics, reading and science (Vol. I). Paris: OECD. 2013.
226. Özer E., Sezer R. A comparative analysis of questions in American, Singaporean, and Turkish mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14 (1). 2014. P. 411–421.
227. Pantziara M., Gagatsis A., Elia I. Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 72. 2009. P. 39-60. DOI: 10.1007/s10649-009-9181-5.
228. Perkins D. *Archimedes' bathtub: The art of breakthrough thinking*. New York, NY: W.W. Norton and Company. 2000. P. 288.
229. Pólya G. *How to solve it*. New Jersey: Princeton University Press. URL: <https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/PolyaHowToSolveIt.pdf>.
230. Poon K. K., Leung C. K. A study of geometric understanding via logical reasoning in Hong Kong *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (IJMT)*. Vol. 17(3). 2016. URL: <https://eric.ed.gov/?id=EJ1120085>.
231. Reys B. J., Reys R. E., Chavez O. Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*. Vol. 61(5). 2004. P. 61–66.
232. Rias M. R., Zaman B. H. Different visualization types in multimedia learning: a comparative study. *Proceeding of the second international conference on Visual informatics: sustaining research and innovations*. Volume Part II, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 2011. P. 408-418.
233. Rivette K., Grant Y., Ludema H., Rickard A. *Connected mathematics project: Research and evaluation summary*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 2003.

234. Sezen N., Bülbül Ali. A scale on logical thinking abilities. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. Vol. 15. 2011. P. 2476–2480.
235. Singer F., Voica C. Problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1). 2013. P. 9–26.
236. Sovičová M. Development of Logical Thinking and Reasoning Skills through Isolated Problems in Mathematics Education. URL: <https://konferencie.ukf.sk/index.php/phdconf/phdconf2012/paper/view/990>.
237. Stanic G., Kilpatrick J. Historical perspective on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. 1988. P. 1–22.
238. Stein M. K., Smith M. S. The influence of curriculum on students' learning. In B. J. Reys, R. E., Reys, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. 2010. P. 351–362.
239. Stein M. K., Smith M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4). 1998. P. 268–275.
240. Stigler J. W., Fuson K. C., Ham M., Kim M. S. An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 3(3). 1986. P. 153–171.
241. Sun Y., Kulm G., Capraro M. M. Middle grade teachers' use of textbooks and their classroom instruction. *Journal of Mathematics Education*, 2(2). 2009. P. 20–37.
242. Szabo Attila, Andrews Paul. Examining the interaction of mathematical abilities and mathematical memory: A study of problem-solving activity of high-achieving Swedish upper secondary students. *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 14 : No. 1 , Article 10. 2017. URL: <http://scholarworks.umt.edu/tme/vol14/iss1/10>.

243. Tajudin N. M., Chinnappan. M. Relationship between scientific reasoning skills and mathematics achievement among malaysian student. *Geografia online. TM Malaysian Journal of Society*. 2016. P.46-96.
244. Tarr J., Reys R., Reys B., Chavez O., Shih J., Osterlind S. The impact of middle grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39. 2008. P. 247–280.
245. Törnros J. Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*. Vol. 31(4). 2005. P. 315–327.
246. Tuna Abdulkadir, Biber Abdullah Çağrı, İncikapı Lütfi. An Analysis of Mathematics Teacher Candidates Logical Thinking Level: Case of Turkey. *Journal of Education and Instructional Studies in The World* 3(1), 2013. P. 83-91
247. Ulicsak M. Games in education: Serious games. A Future Lab Literature Review. 2010. P. 139.
248. Vacca R., Bromley M., Leyrer J., Sprung M., Homer B. *Designing Games for Emotional Health*, 2014.
249. Xin Y. P. Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *Journal of Educational Research*, 100(6). 2007. P. 347–359.
250. Yang D. C., Reys R. E., Wu L. L. Comparing how fractions were developed in textbooks used by the 5th- and 6th-graders in Singapore, Taiwan, and the U.S.A. *School Science and Mathematics*, 110(3). 2010. P. 118–127.
251. Zacharopoulos G., Sella F., Kadosh R. C. The impact of a lack of mathematical education on brain development and future attainment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118 (24) e2013155118. 2021. DOI: 10.1073/pnas.2013155118.

- 252.Zanten M., Heuvel-Panhuizen M. Freedom of design: The multiple faces of subtraction in Dutch primary school textbooks. In Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education*. Heidelberg: Springer. 2014. P. 231–259.
- 253.Zhu Y., Fan L. An analysis of the representation of problem types in Chinese and US mathematics textbooks. Paper accepted for ICME-10 Discussion Group 14, 4-11 July: Copenhagen, Denmark. 2004.
- 254.Zhu Y., Fan L. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4). 2006. P. 609–626.

РОЗДІЛ 2.

ПОЕТАПНА МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО СКЛАДНИКА ПРЕДМЕТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

2.1. Загальна характеристика авторської методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

Державні потреби в певному рівні математичної підготовки в загальноосвітній школі та соціокультурні пріоритети шкільної математичної освіти зазвичай декларуються в цілях навчання математики. Цілі завжди віддзеркалюють переважаючі в суспільстві уявлення щодо «місця і ролі» математики в системі національних освітніх цінностей, її зв'язків з іншими напрямками інтелектуальної і практичної діяльності людини. За будь-яких умов цілі завжди впливають на визначення методологічної бази і змісту предмету, зумовлюють вибір методів викладання учбового матеріалу, форми організації предметної діяльності. На визначення цілей навчання математики впливають прагматичні, економічні, ідеологічні настанови суспільства. Від того, який із цих чинників домінує в суспільній свідомості в той чи інший історичний проміжок часу, залежить орієнтація цілей навчання, визначення освітніх орієнтирів. Відповідно до цього відбувається трансформація цілей навчання математики, варіюються результати навчання математики в школі, змінюється ставлення до математики як навчального предмету в системі загальної середньої освіти.

Для формулювання цілей формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи потрібно виходити з тих умов, за яких вони будуть жити в майбутньому. Визначаючи цілі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи, потрібно враховувати вимоги до обов'язкових результатів навчання

здобувачів освіти з математичної освітньої галузі, як потрібно співвідносити вимоги інформаційно розвиненого суспільства з цілями математичної підготовки учнів, який методологічний інструментарій потрібно застосовувати, щоб сприяти ефективному формуванню логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи тощо.

Метою математичної освітньої галузі згідно з Державним стандартом базової середньої освіти є формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями через розкриття розумових здібностей учнів, розвиток їх знань, умінь і способів дій, наукового світогляду і культури мислення для успішної діяльності впродовж життя.

До обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти з математичної освітньої галузі ставляться вимоги, які потребують сформованості логічного складника математичної компетентності учнів базової школи. Вимогам до обов'язкових результатів навчання можна поставити у відповідність компоненти логічного складника математичної компетентності учнів, що відображено у додатках А та Б.

Цілі формування логічного складника математичної компетентності учнів мають ієрархічну структуру, яку можна співвіднести з рівнями сформованості логічного складника математичної компетентності.

Початковий рівень. Усі цілі на цьому рівні передбачають відтворення. Тут досить познайомити учнів з відповідною інформацією так, щоб вони змогли її відтворити. Здатність підсумовувати запропоновану інформацію та передати її своїми словами підтверджує, що учні її засвоїли (відбулося запам'ятовування інформації та її переробка – усвідомлення).

Діяльність на початковому рівні: перераховувати, визначати, розповідати, з'ясовувати, показувати, характеризувати, збирати, перевіряти, формувати у вигляді таблиць, підсумовувати, описувати, роз'яснювати, протиставляти, провіщати результати, асоціювати (порівнювати), визначати, оцінювати, розрізняти, обговорювати, розповсюджувати.

Середній рівень. На цьому рівні цілі формулюються в термінах застосування отриманих знань у новій ситуації (наприклад, при розв'язуванні нестандартних задач).

Діяльність на середньому рівні: застосувати, демонструвати, рахувати, виконувати, ілюструвати, показувати, вирішувати, перевіряти, змінювати, визначати зв'язок (співвідносити), змінюватися, класифікувати, досліджувати, відкривати.

Достатній рівень. Досягши цілей цього рівня, учні здатні розділити вивчений матеріал на окремі складові, ефективно комбінувати засвоєні знання, формувати з них нові конструкції.

Діяльність на достатньому рівні: аналізувати, відокремлювати, упорядковувати, пояснювати, з'єднувати, класифікувати, розділяти, порівнювати, відібрати, пояснювати, робити висновки, поєднувати, інтегрувати, видозмінити, замінити, планувати, створювати, проектувати, винаходити (вигадувати), передбачати (що якщо?), складати (компонувати), формулювати, узагальнювати.

Високий рівень. Це найвищий рівень, на якому учні демонструють відношення, роблять змістовні оцінювальні судження щодо вивченого матеріалу, щодо нових даних, які відносяться до вивченої області.

Діяльність на високому рівні: оцінювати, вирішувати, класифікувати, сортувати, контролювати, рекомендувати, переконувати (запевняти), відбирати (підбирати), судити (оцінювати), пояснювати, виділяти (розпізнавати), підтримувати, порівнювати (співставляти), резюмувати (підсумовувати).

Методика формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи передбачає відбір ефективних засобів навчання. Н. А. Тарасенкова акцентує увагу на вербальних та невербальних засобах, що придатні для використання у процесі навчання математики в 5-9 класах.

До вербальних засобів науковець відносить: об'єктні тексти (означення понять, формулювання чи описи математичних фактів і способів діяльності); термінологія шкільного курсу математики; символіка (буквено-цифрова, символіка теорії множин і математичної логіки); змістово-аналітичні інтерпретації математичних понять, фактів і способів діяльності (виразів, рівнянь, нерівностей тощо); навчальні тексти, в яких подано зміст курсу математики; тексти задач тощо.

У групі невербальних засобів розрізняє: зображення геометричних фігур, графічні та змістово-графічні інтерпретації інших математичних понять, фактів і способів діяльності; таблиці, діаграми, схеми, схематичні графіки як засоби структурованого відображення сутності; змістові, візуальні, змістово-візуальні акценти; реальні предмети, що використовуються у функції замінників, а також макети й конструкції, які за наявності модельних ситуацій виступають у навчальному пізнанні моделями об'єктів, явищ і подій реального світу [91].

Наш науковий інтерес представляють ті засоби, які сприятимуть формуванню логічної складової частини математичної компетентності учнів.

Результатом розумової діяльності учнів на уроках математики мають бути доказові міркування, в основі яких лежить логіка. Логічний складник математичної компетентності учнів полягає в розумінні, запам'ятовуванні і самостійному виведенні загальних висновків за правилами, які не суперечать правилам формальної логіки. Оскільки основним видом діяльності учнів на уроках математики є розв'язування задач, тому саме в процесі такої діяльності створюються оптимальні умови для формування логічного складника математичної компетентності учнів.

В психолого-педагогічній літературі немає єдиного трактування поняття «задача». Здебільшого задачу розуміють як будь-яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати або довести що-небудь. Психологія розглядає задачу як мету, задану в певних умовах, як особливу характеристику діяльності суб'єкта.

У контексті нашого дослідження, задача це об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу практичного перетворення або відповіді на запитання за допомогою пошуку умов, що дозволяють розкрити відношення між відомими і невідомими її елементами, тобто отримати певний результат.

Проблемі створення ефективних систем задач як засобів підвищення ефективності навчання математики приділяли увагу українські методисти. Це, зокрема, Г. П. Бевз, О. П. Вашуленко, О. І. Матяш, Н. А. Сяська, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швець та ін. Існує два основних підходи за якими математичну задачу розглядають як ціль вивчення математики (Г. П. Бевз, З. І. Слєпкань, А. А. Столяр та інші) та як засіб вивчення математики (В. А. Гусєв, А. З. Криговська, О. І. Матяш, Ф. Ф. Нагибін, Г. І. Саранцев, С. О. Скворцова, Л. М. Фрідман, В. О. Швець та інші).

Розв'язування задач ми вважаємо одним із основних засобів формування та розвитку логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики. Кожна задача певним чином створює проблемну ситуацію, на розв'язування якої мають бути спрямовані пізнавальні можливості й діяльність учнів.

Зазвичай розрізняють чотири основні функції задач: *навчальна функція* – формування в учнів системи знань, навичок і умінь на різних етапах навчання; *розвивальна функція* – розвиток мислення школярів, формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння математизувати ситуацію тощо; *виховна функція* – формування в учнів наукового світогляду, сприяє розвитку пізнавального інтересу, позитивних рис особистості тощо; *контрольна функція* – встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом [84]. Жодна із названих функцій не може реалізовуватися ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виокремити основну функцію і прагнути насамперед її реалізації. При

компетентнісному підході до навчання математики акцент переноситься на логіку розв'язування задачі.

На нашу думку, *методично грамотне розв'язування кожного типу задач має позитивний вплив на формування логічного складника математичної компетентності учнів, проте ми виділяємо задачі на доведення та дослідження, які найкраще формують логічну складову частину математичної компетентності учнів.*

Спеціально побудований вчителем процес розв'язування задач на доведення має значні можливості для розвитку логічного складника математичної компетентності учнів, сприяє усвідомленому розумінню учнями змісту навчального матеріалу. Такі задачі сприяють засвоєнню евристичних прийомів розумової діяльності, формують уміння обґрунтовувати судження, стисло і чітко висловлювати думку. Засвоюючи доведення теорем на уроках математики, учні набувають здатності обґрунтовувати висновки, висувати гіпотези, знаходити і використовувати аргументи.

Основний недолік при розв'язуванні задач на доведення в школі ми вбачаємо у їх формальному розгляді, часто без усвідомлення учнями логічних зв'язків та висновків. Більшість доведень теорем учні формально вивчають за підручником, або за зразком пояснень здійснених учителем. Як наслідок, змінений рисунок чи інші буквені позначення викликають значні труднощі в учнів під час доведення цих тверджень.

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень: синтетичним, аналітичним, аналітико-синтетичним, методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральної симетрії, осьової симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії і подібності), алгебраїчним методом. Кожне доведення представляється у вигляді скінченної послідовності логічних міркувань. Довести твердження означає показати за допомогою логічних міркувань, що з істинності умови як

логічний наслідок впливає істинність вимоги, а отже і того твердження, що доводиться. На нашу думку, якщо під час розв'язування задач на доведення навчити учнів правилам-орієнтирам проведення логічних міркувань, домогтися свідомого розуміння сутності й логічної структури методів доведення тверджень, то рівень логічної компетентності учнів значно підвищиться.

Поєднати, взаємопов'язати процеси засвоєння знань, формування умінь і розвиток логічного складника математичної компетентності – розглядаємо як одне з головних завдань шкільної математичної освіти. Цього можна досягти за допомогою спеціально підібраних завдань, виконуючи які учні долатимуть труднощі, суперечності, розвиватимуть необхідні якості.

Особливе місце у процесі формування логічного складника математичної компетентності учнів займають задачі на дослідження. Задачі на дослідження, якщо вони є доступними і зрозумілими учням основної школи за постановкою завдання, надзвичайно змістовні у логічному навантаженні. Саме розв'язування задач на дослідження може спонукати до активного розвитку мислення учнів і вміння застосовувати знання на практиці. Методично грамотне розв'язування задач на дослідження сприяє формуванню вміння розв'язувати задачі з використанням дослідницьких прийомів; формуванню та розвитку просторового та логічного мислення; здатності встановлювати логічні зв'язки та закономірності.

В процесі наукових розвідок, ми прийшли до висновку, що система задач на дослідження має задовольняти такі вимоги: враховувати цілі вивчення теми, її зміст, рівні програмових вимог до підготовки учнів; сприяти виробленню умінь і навичок; реалізовувати функції задач у навчанні; забезпечувати збільшення питомої ваги самостійної навчальної діяльності учнів; включати задачі різного типу, складність яких зростає поступово.

О. І. Матяш розглядає різні підходи до методики використання задач на дослідження. Згідно одного з підходів на уроці математики потрібно використовувати усі види задач, а задачі на дослідження варто планувати на

другу половину уроку, які, враховуючи специфіку їх змісту, можуть збуджувати пізнавальну діяльність учнів. Інший підхід методики розв'язування задач на дослідження передбачає, що під час вивчення кожної теми вчитель планує окремий урок розв'язування задач на дослідження. Такий підхід сприяє розвитку дослідницьких прийомів розумової діяльності [47].

При методично грамотній організації навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроці, задачі на дослідження сприяють формуванню логічного складника математичної компетентності, оскільки не передбачають наперед заданого шаблону розв'язування. Учні повинні проаналізувати умову задачі, співставити з відомим матеріалом і відповідно до цього здійснювати певне дослідження, задане умовою задачі. Спеціально побудований вчителем процес розв'язування задач на доведення та дослідження має значні можливості для формуванню логічного складника математичної компетентності учнів. Розуміння-пояснення у математичних задачах - важлива складова всього процесу розуміння, що має мати спеціальне місце при розв'язуванні всіх видів математичних задач.

Логічні завдання, які доцільно пропонувати учням, мають сприяти як загально інтелектуальному розвитку дитини, так і більш глибокому осмисленню й закріпленню вже отриманих знань, оволодінню знаннями на якісно новому рівні. Крім того, за допомогою таких завдань можна створити умови, при яких нові питання учні розглядатимуть самостійно, а нові типи завдань не викликатимуть психологічного дискомфорту.

Якісна відмінність розуміння учнями математичних задач різних класів спостерігається на рівні всіх його складових: когнітивного, операційного, регулятивно-особистісного; пов'язана з головною вимогою задачі і проявляється впродовж всього процесу розв'язування: від етапу вивчення умови до перевірки і пояснення розв'язку. Це виражається через актуалізацію й відбір знань, через зміст гіпотез, що при цьому висуваються. Розуміння

математичних задач досягається за допомогою мисленнєвих операцій, що мають різну якісну характеристику розуміння у різних класів задач.

Авторську методику формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики ми презентуємо як таку, що має поетапний характер:

- Діагностико-прогностичний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи – два семестри навчання учнів у 5 класі.
- Мотиваційно-пізнавальний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи – три семестри навчання (I семестр 6 класу – I семестр 7 класу).
- Активно-діяльнісний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи – три семестри навчання учнів у 5 класі (II семестр 7 класу – II семестр 8 класу).
- Пошуково-творчий етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи – два семестри навчання учнів у 9 класі.

Реалізація авторської методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики значно залежать від готовності і здатності учителів математики основної школи до опанування та впровадження цієї методики.

Аналіз психолого-педагогічної літератури, результати власних досліджень дають нам можливість представити психологічну та методичну готовність учителів основної школи до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики у вигляді схеми поданої на рисунку.



Рис. 2.1. Структура фахової готовності вчителів 5-9 класів до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики

Психологічну готовність вчителя математики 5-9 класів до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики ми розглядаємо за трьома компонентами: мотиваційним, науково-теоретичним (знання) та практично-діяльним (уміння). Рівень психологічної готовності вчителя математики до впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики тим вищий, чим більше він умотивований до відповідної методичної діяльності, а також значно залежить від сформованості відповідних компетентностей вчителя (знання, уміння, переконання, досвід).

Методичну готовність вчителя математики 5-9 класів до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики ми також розглядаємо за трьома компонентами: інформаційно-змістовим, технологічним та оцінно-рефлексивним.

Під інформаційно-змістовим компонентом методичної готовності вчителя математики 5-9 класів до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики ми розуміємо здатність учителя активно поповнювати, розвивати знання про методи, прийоми та засоби формування та розвитку логічної компетентності учнів.

Під технологічним компонентом вказаної методичної готовності ми розуміємо здатність учителя ефективно діяти, методично грамотно реалізувати організаційно-педагогічні умови формування та розвитку логічної компетентності учнів.

Під оцінно-рефлексивним компонентом методичної готовності вчителя математики 5-9 класів до опанування та впровадження методики формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики ми розуміємо здатність учителя методично виважено застосувати цілісну систему моніторингу та контролю сформованості показників та рівнів логічної компетентності учнів.

2.2. Модель формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи

Ефективність формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики залежить від багатьох факторів, важливе місце серед яких займає взаємозв'язок між компонентами методики навчання математики учнів основної школи. Для глибшого розкриття взаємозв'язків між компонентами методики формування логічної складової математичної компетентності учнів використаємо моделювання, як засіб впорядкування інформації та особливу форму наочності. Моделювання в педагогічних дослідженнях є «засобом висвітлення структурних елементів і зв'язків між ними, пізнання закономірностей дидактичного процесу». Модель має відповідати наступним

вимогам: відображати ступінь цілісності процесу або явища; містити опис умов і засобів здійснення процесу; структурно будуватися.

Є. П. Віноградова [23] відзначає, що модель – це мислено уявна та матеріально реалізована система, яка відображає або відтворює об'єкт дослідження та здатна заміщувати його так, що її вивчення дає нам нові відомості про цей об'єкт. Під моделлю формування математичної компетентності Є. П. Віноградова розуміє опис та теоретичне обґрунтування структурних компонентів даного процесу, а саме: цільовий (мета, задачі), змістовий (принципи, блоки), операційний (методи, засоби, форми), результативний.

Модель формування математичної компетентності за В. П. Матвейкіною [46] має такий склад: мета, компоненти математичної компетентності, етапи формування, педагогічні умови, науково-методичне забезпечення, рівні формування математичної компетентності, критерії та рівневі показники, результат.

І. М. Разлівінських [75] створила структурно-змістовну модель формування математичної компетентності, яка містить цільовий, змістовий, операційний та результативний компоненти та характеризується інтегративністю, відтворюваністю, амбівалентністю та адаптивністю.

І. А. Байгушева [4] вважає, що формування математичної компетентності має відбуватися в три етапи: загальнорозвивальний, коли можливості формування математичної компетентності обмежені загальним розвитком студентів і треба озброїти їх базовими математичними знаннями, вміннями та навичками; орієнтовно-професійний, де стимулюється розуміння значущості умінь синтезувати знання різних областей наук, опановуються знання про математичні моделі в економіці, про математичні методи їх дослідження; загальнопрофесійний, де стимулюється усвідомлення вмінь синтезувати знання як здатність розв'язувати типові професійні задачі.

На основі глибоких теоретичних досліджень, аналізу кращої практики формування математичної компетентності учнів та власних

експериментальних досліджень з обраної проблеми нами розроблено модель формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Побудована нами модель представляє цілісний і комплексний процес та відображає єдність його структурних компонентів (блоків): цільовий блок (мета, завдання); методологічний блок (підходи, принципи); змістовий блок (традиційний зміст курсу математики основної школи, система спеціальних компетентісних задач); процесуальний блок (етапи, форми, організаційно-педагогічні умови); технологічний блок (методи, засоби, прийоми); діагностично-результативний блок (критерії, показники, рівні).

Цільовий блок. Мета полягає в розробці такої методики формування логічного складника математичної компетентності учнів, результатом якої є позитивна динаміка рівнів логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Для досягнення вищевказаної мети сформульовано такі **завдання** формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи:

- формування в учнів позитивної мотивації до формування та розвитку логічного компетентності;
- формування логічних умінь і прийомів, досвіду їх використання необхідних для підвищення рівня сформованості логічного складника математичної компетентності;
- формування умінь і навичок розв’язування спеціальних типів задач, з допомогою яких підвищуватиметься рівень сформованості логічного складника математичної компетентності.

Методологічний блок. В основу розробки моделі формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики покладено системний, компетентісний, діяльнісний та особистісно-орієнтований підходи, що відповідають специфіці розв’язуваної проблеми:

– *системний підхід* дозволяє розглядати досліджуваний процес з точки зору його структури, змісту, функцій, сукупності методів, системних зв'язків;

– *компетентнісний підхід*, на основі якого прогноуються результати навчання, що сприятимуть вищій якості логічної складової математичної компетентності учнів;

– *діяльнісний підхід* забезпечує різноманітність активних прийомів та засобів формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи в процесі навчання математики;

– *особистісно-орієнтований підхід* передбачає створення умов для формування в учнів потреби у формуванні логічної складової математичної компетентності, для її розвитку й удосконалення.

Наповнення кожного блоку моделі та їх взаємодія визначаються дією принципів, що лежать в основі педагогічних методик, що використовуються. До принципів формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи в процесі навчання математики, ми відносимо загальноприйняті принципи навчання (науковості, доступності тощо), однак увагу акцентуємо на вибірці наступних принципів:

– *принцип систематичності й послідовності*, що ґрунтується на поданні актуального матеріалу так, щоб він був внутрішньо пов'язаний між собою, утворював цілісність;

– *принцип інтегративності*, що забезпечується використанням міжпредметних зв'язків для наповнення змісту математики логічними задачами;

– *принцип активності*, що передбачає створення таких психолого-педагогічних умов, за яких учень спроможний зайняти активну особистісну позицію і найбільш повною мірою розкритися як суб'єкт навчальної діяльності;

– *принцип свідомості та самостійності*, що спрямований на формування самостійного глибокого осмислення необхідних знань,

умінь, навичок та набуття їх у процесі власної пізнавальної діяльності.

На засадах зазначених методологічних підходів та принципів ми виокремлюємо спеціальну систему завдань під час навчання математики, виконання яких сприятиме формуванню логічної складової математичної компетентності учнів.

До змістового блоку моделі формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи належать: традиційний пропедевтичний курс математики; традиційний зміст курсу алгебри основної школи; традиційний зміст курсу геометрії основної школи; запропоновані нами навчальні теми; система спеціальних задач, з явно вираженим логічним аспектом, що детально описується у наступних підрозділах цієї дисертації.

Процесуальний блок розробленої в ході дослідження моделі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи містить етапи формування логічної складової частини математичної компетентності учнів та організаційно-педагогічні умови забезпечення ефективності досліджуваного процесу.

Для цілісності й безперервності процесу формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи взаємодія вчителя математики та учнів має бути організована в єдності послідовних і взаємозумовлених етапів: діагностично-прогностичного, мотиваційно-пізнавального, активно-діяльнісного, пошуково-творчого.

Діагностико-прогностичний та мотиваційно-пізнавальний етапи формування логічного складника математичної компетентності реалізуються в молодшому підлітковому віці, а активно-діяльнісний та пошуково-творчий – в старшому підлітковому віці.

Враховуючи особливості розвитку розумових операцій учнів підліткового віку етапи формування логічного складника математичної компетентності учнів відповідають наступним часовим межам:

- діагностико-прогностичний етап: I-II семестри 5 класу;

- мотиваційно-пізнавальний етап: I, II семестри 6 класу – I семестр 7 класу;
- активно-діяльнісний етап: II семестр 7 класу – I, II семестри 8 класу;
- пошуково-творчий етап: I-II семестри 9 класу.

Діагностико-прогностичний етап реалізується упродовж двох семестрів навчання (I-II семестри 5 класу). Важливою на цьому етапі є діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів. Це дає можливість з'ясувати рівень сформованості логічних умінь учнів, здобутий під час навчання у початковій школі, прогнозувати особливості подальших етапів формування логічної компетентності та побудувати стратегію його формування, а також сприяє усвідомленню учнями логічних умінь. На цьому етапі варто використовувати подані у додатках методики (Методика «Прості аналогії», Методика «Логічні закономірності», Методика «Логічність умовиводів»).

Мотиваційно-пізнавальний етап здійснюється протягом трьох семестрів з I семестру 6 класу до I семестру 7 класу. На цьому етапі формується пізнавальний інтерес та позитивна мотивація учнів до формування та розвитку логічного складника математичної компетентності, оволодіння логічними уміннями та прийомами. На цьому етапі важливим є традиційний пропедевтичний зміст курсу математики.

Активно-діяльнісний етап реалізується у процесі навчання протягом трьох семестрів (II семестр 7 класу – II семестр 8 класу). За допомогою різноманітних методів, прийомів, організаційних форм і засобів відбувається формування логічного складника математичної компетентності учнів. Важливими на цьому етапі стають традиційний зміст курсу алгебри та геометрії основної школи, система компетентнісних задач.

На *пошуково-творчому* етапі, який охоплює I-II семестри 9 класу, відбувається творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через впровадження пошукової та дослідницької діяльності. Робота спрямована на вдосконалення всіх компонентів логічного складника математичної компетентності учнів, здійснюється психолого-педагогічна

діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. На цьому етапі варто використовувати подані у додатках методики (Методика «Складні аналогії», методика «Виявлення загальних понять», Методика «Логіко-кількісні відношення»).

На першому, діагностично-прогностичному етапі, проходить діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Це створює можливості для побудови стратегії формування логічного складника математичної компетентності учнів, а також усвідомлення ними змісту розвитку та самоосвіти.

Другий, мотиваційно-пізнавальний, етап є пропедевтичним за своїм характером. На цьому етапі формується пізнавальний інтерес та позитивна мотивація учнів до формування та розвитку логічного складника математичної компетентності, оволодіння логічними уміннями та прийомами.

На третьому активно-діяльнісному етапі за допомогою різноманітних методів, прийомів, організаційних форм і засобів відбувається формування логічного складника математичної компетентності учнів.

На четвертому пошуково-творчому етапі відбувається творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь.

Удосконалення традиційної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи ми презентуємо через реалізацію визначених нами організаційно-педагогічних умов на кожному етапі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

- удосконалення змістового наповнення та навчально-методичного забезпечення курсу математики з метою формування логічних умінь, прийомів та досвіду їх використання;
- інтенсифікація процесу формування логічної компетентності учнів засобами інтерактивних, проєктних, ігрових та інформаційно-комунікаційних технологій та технологій проблемного навчання;

- впровадження системи спеціальних завдань та задач для забезпечення позитивної динаміки сформованості логічного складника математичної компетентності.

Окреслені організаційно-педагогічні умови мають бути реалізовані на всіх етапах формування логічного складника математичної компетентності завдяки використанню різноманітних методів, організаційних форм і педагогічних засобів.

Діагностично-результативний блок моделі формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи передбачає обов'язкову перевірку рівня сформованості логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи, орієнтуючись та визначаючи певні недоліки підготовки та компоненти, формуванню яких потрібно приділяти більше уваги. Основними його складовими є показники сформованості логічної складової частини математичної компетентності учнів, критерії оцінки та визначені основні характеристики рівнів (початковий, середній, достатній, високий) сформованості логічного складника математичної компетентності (їх детальну характеристику подано у підрозділі 1.3). У моделі вказано очікуваний результат реалізації мети й завдань – позитивна динаміка сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

Отже, запропонована модель формування логічної компетентності учнів основної школи в процесі навчання математики становить систему, складовими частинами якої є блоки: цільовий, методологічний, змістовий, процесуальний, технологічний, діагностично-результативний. Ці блоки знаходяться у тісному взаємозв'язку, а характеристика кожного з них розкриває їх призначення та важливість. Методична діяльність учителя математики, реалізована за цією моделлю, спрямовується на позитивну динаміку сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики.

Модель формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи

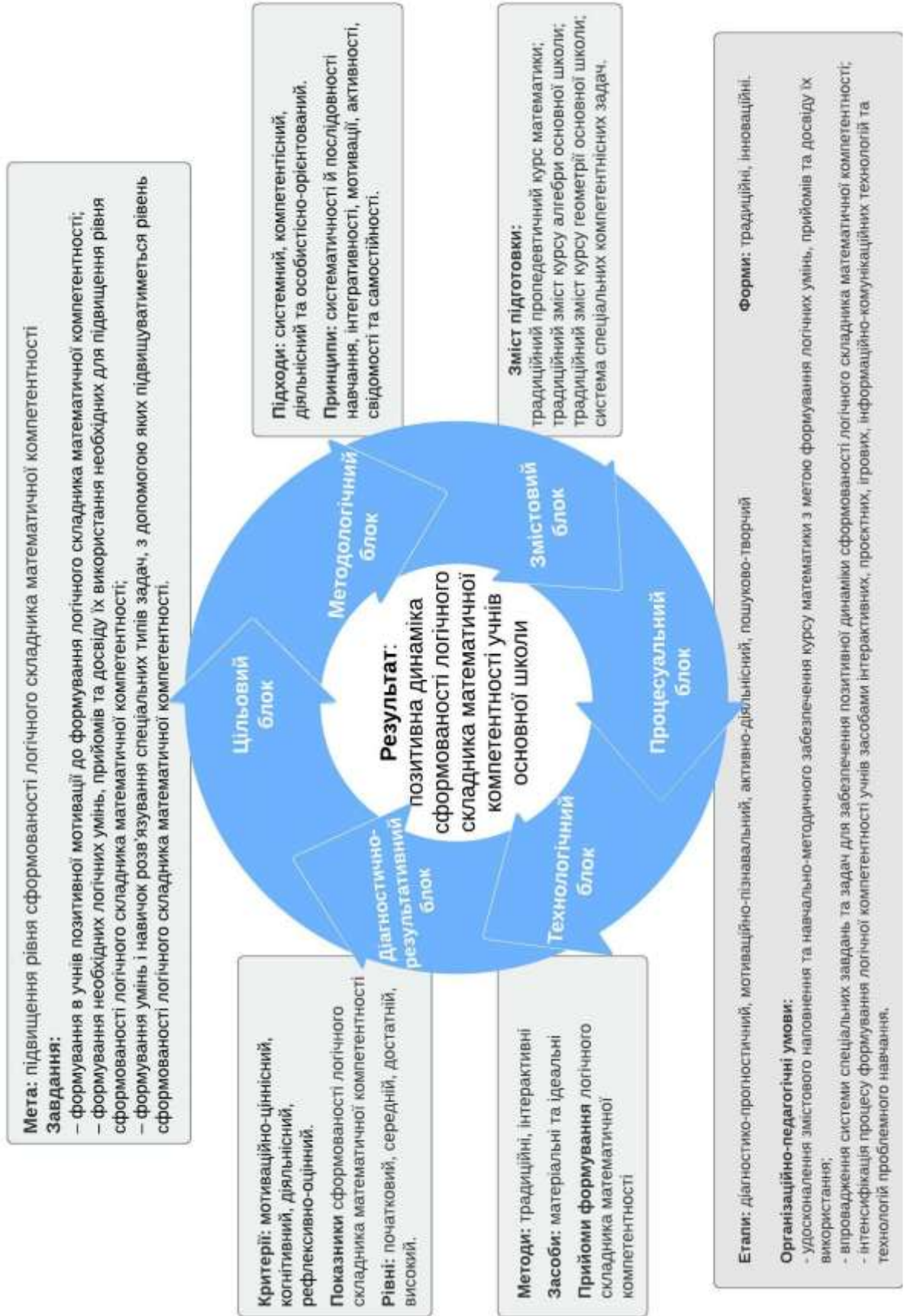


Рис. 2.2. Модель формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи

2.3. Діагностико-прогностичний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

Діагностико-прогностичний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи реалізується упродовж двох семестрів навчання (I-II семестри 5 класу). Згідно Типових навчальних планів загальноосвітніх навчальних закладів, затверджених наказом Міністерства від 03.04.2012 № 409 на вивчення математики у 5 класі відводиться 4 години на тиждень. В основу побудови змісту й організації процесу навчання математики в 5 класі покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані програмні компетентності учнів. Їх сутнісний опис подано в навчальній програмі з математики у розділі «Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів».

На діагностико-прогностичному етапі формування логічного складника предметної математики компетентності учнів основної школи необхідно:

- з'ясувати рівні сформованості логічних умінь учнів, здобутих під час навчання у початковій школі;
- усвідомити особливості подальших етапів формування логічної компетентності учнів;
- визначити стратегію формування логічного складника математичної компетентності учнів в умовах конкретного контингенту учнів у класі;
- забезпечити умови для усвідомлення учнями потреби та інтересу до формування та розвитку логічної компетентності учнів
- створити умови, відповідні віковим особливостям учнів, для формування прийомів розумової діяльності, що є основою логічних умінь.

Важливою на діагностико-прогностичному етапі є діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів. За результатами наших наукових розвідок ми рекомендуємо вчителям

математики на цьому етапі наступні діагностичні методики: методика «Прості аналогії» (Додаток Ж); методика «Логічні закономірності» (Додаток И); методика «Логічність умовиводів» (Додаток К).

Перше, на що має звертати увагу вчитель математики, починаючи працювати в 5 класі, на створення сприятливих умов для розвитку учнів засобами навчання математики. Період адаптації до навчання у 5-му класі є одним із найважчих періодів шкільного життя. Стан дітей у цей період характеризується: низькою організованістю, неуважністю й недисциплінованістю на уроках, зниженням інтересу до навчання і його результатів; зниженням самооцінки, високим рівнем ситуативної тривожності.

Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому ступені вивчення курсу математики, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання. Навчання пропедевтичного курсу математики в 5-6 класах, з орієнтацією на розвиток логічної компетентності учнів, вимагає від учителя математики методично грамотного проектування, вмільої реалізації програмових завдань математичної освітньої галузі. Відповідно технологія розвитку логічної компетентності має сприяти у процесі навчання математики підготувати учнів з розвиненим математичним мисленням, здатних розуміти й оцінювати математичні факти та закономірності, розпізнавати в повсякденному житті проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математики.

На діагностико-прогностичному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи важливо навчати учнів помічати закономірності. У процесі наших досліджень підтверджена корисність вправ наступного виду:

✓ Установіть закономірності та продовжіть ряд:

а) 11, 222, 3333, _____, _____;

- б) 5, 20, 80, __, ____;
- в) 22, 19, 16, __, __, ____;
- г) 1, 2, 3, 5, 8, __, __, ____;
- д) 1, 2, 4, 7, 11, __, __, ____;
- е) б, в, г, д, __, __.

На *діагностико-прогностичному етапі* у 5 класі, вважаємо доцільним і можливим вивчення теми «Судження». Під час вивчення цієї теми учні зможуть ознайомитися з різними видами суджень, вчитися обґрунтовувати та спростовувати їх. Наприклад, учні мають зрозуміти, що для пояснення існування чогось можна навести один конкретний приклад, а для заперечення – достатньо навести один контрприклад. Для вивчення цього матеріалу пропонуємо наступні вправи, які можна адаптувати до змісту будь-якої теми уроку математики:

1. Поміркуйте, які з цих тверджень завжди правильні? Скільки їх?:

- У квадрата усі кути прямі;
- Квадрат більший за прямокутник;
- Трикутник має гострі кути.

2. Серед поданих суджень одне може бути і істинним, і хибним. Яке саме? Обґрунтуйте свою думку.

1. Тиждень складається з 7 днів;
2. Різниця менша від'ємника;
3. Дві доби мають 48 годин; ;
4. Сума більша одного з доданків.

З метою формування та розвитку логічної компетентності учнів на *діагностико-прогностичному етапі* (5 клас) серйозну увагу варто приділити запитанням відкритого, закритого та уточнювального типу. Запитання може бути засобом стимулювання різних видів мислення на різних рівнях складності. Серед зручних методичних засобів, що сприяють активізації мисленнєвих процесів, якраз і є закриті, відкриті та уточнювальні запитання. Вважаємо за необхідне частіше використовувати різноманітні види запитань

у роботі з учнями на уроках математики в школі і заохочувати їх до вдумливих та обґрунтованих відповідей.

Закриті запитання передбачають конкретну відповідь. Такі запитання здебільшого починаються зі слів: скільки? чи правильно? чи погоджуєтесь ви? тощо. Запитання закритого типу мають однозначну відповідь, яку можна легко перевірити. Такі запитання розвивають вміння аналізувати та синтезувати інформацію. Наприклад, запитання закритого типу, із нашої системи формування логічного складника математичної компетентності учнів:

Як правильно сказати: «9 і 7 буде 15» чи «9 плюс 7 буде 15»?

Очікувана відповідь: 9 плюс 7 дорівнює 16.

Відкриті запитання передбачають неоднозначну відповідь, вони зручні для організації обговорення різних варіантів відповідей, що значно допомагає під час уроків математики активізувати мислення учнів. Запитання відкритого типу здатні розвивати в процесі навчання математики вміння аналізувати, узагальнювати, конкретизувати й критично оцінювати отримані факти. Такі умови можуть виникнути, якщо методично грамотно організувати, спрямувати мислення учнів у процесі розв'язування задач. Наприклад, запитання відкритого типу, із нашої системи формування логічного складника математичної компетентності учнів:

Існує думка, що купувати товари в інтернет магазині дешевше. Термос Gramr в інтернет магазині коштує 685 грн. Вартість доставки Новою поштою складає приблизно 50 грн. Крім того, на пошті при отриманні потрібно ще сплатити за наложений платіж 2% від суми + 20 грн, а також, якщо оголошена вартість складає більше 200 грн, то ще 0,5% від оголошеної вартості. В магазині «Мандрівник» вартість такого ж термоса складає 720 грн. Для того щоб його придбати в магазині достатньо під'їхати маршрутною, вартість поїздки в якій складає 6 грн. То як вигідніше здійснити покупку і на скільки?

Уточнювальні запитання. Пошук відповідей на відкриті запитання часто потребує уточнювальних запитань. Наприклад, уточнювальне питання до попередньої задачі: *Чи важливо де знаходиться відділення Нової пошти?*

Для забезпечення спеціальних умов формування логічного складника математичної компетентності учнів, нами розроблено навчально-методичний посібник для учнів «Вчимося мислити логічно», у якому зібрано 240 задач. Для діагностико-прогностичного етапу формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи нами підібрано 60 спеціальних логічних задач, які скомпоновані за наступними рубриками (по 10 задач):

- 1.1. Тренуємо логічне мислення при обчисленнях.
- 1.2. Тренуємо логічне мислення при розв'язуванні текстових задач.
- 1.3. Тренуємо логічне мислення при розв'язуванні алгебричних завдань.
- 1.4. Тренуємо логічне мислення при розв'язуванні геометричних завдань.
- 1.5. Логічні загадки.
- 1.6. Математичні софізми.

Задачі, які представлені у посібнику, можуть використовуватися вчителями на уроках математики, обиратися в довільному порядку і до будь-якої теми. Відібрані нами задачі покликані сприяти формуванню логічного складника математичної компетентності, оскільки не передбачають наперед заданого шаблону розв'язування. Методичні рекомендації для вчителів математики щодо методики організації навчально-пізнавальної діяльності учнів на діагностико-прогностичному етапі опубліковані нами в посібнику для вчителів «Навчаємо мислити логічно».

Розглянемо наші рекомендації щодо методики розв'язування з учнями окремих завдань із нашого посібника «Вчимося мислити логічно» на діагностико-прогностичному етапі.

Завдання 1.1.1. *Повертаючись додому, рибалка зустрів свого приятеля, який поцікавився його уловом. У відповідь рибалка йому відповів так: «Якщо*

до кількості спійманої мною риби додати половину улову і ще десяток рибин, то мій улов склав би рівно сотню риб». Скільки риби зловив рибалка?

Методичний коментар: Очевидним є розв'язання даної задачі, якщо є можливість розв'язувати задачу із введенням змінної величини. Нехай половина улову риби – x рибин, тоді $2x$ – весь улов риби. Згідно умови задачі отримуємо рівняння: $x + 2x + 10 = 100$. Отже, $x = 30$, тому весь улов 60 рибин.

Однак, розв'язуючи задачу з учнями 5 класу, варто зосередитися на іншому способі розв'язування цієї задачі. Міркування варто розпочати з того, що якщо від сотні відняти 10 рибин, то отримаємо 90 рибин. У числі 90 міститься 3 рівних частини, з яких 2 частини – дійсний улов, а одна частина – половина улову. Відповідно, $90 : 3 = 30$, а весь улов $30 \times 2 = 60$ (рибин).

Завдання 1.1.2. *Визначте, що це за число, якщо відомо, що воно трицифрове та складається з цифр, які зліва направо збільшуються. Якщо ж це трицифрове число прочитати, то усі слова в ньому будуть починатися на одну літеру.*

Методичний коментар: Одна із цілей цього завдання акцентувати увагу учнів на змісті понять «цифра» та «число». Якщо учні навіть добре розуміють, що таке цифри, утруднення полягає в тому, що всі цифри читаються з різних букв: 1 - один, 2 - два, 3 – три, 4 – чотири, 5 – п'ять, 6 – шість, 7 – сім, 8 – вісім, 9 – дев'ять, 0 – нуль. Однак, цікаво звернути увагу, що, наприклад, 1 по-різному читається в залежності від місця розташування у записі числа. Наприклад, 10 – десять, 100 – сто, 1000 – тисяча і т.д. Перегляд різних варіантів читання інших цифр має привести до числа 147 – сто сорок сім, трицифрове число усі слова в якому починаються на одну літеру.

Завдання 1.1.6. *Написати цифрами число, що складається з одинадцяти тисяч, одинадцяти сотень і одинадцяти одиниць.*

Методичний коментар: Багато хто вважає, що це буде число 111111. Насправді це число

$$12\ 111 = 11\ 000 + 1100 + 11.$$

Завдання 1.1.7. *Що більше сума усіх цифр, чи їхній добуток?*

Методичний коментар: Варто запропонувати учням виконати це завдання на швидкість. Здебільшого учні починають знаходити суму усіх цифр, щоб порівняти її із добутком усіх цифр. Не варто на цьому етапі (5 клас) зосереджувати увагу, що дії ми виконуємо над числами, а не над цифрами. Очевидно, вчитель має мати надію, що в класі знайдуться учні, які здогадаються, що можна не обчислюючи стверджувати, що сума усіх одноцифрових чисел є більшою за їхній добуток, бо добуток дорівнює 0 (оскільки один із множників дорівнює 0).

Завдання 1.2.1. *Електропотяг їде зі сходу на захід. Набравши швидкість, потяг їде 60 км / год. У тому ж напрямку - зі сходу на захід - дме вітер, але зі швидкістю 50 км / год. У який бік відносить дим потягу?*

Методичний коментар: У цій задачі передбачається, що учні будуть уважні й зазначать, що йдеться про електропотяг, тому ніякого диму не повинно бути взагалі. Однак, якщо ж учні висунуть гіпотезу, про виникнення диму з інших обставин, то варто розглядати випадок по зупинку потяга ...

Задача важлива з методичної точки зору, оскільки дозволяє переконати учнів у необхідності уважного прочитування умови задачі і врахування всіх її аспектів, а не автоматичному слідуванню стандартним алгоритмам обчислень. Це важливо на всіх етапах формування та розвитку логічної компетентності учнів.

Завдання 1.2.2. *Поруч з берегом стоїть корабель зі спущеною на воду мотузковою драбиною, що має 10 сходинок. Відстань між ними 30 сантиметрів. Сама нижня сходинка торкається поверхні води. Океан сьогодні дуже спокійний, але починається приплив, що піднімає воду за годину на 15 сантиметрів. Через скільки годин покриється водою третя сходинка мотузкової драбини?*

Методичний коментар: Вода ніколи не покриє третьої сходинки, тому що разом із водою піднімуться і корабель, і сходи. Задача важлива з методичної точки зору, оскільки дозволяє переконати учнів у необхідності уважного осмислення змісту задачі, а не поспішати із формальними

обчисленнями. Це важливо на всіх етапах формування та розвитку логічної компетентності учнів.

Завдання 1.2.3. *В одну склянку налито сік, а в іншу – таку ж кількість води. Зі склянки з соком беруть чайну ложку соку й переливають її у склянку з водою. Потім, добре перемішавши вміст склянки з водою, беруть чайну ложку розчину і переливають її назад у склянку з соком. Чого при цьому виявляється більше – соку у воді чи води у соці?*

Методичний коментар: Оскільки після двох переливань кількість рідини у склянках залишається однаковою, то кількість соку у воді та води у соці є однаковою. Відразу зазначимо, що такі міркування, скоріше за все, не будуть переконливими для учнів. Тому варто розглянути кілька конкретних випадків вказаної ситуації. Наприклад: Прийнято вважати, що одна чайна ложка вміщує об'єм, рівний 5 мл. Отже, після першого переливання із склянки забрали 5 мл соку. Після того як повернули чайну ложку рідини, нехай це буде 4 мл води і 1 мл соку. Тому у першій склянці маємо 4 мл води. Отже із другої склянки забрали 4 мл води, а доповнили, очевидно соком. Тому у другій склянці 4 мл соку. Таким чином, ми переконалися, що кількість соку у воді та води у соці є однаковою. Якщо учні вважатимуть потрібним здійснити ще якісь конкретні перевірки, то їх варто підтримати, похваливши за критичність мислення.

Завдання 1.2.4. *Галина захотіла купити булочку, але їй не вистачає 80 копійок. Іван також хоче купити таку булочку, але йому не вистачає 10 копійок. Галина та Іван вирішили разом купити одну таку булочку, але їм все-рівно не вистачає 10 копійок. Скільки ж коштує ця булочка?*

Методичний коментар: Якщо вважати, що в Галини x копійок, то тоді булочка коштує $(x + 80)$ копійок. Якщо вважати, що в Івана y копійок, то тоді булочка коштує $(y + 10)$ копійок. Тоді разом у Галини та Івана $(x+y)$ копійок, тобто булочка коштує $(x + y + 10)$ копійок. Оскільки $x + y + 10 = y + 10$, то це означає, що $x = 0$, тобто у Галини зовсім немає грошей, а булочка коштує 80 копійок.

Однак, з метою формування логічної компетентності учнів 5 класу, варто зосередитися на іншому способі розв'язування цієї задачі. Якщо Іван хоче купити булочку, а після того як вони разом з Галиною обєднають свої можливості, йому все-рвно не вистачає 10 копійок, то це може означати лише те, що у Галини зовсім немає грошей. Якщо Галині при відсутності грошей не вистачає 80 копійок для того щоб купити булочку, то булочка коштує 80 копійок.

Завдання 1.3.3. *В Андрія і Бориса разом 11 горіхів, у Андрія і Володимира — 12 горіхів, у Бориса й Володимира — 13 горіхів. Скільки всього горіхів у Андрія, Бориса й Володимира разом?*

Методичний коментар: Позначимо першими літерами імен хлопців кількості горіхів у них. Маємо: $A + B = 11$; $A + B = 12$; $B + B = 13$. Кожну літеру записано у двох рівняннях. Додавши праві та ліві частини всіх трьох рівнянь, отримаємо: $2A + 2B + 2B = 36$. Зрозуміло, що тоді $A + B + B = 18$.

Отже, у всіх хлопців разом 18 горіхів.

Завдання 1.3.5. *Діана множить число на 3, Поліна додає 2, а Надя віднімає 1. У якій послідовності їм потрібно виконати дії, щоб із трьох отримати 14? Кожен виконує свою дію лише 1 раз.*

Методичний коментар: Розглянемо різні можливі випадки:

$3 \cdot 3 + 2 - 1 = 10$; $(3 - 1 + 2) \cdot 3 = 12$; $3 - 1 + 2 \cdot 3 = 8$, $3 \cdot (3 + 2 - 1) = 12$; $(3 + 2) \cdot 3 - 1 = 14$.

Отже, $(3 + 2) \cdot 3 - 1 = 14$ (Поліна, Діана, Надя).

Завдання 1.3.6. *У школі навчається 962 учні. Довести, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали.*

Методичний коментар: Зауважимо, що з двох букв можна утворити $2 \cdot 2 = 4$ різних пар ініціалів. (Якщо це, наприклад, букви А і Б, то матимемо: А.А., А.Б., Б.А., Б.Б.). В українському алфавіті 31 буква, що може входити до складу ініціалів. Тому всього можна утворити $31 \cdot 31 = 961$ різних пар ініціалів. Візьмемо 961 ящик і кожному з них нанесемо пару ініціалів.

Напишемо для кожного учня його ініціали на картці і кожен картку покладемо у той ящик, на якому написано таку саму пару ініціалів.

Оскільки розкладаємо 962 картки в 961 ящик, то, відповідно до принципу Діріхле, принаймні в одному ящику буде не менше від однієї картки.

Завдання 1.5.1. *Позавчора Назару було 17 років, а у наступному році йому виповниться 20 років. Чи може таке бути?*

Методичний коментар: Як бачимо, мова йде про три роки підряд: минулий рік, цей рік, наступний рік. Розглянемо випадок, що нинішній день 1 січня, а День народження у Назара 31 грудня. Отже, позавчора (30 грудня) йому було тільки 17 років, вчора (31 грудня) вже виповнилося 18 років – це все минулий рік, у поточному році 31 грудня йому буде 19 років, а в наступному році – 20 років. Тобто, сказане в умові задачі цілком можливе, якщо розмова відбувається 1 січня, а День народження - 31 грудня. Задача важлива з методичної точки зору, оскільки дозволяє переконати учнів у доцільності розгляду різних конкретних випадків, і не поспішати із висновками. Формується розуміння учнями важливого логічного аспекту: щоб пояснити можливість чогось, достатньо навести хоча б один конкретний приклад.

Завдання 1.5.2. *Коли одного чоловіка запитали, скільки йому років, він відповів, що його вік досить солідний, адже він старший за деяких своїх родичів майже у 600 разів. Чи можливо це?*

Методичний коментар: На перший погляд, таке неможливо. Однак, якщо чоловіку зараз 50 років, а його онуку лише 1 місяць. То варто порахувати вік чоловіка в місяцях $50 \times 12 = 600$ (місяців), а це означає, що він старший за свого внука у 600 разів. Таким чином це цілком можливо. Слід пояснити учням, що ми розглянули лише один із випадків, але цього достатньо щоб приймати рішення про можливість вказаної ситуації. Задача методично важлива також тому, що дозволяє переконати учнів у необхідності переведення величин в однотипні одиниці вимірювання.

Завдання 1.5.3. У кишені лежать дві монети на загальну суму 15 копійок. Одна з них не пятак. Чи може таке бути?

Методичний коментар: Те що одна з них не пятак, не означає що інша не пятак. Отже, це монети 10 копійок та 5 копійок. Наш розв'язок не суперечить умові даної задачі.

Завдання 1.6.1. Розглянемо тотожність $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$. У кожній частині цієї тотожності винесемо за дужки спільний множник:

$$5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9).$$

Тепер, розділивши обидві частини отриманої рівності на їх спільний множник $(7 + 2 - 9)$, отримаємо, що $5 = 6$. Де помилка?

Методичний коментар: Як ми вже зауважували, завдання на знаходження помилок у розв'язанні сприяють формуванню логічної копетентності учнів. Відповідаючи на питання даного завдання, учні переконуються, що ділити на нуль не можна.

Одним із необхідних методичних прийомів на уроках математики у 5 класі є створення ситуацій, коли встановлення закономірностей дає змогу раціоналізувати процес обчислень, або перетворень, або підказує стратегію пошуку розв'язування задачі. У цьому випадку вміння учнів порівнювати, висувати гіпотези, встановлювати закономірності переходять на вищий рівень.

Підсумовуючи зазначимо, що на діагностико-прогностичному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи важливо забезпечити реалізацію визначених нами організаційно-педагогічних умов формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи: удосконалення змістового наповнення та навчально-методичного забезпечення курсу математики з метою формування логічних умінь, прийомів та досвіду їх використання; інтенсифікація процесу формування логічної компетентності учнів засобами інтерактивних та ігрових технологій; впровадження системи спеціальних завдань та задач для забезпечення позитивної динаміки сформованості логічного складника математичної компетентності.

2.4. Мотиваційно-пізнавальний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

Мотиваційно-пізнавальний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи реалізується протягом трьох семестрів: I, II семестри 6 класу та I семестр 7 класу. Оскільки на цьому етапі має формуватися пізнавальний інтерес та позитивна мотивація учнів до формування та розвитку логічного складника математичної компетентності, оволодіння логічними уміннями та прийомами, то важливим є традиційний пропедевтичний зміст курсу математики та традиційний зміст курсу алгебри та геометрії, який вивчається у I семестрі 7 класу.

Психологи, що досліджували умови формування логічного мислення у школі, виявили, що найважливішою умовою є цілеспрямоване та систематичне формування логічних прийомів, навчання, під час якого ці прийоми є об'єктами засвоєння. Ми повністю погоджуємося із тими дослідниками, які вважають, що основним засобом формування логічного мислення є спеціальна система навчальних завдань, структура якої відповідає основним параметрам логічного мислення учнів, віковим та індивідуальним особливостям учнів.

На мотиваційно-пізнавальному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи учитель має захопити учнів своїми розповідями про математичні закономірності, про важливість логічних міркувань, про красу строгих доведень, про застосування математики в житті людини. Нині мистецтво цікавої розповіді називають у педагогіці сторітеллінгом. На мотиваційно-пізнавальному етапі доцільно й учнів залучати до створення подібних розповідей, зокрема, на основі різних нових математичних фактів, які вивчаються в пропедевтичному курсі математики 6 класу та на перших уроках алгебри і геометрії 7 класу.

На мотиваційно-пізнавальному етапі важливо почати навчати учнів здійснювати певні дослідження. Наприклад, у 6 класі при вивченні довжини кола можна організувати лабораторну роботу із вимірюванням, порівнянням, висуванням гіпотез та їх експериментальним підтвердженням. У результаті такої дослідницької діяльності учні мають засвоїти, що відношення довжини будь-якого кола до його діаметра є числом сталим. Аналогічно, використовуючи картон, учні можуть зробити із самостійно виготовлених розгорток окремі просторові фігури і, відповідно, дослідити їхні властивості. Нині створення чогось своїми руками у педагогіці називають мейкерством. Таким чином, долучаючи учнів на уроках математики до дослідницької діяльності, ми маємо змогу ознайомити їх із основними етапами наукового дослідження – такими як спостереження та експеримент. За дослідницького підходу вчитель математики не дає нову для учнів інформацію в готовому вигляді, а підводить учнів до усвідомлення нових знань за допомогою активізації навчально-пізнавальної діяльності. На мотиваційно-пізнавальному етапі дослідницькі роботи варто пропонувати як для виконання у класі, так і вдома.

Враховуючи той факт, що на початку вивчення математики в основній школі в учнів дуже малий запас математичних понять та тверджень, доцільно використовувати прийом запитань «чому?», які зазвичай виникають в учнів ще в дошкільному віці. Для формування логічного складника математичної компетентності важливо систематично ставити такі питання на уроках математики, на які вони можуть самостійно відповісти, використовуючи ті знання, які є у їх розпорядженні. Привчивши учнів обґрунтовувати відповіді на запитання можна сформувати у них уміння знаходити закономірності у матеріалі, який вивчається не лише на уроках математики.

Наведемо приклади таких питань, які можна ставити на уроках математики: «Чому сума двох парних чисел буде завжди число парне?», «Чому сума двох чисел, кратних п'яти, буде теж числом кратним п'яти?» (можна ставити для будь-яких чисел під час вивчення ознак подільності),

«Чому сума кількох доданків, кратних одному й тому самому числу, буде також кратна цьому числу?» і т.д.

Приєм запитань «чому?» потрібно активно використовувати на уроках алгебри та геометрії на всіх етапах з метою формування логічного складника математичної компетентності учнів. Приєм запитань «чому» можна модифікувати у прийом *системи послідовних запитань*. Наприклад, під час вивчення теми суміжних кутів учні можуть відповідати на таку послідовність запитань: «Який кут утвориться при додаванні двох суміжних кутів?», «Скільком прямим кутам дорівнює один розгорнутий кут?», «Скільком кутам дорівнює сум двох суміжних кутів?», «Чому сума суміжних кутів дорівнює двом прямим кутам?».

Таким чином, учнів без особливих труднощів зможуть обґрунтовано відповідати на запитання «Чому вертикальні кути рівні між собою?», «Чому бісектриси двох суміжних кутів взаємно перпендикулярні?» і т.д., що сприятиме формуванню умінь аналізувати, порівнювати, робити висновки та обґрунтовувати їх, а відтак і формуванню логічного складника математичної компетентності учнів.

Також вкажемо на доцільність організації на уроках математики, на мотиваційно-пізнавальному етапі, конструктивних діалогів. Для активізації конструктивного діалогу можна використовувати відомий прийом, названий на честь грецького філософа Сократа. Сократівський діалог базується на тому, що для знаходження вірної відповіді на актуальне на момент обговорення запитання, потрібно його поставити на третє місце, а перед ним поставити два простих коротких запитання, які передбачають від співрозмовника однозначну відповідь. Техніка цього прийому пояснюється через три рівноцінні складові: погодження – сумнів – аргументація. На прикладі сократівський діалог може виглядати так:

Припустимо, що уряд встановив максимальну ціну на яблука в розмірі 6 гривень за кілограм. Як це вплине на ситуацію з вирощуванням яблук?

Що означає ця ціна для громадян? Безумовно, що для громадян це прийнятна ціна, і вони будуть від цього задоволені. (Згода)

Що означає ця ціна для виробників? Частині виробників буде не вигідно займатися цією справою. (Сумнів)

В майбутньому це може призвести до скорочення обсягів вирощування яблук. (Аргументація)

Переваги сократівського діалогу в процесі навчання математики вбачаємо в забезпечені умов розвитку вмінь учнів вести конструктивний та аргументований діалог. До спеціальних методичних інструментів розвитку прийомів логічного мислення учнів у процесі навчання математики можна віднести методичні прийоми «Низка ЯК?» та «Низка ЧОМУ?». Сутність цих прийомів полягає в послідовних запитаннях «Як?» або «Чому?» звідси і назви прийомів. Це покрокові, логічно побудовані запитання на кожному наступному відповідь учнів, які починаються завжди з як? або з чому? Використання вказаного прийому дозволяє не лише вести конструктивний діалог між вчителем та учнями, а й отримати певний досвід для учнів щодо практики послідовної постановки питань. Також цей прийом додає процесу навчання певного емоційного забарвлення, адже виглядає певною грою вимога розпочинати однаково низку запитань. Цей штучний фактор насправді активізує логічне мислення учнів.

Важливими для формування логічного складника математичної компетентності є уроки геометрії. Наприклад, на перших уроках геометрії в 7 класі розкриваються істотні властивості понять «точка» і «пряма» за допомогою системи аксіом планіметрії. Тут учнів ознайомлюють з важливими відношеннями «належати» для точок і прямих, «лежить між» - для трьох точок прямої. Доцільно звернути увагу учнів на те, що поняття точки, прямої, площини походять від реальних існуючих об'єктів довкілля. Під час формування первісних понять геометрії важливо, щоб учні добре засвоїли термінологію стосовно цих понять. Наприклад: «точки А і С лежать

на прямій а», або «точки А і С належать прямій а»; «прямі а і b перетинаються в точці С», або «точка С є точкою перетину прямих а і b».

Вивчаючи геометричний матеріал у 7 класі учні вивчають теореми, їх доведення. У процесі доведень проводять міркування різного виду, що часто призводить до труднощів. Зокрема, учні можуть не розрізняти означення та ознаку, теорему та обернену до неї, наслідок, умову та вимогу теореми тощо. Тому, важливо, на нашу думку, перед активним вивченням теорем ознайомити учнів з темою «Умовиводи» з курсу «Логіки».

Розглянемо наші рекомендації щодо методики розв'язування з учнями окремих завдань із нашого посібника «Вчимося мислити логічно» на мотиваційно-пізнавальному етапі.

Завдання 2.1.1. *Після шторму троє рибалок знайшли викинуті на берег бочки з вином, сім з них були пусті, сім – напівпусті, а ще сім – повні. Як їм поділити свій скарб порівну на трьох, щоб кожному дісталася рівна кількість бочок і порівну вина? Обов'язкова умова розв'язання: рибалкам не можна переливати вино з бочки в бочку!*

Методичний коментар: Оскільки усіх бочок 21, то кожний має отримати по 7 бочок. Оскільки загальна кількість вина 10,5 бочок, то кожний має отримати по 3,5 бочок вина. Один із можливих варіантів поділу: двоє з рибалок отримали по 2 порожні, по 2 повні та по 3 напівповні бочки. А третій – узяв собі 3 порожніх, 3 повних і одну напівповну бочки. Отже, кожен отримав по 7 бочок, в яких загалом було по 3,5 бочки з вином. Задача важлива з методичної точки зору, оскільки дозволяє переконати учнів у доцільності розгляду різних конкретних випадків, і не поспішати із висновками. Зокрема, варто розглянути інші варіанти поділу. Наприклад: двоє з рибалок отримали по 3 порожні, по 3 повні та по 1 напівповній бочці. А третій – узяв собі 1 порожню, 1 повну і 5 напівповних бочок. Отже, кожен отримав по 7 бочок, в яких загалом було по 3,5 бочки з вином.

Завдання 2.1.2. У хлопчика сестер стільки ж, скільки і братів. Але в кожній сестри братів в 2 рази більше, ніж сестер. Скільки всього дітей у сім'ї? Скільки з них хлопчиків і скільки дівчаток?

Методичний коментар: Для того щоб усвідомити умову задачі, варто зобразити певні схеми, які відображають заданий зміст. Наприклад:

Хлопчик має x сестер та x братів.

Дівчинка має $x - 1$ сестер та $x + 1$ братів.

Згідно умови задачі: $x + 1 = 2(x - 1)$. Розв'язком цього рівняння є число 3, тобто сестер було 3, братів було 4. Всього 7 дітей у сім'ї.

Методична цінність цієї задачі полягає в тому, що здатність до математичного моделювання дозволяє «розплутати» клубок інформації в умові. Процес математичного моделювання та процес логічних міркувань тісно пов'язані процеси.

Завдання 2.2.1. Два товарних поїзди, обидва довжиною у 250 м, їдуть назустріч один одному з однаковою швидкістю 45 км/год. Скільки секунд пройде після того, як зустрілися машиністи, перш ніж зустрінуться кондуктори останніх вагонів?

Методичний коментар: Методична цінність цієї задачі полягає в тому, що маємо можливість показати учням, чому важливо уважно з'ясувати все про що йдеться в умові задачі. На товарних поїздах кондукторів не має, тому завдання не є коректним.

Завдання 2.2.5. Продовживши шлях, Андрій дійде до магазину за 15 хв до перерви, а якщо повернеться додому, то запізниться на 5 хв. Отже, йому потрібно 20 хв додаткового часу, щоб повернутися додому і знову повернутися в місце, де йому потрібно було повернутися назад. Тобто Андрій повинен пройти цей шлях двічі. Отже, один раз цей шлях він проходить за 10 хв, а оскільки весь шлях він проходить за 40 хв, то він встиг пройти четверту частину шляху.

Методичний коментар: Продовживши шлях, Андрій дійде до магазину за 15 хв до перерви, а якщо повернеться додому, то запізниться на 5 хв. Отже,

йому потрібно 20 хв додаткового часу, щоб повернутися додому і знову повернутися в місце, де йому потрібно було повернутися назад. Тобто Андрій повинен пройти цей шлях двічі. Отже, один раз цей шлях він проходить за 10 хв, а оскільки весь шлях він проходить за 40 хв, то він встиг пройти четверту частину шляху.

Завдання 2.3.4. Три команди грали в КВК. Перед грою гравець Іванов перейшов з першої команди в другу, гравець Сидоров перейшов з другої команди в третю, а гравець Петров перейшов з третьої команди в першу. Після цього середній вік першої команди збільшився на 1 тиждень, другої — збільшився на 2 тижні, а третьої — зменшився на 4 тижні. Відомо, що в першій і в другій командах по 12 гравців. Скільки гравців в третій команді?

Методичний коментар: Ведемо такі позначення: x — шукана кількість гравців 3-ої команди; a — вік Іванова у тижнях; b — вік Сидорова у тижнях; c — вік Петрова у тижнях.

Запишемо прирости середнього віку у тижнях кожної команди.

$$(1) \quad -a/12 + c/12 = 1;$$

$$(2) \quad -b/12 + c/12 = 2;$$

$$(3) \quad -c/x + b/x = -4;$$

Помноживши на 12 обидві частини рівнянь (1) і (2), а у рівнянні (3) — на x , отримаємо такі рівняння:

$$(1') \quad -a + c = 12;$$

$$(2') \quad -b + c = 24;$$

$$(3') \quad -c + b = -4x;$$

Додавши праві та ліві частини рівнянь, отримаємо:

$$0 = 36 - 4x; 4x = 36; x = 9.$$

Отже, в третій команді 9 гравців.

Завдання 2.4.1. Використовуючи 6 прямих ліній, створіть 11 точок перетину цих ліній.

Методичний коментар: Насправді варіантів розташування 6 прямих, щоб утворилося 11 точок перетину, існує немало.

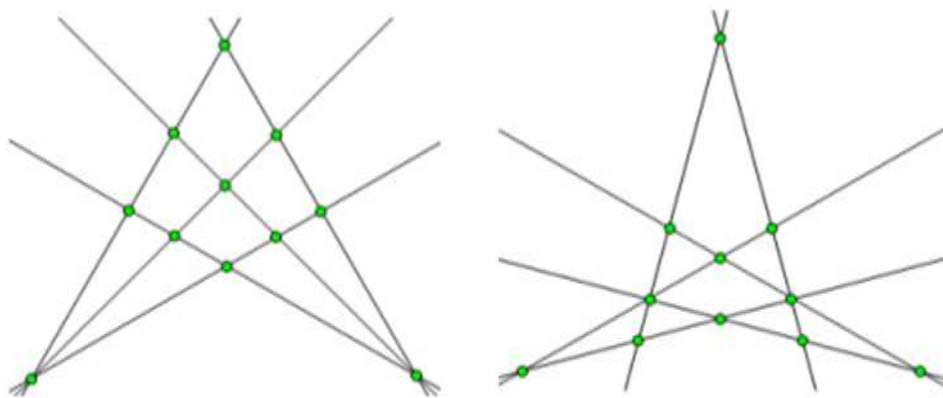


Рис. 2.3

Задача надзвичайно корисна для розвитку логічного мислення учнів. Зокрема, учні мають зрозуміти, що якщо прямі не є паралельними, то вони обов'язково мають точку перетину, навіть якщо вона на малюнку не вказана....

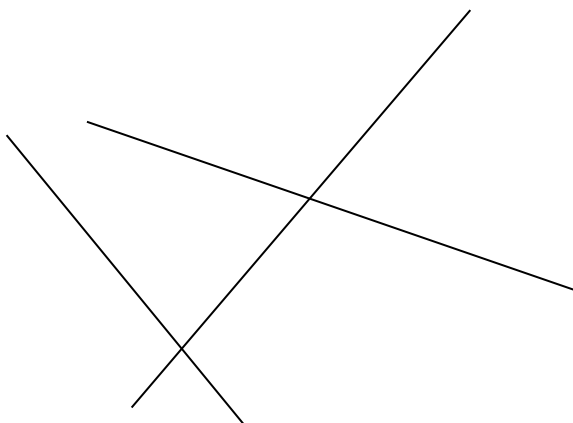


Рис. 2.4

Наприклад, на вказаному вище малюнку три точки перетину, а не дві.

Можна затіяти між учнями змагання на найбільшу кількість різних розташувань шести прямих, щоб при перетині утворилося лише 11 точок. Найцікавішим результатом такої пошукової діяльності учнів буде порівняння таких малюнків і з'ясування необхідних умов потрібного розташування.

Завдання 2.4.2. Чи можна розрізати трикутник на три частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник? Розглянути коли трикутник гострокутний, прямокутний та тупокутний.

Методичний коментар: 1) $\triangle ABC$ – гострокутний.

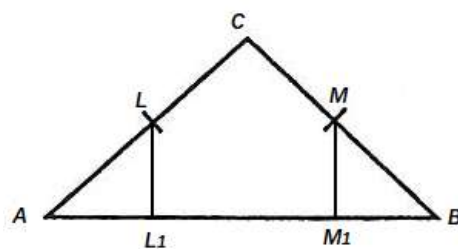


Рис. 2.5.

З точок L і M – середин сторін AC і BC – опустимо перпендикуляри LL_1 і MM_1 на основу AB .

Якщо розрізати $\triangle ABC$ вздовж LL_1 і MM_1 та повернути трикутники ALL_1 і MM_1B навколо точок L і M на 180° , то отримаємо прямокутник.

Взявши за основу AC чи BC , отримаємо ще два розв'язки.

2) $\triangle ABC$ – прямокутний;

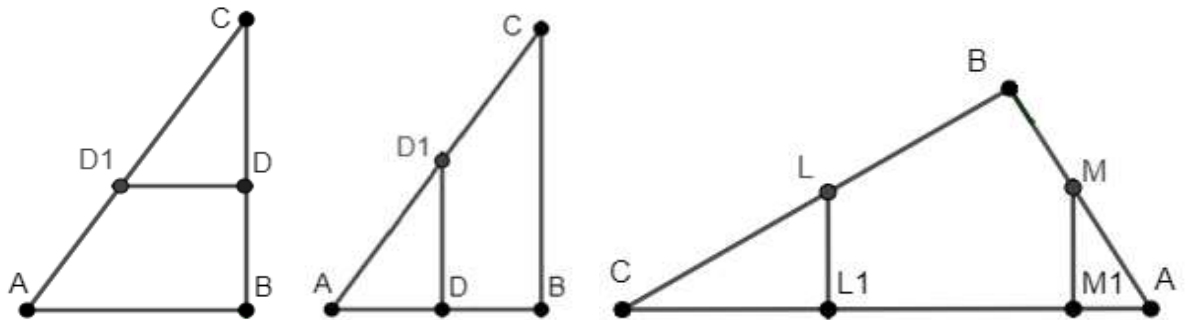


Рис. 2.6.

Попередній спосіб розв'язання виконується, якщо основою вибрати гіпотенузу. Якщо ж основою будуть катети, то для утворення прямокутника достатньо розрізати трикутник на дві частини.

3) $\triangle ABC$ – тупокутний;

Розрізати трикутник таким чином можна лише якщо основою вибрано сторону, яка лежить проти тупого кута.

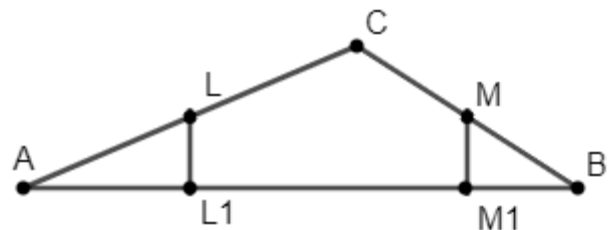


Рис. 2.7.

Завдання 2.4.3. Усередині рівностороннього трикутника зі стороною 1 лежать 5 точок. Довести, що знайдуться дві точки з п'яти, відстань між якими менше 0,5.

Методичний коментар: Ділимо рівносторонній трикутник зі стороною 1 на чотири рівносторонніх трикутника зі стороною 0,5.

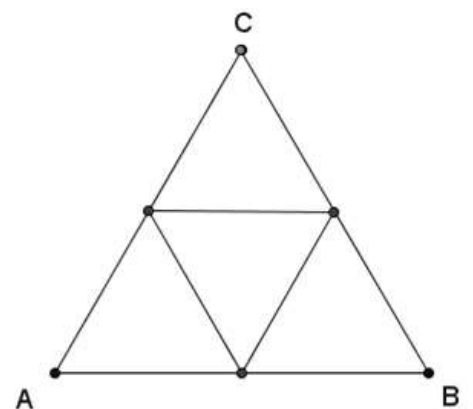


Рис. 2.8.

На рисунку зображено рівносторонній трикутник $\triangle ABC$, який розбито на менші рівносторонні трикутники. За принципом Діріхле в одному з цих чотирьох трикутників лежать принаймні дві з даних точок. Відстань між цими двома точками менше 0,5.

Завдання 2.5.1. *Якось один купець вирішив знайти собі компаньйона. Він шукав розумного і кмітливого. А перш ніж обрати з двох претендентів, вирішив провести їм випробування. Купець привів їх до окремої кімнати (без вікон і дзеркал), в якій стояла скриня, та запропонував виконати своєрідне тестове завдання. У скрині лежало 5 капелюхів – два червоних і три чорних.*

Купець озвучив своє завдання: «Щойно світло вимкнеться, кожен із вас має наважання узяти капелюх та надягнути собі на голову. А як тільки світло буде увімкнено, ви маєте здогадатися, якого саме кольору капелюх на вашій голові. Хто здогадається першим, той і буде моїм компаньйоном»

Так і зробили. Щойно увімкнулося світло, обидва претенденти побачили, що купець також вдягнув червоного капелюха зі скрині. У ту ж секунду один з претендентів здогадався...

Методичний коментар: Найкмітливіший визначив, що на ньому чорний капелюх. Як він здогадався? Можливі два випадки того, що міг побачити найкмітливіший перед собою:

1. Обидва капелюхи червоні, тому на ньому може бути лише чорний капелюх.
2. Один капелюх червоний, а інший чорний. Однак, якби на його голові був би червоний капелюх, то його суперник, побачивши два червоних, вмість би сказав, що на ньому чорний капелюх, але ж він мовчить. Відповідно, на кмітливішому з претендентів був не червоний, а чорний капелюх.

Якщо вчитель працює в класі із серйозними проблемами щодо логічного мислення учнів, то варто навіть підготувати моделі капелюхів і створити реальну рольову ситуацію.

Завдання 2.5.3. *Що це може бути: дві голови, дві руки і шість ніг, а при ходьбі тільки чотири?*

Методичний коментар: Один із можливих варіантів відповіді: вершник на коні. Очевидно, така логічна загадка може бути використана на уроці математики для певного емоційного розвантаження учнів, для зміни видів розумової діяльності в умовах монотонної роботи. Мабуть інші варіанти, які будуть пропонувати учні, можуть внести жартівливу нотку і спонукати до активізації нестандартного мислення учнів.

Завдання 2.5.4. *В дванадцяти поверховому будинку є ліфт. На першому поверсі живе всього двоє людей. Від поверху до наступного поверху кількість мешканців збільшується вдвічі. На якому поверсі в цьому будинку частіше інших натискається кнопка виклику ліфта?*

Методичний коментар: Перші висновки, які можуть з'явитися в учнів, скоріше всього будуть спиратися на поверхові міркування про те, що оскільки на найвищому поверсі живе найбільше людей, то на цьому поверсі частіше інших натискається кнопка виклику ліфта. Однак, більш глибоке осмислення змісту задачі має спонукати до правильної відповіді, а саме, на першому поверсі частіше інших натискається кнопка виклику ліфта, незалежно від розподілу мешканців на поверхах. Ця логічна загадка дає можливість учням усвідомити, що перші міркування при розв'язуванні задач, які здаються очевидними, при глибшому осмисленні змісту, можуть виявитися хибними.

Завдання 2.5.6. *Людина розглядає портрет. «Чий це портрет ви розглядаєте?» - запитують у нього, і людина відповідає: «У сім'ї я ріс один, як перст, один. І все-таки батько того, хто на портреті, - син мого батька». Чий портрет розглядає людина?*

Методичний коментар: Майже відразу можна зрозуміти, що йдеться про родинні зв'язки у ланцюжку: дідусь – батько – син. Тому варто запропонувати учням не хаотично, а більш системно розглянути три різні варіанти для перевірки виконання умови задачі: дідусь (батько) – батько

(син) – син; дідусь (батько) – батько (син) – син; дідусь (батько) – батько (син) – син. У цих варіантах підкреслено можливість бути людиною, яка розглядає портрет. Отже, можна помітити, що змісту задачі відповідає варіант: дідусь (батько) – батько (син) – син. Тому робимо висновок, що батько розглядає портрет свого сина. Задача може бути використана на уроці математики з одного боку для зміни виду діяльності, для збудження інтересу учнів, а з іншого, для переконання учнів у тому як важливо «розкладати по полочках» у процесі пошуку розв’язання задачі.

Підсумовуючи зазначимо, в технології формування логічного мислення учнів на мотиваційно-пізнавальному етапі надаємо перевагу наступним методам:

- метод міркувального викладу (розглядаючи запропоновану вчителем проблемну ситуацію, учні аналізують фактичний матеріал, роблять висновки та узагальнення з допомогою вчителя);
- метод евристичних завдань (вивчення нового правила чи поняття здійснюється самими учнями під керівництвом і з допомогою вчителя);
- метод діалогічного викладу (вчитель організовує діалог з учнями або між учнями; учні беруть активну участь у процесі формулювання проблеми, висунення припущень й обґрунтування гіпотез);
- метод дослідницьких завдань (організовується вчителем шляхом постановки перед учнями спеціально дібраних завдань з явно вираженим логічним аспектом).

2.5. Активно-діяльнісний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

Активно-діяльнісний етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи реалізується у процесі навчання математики протягом трьох семестрів (II семестр 7 класу – I, II семестр 8 класу). За допомогою різноманітних методів, прийомів, організаційних форм і засобів вчитель має забезпечити ефективні умови формування логічного складника математичної компетентності учнів. В першу чергу маємо на увазі виокремлені нами (у підрозділі 2.2.) організаційно-педагогічні умови:

- удосконалення змістового наповнення та навчально-методичного забезпечення курсу математики з метою формування логічних умінь, прийомів та досвіду їх використання;
- інтенсифікація процесу формування логічної компетентності учнів засобами інтерактивних, проєктних, ігрових та інформаційно-комунікаційних технологій та технологій проблемного навчання;
- впровадження системи спеціальних завдань та задач для забезпечення позитивної динаміки сформованості логічного складника математичної компетентності.

Вказаний період (II семестр 7 класу – I, II семестр 8 класу) дуже важливий для формування міцної основи математичної компетентності учнів. Згідно навчальних програм з математики в цей період вивчаються на уроках алгебри основні перетворення цілих та дробових виразів, розв'язування лінійних, квадратних та дробових рівнянь, а також мають сформуватися уміння учнів розв'язувати текстові задачі, що зводяться до розв'язування вказаних рівнянь. На уроках геометрії активно мають доводитися теореми та розв'язуватися задачі на доведення і дослідження, що стосуються властивостей трикутників та чотирикутників.

Використання на уроках математики запитань високого рівня – *на аналіз, синтез, оцінку* – може дозволити вчителю математики ефективно розвивати логічну компетентність учнів. Майстерність учителя формулювати такі запитання є обов'язковою умовою вирішення цієї проблеми. З іншого боку, ми маємо навчити учнів також формулювати запитання різного рівня у процесі розв'язування тієї чи іншої задачі. Розвинути такі уміння в учнів може допомогти використання вчителем спеціальних питальних слів для кожного рівня запитань. Такі слова можуть певний час виступати опорою для розвитку мислення учнів. Використання таксономії Блума передбачає формулювання пізнавальних запитань, які забезпечують досягнення навчальних результатів різного рівня. Такі запитання можуть бути побудовані за допомогою спеціальних дієслів, що «програмують» мисленнєву діяльність учнів.

Таким чином, запитання залишаються одним із механізмів формування прийомів мислення учнів на активно-діяльнісному етапі формування логічного складника математичної компетентності учнів. Розглянемо для прикладу методичний прийом «*Ромашка Блума*», який в психолого-педагогічній науці має належні обґрунтування. Вказаний методичний інструмент розвитку прийомів логічного мислення учнів побудований відповідно до принципів шести рівнів таксономії Блума: знання – розуміння – застосування – аналіз – синтез – оцінка. Використання прийому під час розв'язування завдань передбачає розгляд шести пелюсток «*Ромашки Блума*», зокрема: пелюстка проста передбачає перевірку пам'яті, та відповіді на прості запитання: Що ..? Де ..? Коли ..?; уточнювальна пелюстка передбачає відповіді учнів на уточнювальні запитання типу: Ти вважаєш, що ..? Ти бачиш це так ..? тощо; пелюстка пояснювальна очікує відповіді учнів на запитання Чому ..?; пелюстка творча очікує від учнів припущень та прогнозів, вони мають відповісти на запитання типу: Як би ви покращили ..? Запропонуйте свою ідею ..?; пелюстка оцінювальна очікує оцінку учнем

заданої ситуації; пелюстка практична передбачає висвітлення зв'язку теорії з практикою, навчання з життям. Наприклад:

У 2015 році міністр фінансів України сказав, що якщо ВВП України зростатиме на 4% на рік протягом наступних 25 років, то дожене рівень ВВП Швейцарії, який в 2014-му році складав 712 мільярдів доларів. Номінальний ВВП України в 2014 році склав 131 мільярд доларів. Якщо не зважати на падіння економіки 2015 року, то чи достатньо 25 років зростання такими темпами, аби наздогнати Швейцарію?

Пелюстка проста – порахувати, який рівень ВВП буде в Україні через 25 років.

Пелюстка уточнювальна – ви вважаєте рівень ВВП Швейцарії буде залишатись незмінним впродовж 25 років?

Пелюстка пояснювальна – скільки років потрібно, щоб рівень ВВП України був рівний рівню ВВП Швейцарії зараз.

Пелюстка творча – як ви вважаєте, які можливі зміни в економіці нашої країни могли б підвищити рівень ВВП?

Пелюстка оцінювальна – як ви вважаєте, чи можливо наздогнати Швейцарію по рівню ВВП?

Пелюстка практична – для чого нам аналізувати рівень ВВП Швейцарії і порівнювати його з рівнем ВВП України?

Вказаний прийом «Ромашка Блума» надає зручні умови для розвитку окремих прийомів розумової діяльності, забезпечує розвиток логічного мислення учнів.

На активно-діяльнісному етапі не втрачають актуальності метод міркувального викладу, метод евристичних завдань, метод діалогічного викладу, метод дослідницьких завдань. Важливим методичним прийомом методу міркувального викладу, що забезпечує активність учнів і самостійність їх мислення, є створення проблемної ситуації. Від того, наскільки методично грамотно використаний цей прийом, залежить не тільки

хід розв'язування проблемної задачі, а й результат засвоєння нових знань чи способів дії, результат впливу на розумовий розвиток учня. Там де немає проблеми, там немає самостійного мислення, а є лише робота пам'яті, яка полягає у відтворенні раніше відомого. Шукаючи вихід з проблемних ситуацій учні можуть усвідомити недостатність знань і необхідність отримання нових. В пошуках виходу із труднощів, в які ставить учнів проблемна ситуація, вони мають проаналізувати її і підійти (або їх підводять) до формулювання проблеми, тобто до визначення теоретичного або практичного запитання, яке потребує вирішення. В підсумку кожний учень стикається з низкою питань, розв'язання яких пов'язано з прикладанням власних зусиль мислення, які направлені на переосмислення і застосування досвіду і знань, які учні вже мають.

Ключову роль у застосуванні методу евристичних завдань відіграють завдання, спрямовані на розвиток евристичних якостей мислення учнів. Такі завдання не мають однозначних відповідей, а припускають тільки можливі напрями. Одержуваний учнем результат завжди унікальний і відбиває його творче самовираження, а не вірно вгадану відповідь. До таких завдань відносимо: довести твердження, встановити взаємозв'язок, виділити спільні властивості, скласти задачу чи завдання для інших учнів тощо. Застосування таких завдань спрямоване на формування логічної складової математичної компетентності учнів. На нашу думку, евристичні завдання дозволяють учням конструювати власні знання, забезпечуючи індивідуальні освітні траєкторії.

Провідною функцією методу діалогічного викладу є спонукальна. Суть полягає в тому, щоб за допомогою цілеспрямованих і методично виважених питань спонукати учнів до актуалізації вже відомих знань і досягти засвоєння нових знань шляхом самостійних роздумів, висновків, узагальнень і колективних обговорень. Діалог змушує учня мислити, слідуючи за думками вчителя та інших учнів, в результаті чого учні крок за кроком освоюють нові знання. Перевага діалогу ще і в тому, що він максимально активізує

мислення, служить засобом діагностики засвоєних знань, умінь, сприяє розвитку логічних здатностей учнів.

Істотне місце у вивченні систематичного курсу алгебри у 7 та 8 класах займають текстові задачі, основними функціями яких є розвиток логічного мислення учнів та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Вплітаючись у процес розв'язування текстової задачі, відомі учневі мисленнєві прийоми потребують правильного використання. Відбір, застосування, поєднання цих прийомів демонструє сформованість логічного складника математичної компетентності. Неправильний вибір наперед відомого учневі мисленнєвого прийому часто веде до неправильного розуміння задачі: відбувається підлаштування, що спричинює невірне розуміння взаємозв'язку між елементами задачі, невірне розуміння даних.

Яскравою ілюстрацією такої ситуації є процес розв'язання наступної задачі.

Задача: Всім членам сім'ї 73 роки. Її склад: чоловік, дружина, донька, син. Чоловік старший від дружини на 3 роки, донька старша від сина на 2 роки. 4 роки назад всім разом було 58 років. Скільки років зараз кожному члену сім'ї?

Пошукова діяльність учнів у цьому випадку часто скеровувалась добре відомим їм прийомом складання системи рівнянь. Але розв'язок створеної системи рівнянь порушує логіку самого завдання, бо система рівнянь є такою, що взагалі не має розв'язків. Такий напрям пошуку розв'язку гальмував глибше розуміння задачі, адже справа в тому, що в певний момент часу, описаний у задачі, одного із членів родини ще не було (не народився). Тобто, неповне розуміння умови задачі спричинило неправильний відбір еталону, а тому привело до неправильного переведення її змісту на мову математичних символів. Саме тому утворена за змістом математичної задачі система рівнянь якщо і давала розв'язок, то він суперечив умові.

На активно-діяльнісному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи важливо

систематично використовувати вправи і завдання логічного характеру. Завдання з елементами логіки варто подавати у процесі навчання математики за принципом поступового ускладнення (від однієї логічної операції до складніших суджень).

Часто в навчанні шкільної математики можна спостерігати повторення певних властивостей, що наводить на думку про закономірності. Тема «Математична індукція» може мати важливе місце в курсі математики основної школи, бо закладає основи аналітичного мислення, формує інтуїцію, розвиває увагу, вміння аналізувати, висувати гіпотези та доводити їх або спростовувати. За допомогою різних видів математичної індукції можна розв'язувати значну кількість задач важливих для розвитку логічного мислення учнів. Тому ми вважаємо доцільним і можливим вивчати з учнями 8 класу на уроках математики тему «Індукція та дедукція».

Спеціально побудований учителем процес розв'язування задач на доведення має значні можливості для розвитку логічного складника математичної компетентності учнів, сприяє усвідомленому розумінню учнями змісту навчального матеріалу. Такі задачі сприяють засвоєнню евристичних прийомів розумової діяльності, формують вміння обґрунтовувати судження, стисло і чітко висловлювати думку. Засвоюючи доведення теорем на уроках математики, учні мають набути здатності обґрунтовувати висновки, висувати гіпотези, знаходити і використовувати аргументи. Основний недолік при розв'язуванні задач на доведення в школі ми вбачаємо у їх формальному розгляді, часто без усвідомлення учнями логічних зв'язків та висновків. Поширеною є ситуація, коли більшість доведень теорем учні формально вивчають за підручником, або за зразком пояснень здійснених учителем. Як наслідок, змінений рисунок чи інші буквені позначення викликають значні труднощі в учнів під час доведення цих тверджень. На нашу думку, якщо під час розв'язування задач на доведення навчити учнів правилам-орієнтирам проведення логічних міркувань, домогтися свідомого розуміння сутності й логічної структури

методів доведення тверджень, то рівень логічної компетентності учнів значно підвищиться.

Розв'язування задач на дослідження також сприяє умінню встановлювати логічні зв'язки, робити логічні висновки з отриманих результатів, встановлювати закономірності, що є компонентами логічного складника математичної компетентності. Задачі на дослідження часто викликають труднощі в учнів. Можливості GeoGebra допомагають докорінно змінити освітній процес, у якому учень від спостерігача переходить до ролі активного дослідника. Розглянемо можливості GeoGebra щодо формування логічного складника математичної компетентності учнів на прикладі задач.

Задача. Доведіть, що з усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою найбільшу площу має рівнобедрений трикутник (Рис.2.9).

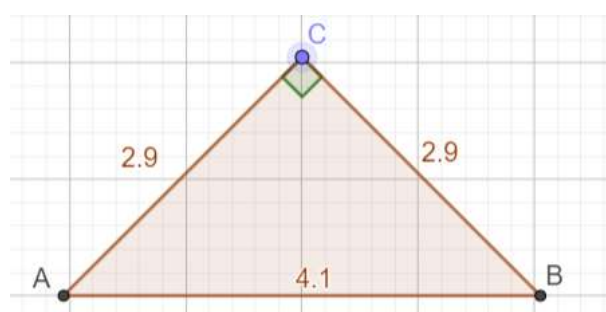


Рис. 2.9. Побудова трикутника GeoGebra

Учень, здійснюючи дослідження, розв'язує задачі не використовуючи відомі алгоритми. Виконання побудови з допомогою програм комп'ютерного моделювання мінімізує помилки учнів при побудові рисунків самостійно, що в умовах дистанційного навчання вчитель не має змоги контролювати. Таким чином, розв'язок задачі супроводжується наочним поданням умов у вигляді динамічного рисунку, що допомагає аналізувати умову задачі, знаходити можливі випадки її розв'язання та обґрунтовувати результати, що сприяє формуванню логічного складника математичної компетентності учнів.

Найважливішими етапами процесу розв'язування задач для розвитку логічного складника математичної компетентності учнів є аналіз, перевірка та дослідження отриманого розв'язку. Пропонуємо задачі, для розв'язання яких ці етапи є невід'ємною частиною процесу розв'язування.

Розглянемо задачу: *знайти двоцифрове число, у якого: кількість десятків на 4 менша кількості одиниць. Якщо від числа, записаного тими ж цифрами у зворотному порядку, відняти шукане число, отримаємо 27.*

Хід розв'язання задачі передбачає розв'язування системи рівнянь з двома змінними, проте після перетворень отримують результат, який не дозволяє знайти відповідь: $36 = 27$.

Якщо учень не вміє аналізувати, а діє за алгоритмом, то він почне шукати помилки у розв'язанні. Проте з отриманого результату можна зробити висновок і отримати відповідь: двоцифрового числа, яке задовольняє умови задачі не існує.

Наступна система завдань також потребує аналізу, оскільки виконання дій за алгоритмом призводить до помилкових результатів.

1. *Трьома дев'ятками, не використовуючи математичних дій, записати найбільше можливе число.*

2. *Трьома двійками, не використовуючи математичних дій, записати найбільше можливе число.*

3. *Трьома трійками, не використовуючи математичних дій, записати найбільше можливе число.*

4. *Трьома четвірками, не використовуючи математичних дій, записати найбільше можливе число.*

Кожне наступне завдання учень намагатиметься розв'язувати аналогічно до попереднього і отримуватиме неправильні відповіді. Після розв'язання усіх завдань цієї системи учні можуть зробити висновок: для двійок і трійок потрібно використовувати одне розташування цифр, а для цифр більше чотирьох – інше. Аналогічно можна розробити систему для чотирьох цифр.

При застосуванні цих прийомів вчитель повинен наполегливо пояснювати зв'язки та закономірності, якими обумовлюються властивості математичних понять, що звільнить їх від механічного запам'ятовування та

сприятиме не лише формуванню логічного складника математичної компетентності, а й легшому та міцнішому засвоєнню математичних фактів.

Щоб використати максимально можливості активно-діяльнісного етапу формування логічного складника математичної компетентності учнів доцільно пропонувати учням проєктні роботи (індивідуальні, парні або групові). Ці проєкти можуть бути довготривалими, середньотривалими або короткотривалими. У процесі виконання проєктних робіт учні мають збирати інформацію, аналізувати, порівнювати, робити обґрунтовані, логічні висновки. Про позитивний вплив проєктного навчання на формування в учнів мислення стверджує вчитель історії Віктор Немченко [66] у своєму вебінарі. Віктор Немченко зауважує, що проєкти прокачують у школярів уміння і навички, що дозволяють сумніватися у відповідях і твердженнях, які пропонують різні джерела. А ще проєкти навчають дітей генерувати власні креативні ідеї чи, наприклад, знаходити вихід із навіть безвихідної ситуації. На активно-діяльнісному етапі формування логічного складника математичної компетентності учням можна запропонувати проєкт «Що означає мислити логічно?», або «Математичні софізми і парадокси», або «Задачі з надлишковими даними».

Розглянемо наші рекомендації щодо методики розв'язування з учнями окремих завдань із нашого посібника «Вчимося мислити логічно» на активно-діяльнісному етапі.

Завдання 3.1.1. *Загадайте число і запишіть його. Подвойте його і додайте 1. Потім помножьте на 5 і відніміть 5. Розділіть на 10. Результат запишіть поруч з задуманим числом. Що вийшло і чому?*

Методичний коментар: Нехай ми загадали число x . Згідно умови маємо $((2x + 1)5 - 5) : 10 = 10x : 10 = x$. Вийшло те ж саме число.

Завдання 3.1.2. *Запропонуйте кому-небудь задумати будь-яке парне число, потім це число потроїти, отриманий добуток поділити на 2, а потім знову потроїти. Після оголошення результату арифметичних дій Ви називаєте задумане число. Як це зробити?*

Методичний коментар: Нехай задумане парне число x . Згідно умови маємо $(3x : 2)3 = 9x : 2$. Тому для знаходження задуманого числа потрібно розділити оголошений результат на 9, а потім помножити на 2. Оскільки у процесі виконання вказаних дій ми множили задумане число на 9, то оголошений результат ділиться націло на 9.

Завдання 3.2.1. *Два землекопа викопують 2 метри каналу за 2 години. Скільки землекопів за 5 год викопують 5 метрів каналу?*

Методичний коментар: Якщо два землекопа викопують 2 м каналу за 2 години, то за одну годину вони викопують 1 м каналу. Отже, за 5 годин вони викопують 5 м каналу. Тому за 5 годин два землекопи викопують 5 м каналу. Відповідь: два землекопи.

Завдання 3.2.1. *Двоє туристів одночасно вийшли з пункту А і пішли в пункт В. Перший турист половину часу витраченого ним на перехід, йшов із швидкістю 5 км/год, а потім пішов зі швидкістю 4 км/год. Другий же першу половину шляху пройшов по 4 км/год, а потім по 5 км/год. Хто з них раніше прийшов у пункт В?*

Методичний коментар: Нехай перший витратив $2x$ годин часу на весь шлях. Тоді весь шлях $5x + 4x = 9x$. Половина шляху $4,5x$. Тоді другий витратив $(4,5x : 4)$ годин на першу половину шляху, а також $(4,5x : 5)$ годин на другу половину шляху. Тому він витратив усього $(4,5x : 20) = 2,025$ годин на весь шлях. Отже, перший прийшов раніше у пункт В.

Завдання 3.2.1. *Знайти функцію, яка задовольняє співвідношення*

$$f(x) + f(x+5) = 10x + 11.$$

Методичний коментар: Розпочнемо конструювати розв'язок у вигляді лінійної функції $f(x) = ax + b$, де $a \in R, b \in R$. Підставимо в аргумент шуканої функції $x + 5$

$$f(x+5) = a(x+5) + b = ax + 5a + b$$

Додамо праві частини отриманих рівностей, щоб отримати ліву частину початкового рівняння:

$$ax + b + ax + 5a + b = 10x + 11,$$

$$2ax + 5a + 2b = 10x + 11.$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x та вільні члени, отримаємо два рівняння $2a = 10$ та $5a + 2b = 11$. З першого та другого рівняння знайдемо значення коефіцієнту $a = 5$, підставивши його у друге рівняння отримаємо $b = -7$. Легко переконатися, що отримана $f(x) = 5x - 7$ задовольняє дане рівняння. Отже, один з усіх можливих розв'язків даного рівняння буде функція $f(x) = 5x - 7$.

Завдання 3.2.2. Довести, що двочлен $3x^4 + 1$ є сумою трьох квадратів.

Методичний коментар: Додамо і віднімемо $(2x^3 + 2x^2)$.

$3x^4 + (2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 2x^2) + 1 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) = (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2$, що й потрібно було довести.

Завдання 3.4.3. У півколі нарисовані два півкола, як показано на рисунку. Чи можна розмістити точку дотику R так, щоб: а) довжина великого півкола була більшою суми довжин двох менших півкіл; б) довжина великого півкола була меншою суми довжин двох менших півкіл; в) довжина великого півкола дорівнював сумі довжин двох менших півкіл? Відповідь обґрунтуйте.

Методичний коментар: Позначимо:

O – центр великого півкола, O_1 і O_2 – центри двох менших півкіл.

d – діаметр великого півкола, d_1 і d_2 – діаметри двох менших півкіл.

$$d = d_1 + d_2$$

Тоді, довжина великого півкола - $C = \frac{\pi d}{2}$, довжини менших півкіл - $C_1 = \frac{\pi d_1}{2}$ та $C_2 = \frac{\pi d_2}{2}$.

Оскільки $d = d_1 + d_2$, то $C = \frac{\pi d}{2} = \frac{\pi(d_1 + d_2)}{2} = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2}$.

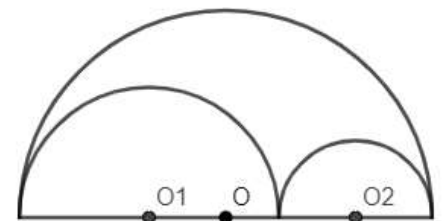


Рис. 2.10.

Знайдемо суму периметрів двох менших півкіл:

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2} = C$$

Отже, можливий тільки випадок, коли периметр великого півкола дорівнює сумі периметрів двох менших півкіл.

Завдання 3.4.4. Площа трапеції дорівнює 1. Яку найменшу величину може мати найбільша діагональ цієї трапеції.

Методичний коментар: Довжини діагоналей трапеції позначимо через d_1 і d_2 , довжини їх проєкцій на основу – через p_1 і p_2 , довжини основ – через a і b , висоту – через h . Нехай для означеності $d_1 \geq d_2$. Тоді $p_1 \geq p_2$.

Очевидно, що $p_1 + p_2 \geq a + b$. Через це $p_1 \geq \frac{a+b}{2} = \frac{S}{h} = \frac{1}{h}$. Звідси слідує що,

$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$, причому рівність досягається, тільки якщо

$p_1 = p_2 = h = 1$. При цьому $d_1 = \sqrt{2}$.

Завдання 3.6.1. $64\text{см}^2 = 65\text{см}^2$

Візьмемо квадрат зі стороною 8 см і розділимо його на чотири частини: дві трапеції і два прямокутних трикутники, як показано на рисунку 2.11.а).

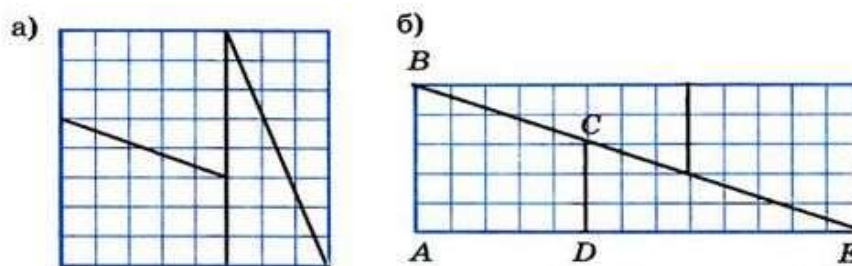


Рис. 2.11.

Склавши ці чотири частини в іншому порядку, так, як показано на рисунку 2.11.б), отримаємо прямокутник з основою 13см та висотою 5 см. Площа цього прямокутника дорівнює $5\text{см} * 13\text{см} = 65\text{см}^2$, в той час як площа початкового квадрата (рис. а) дорівнювала $8\text{см} * 8\text{см} = 64\text{см}^2$, тоді: $64\text{см}^2 = 65\text{см}^2$.

Методичний коментар: В софізмі допущена неточність при складанні частин квадрата. BE є ламаною, тому що точки B, C і E не лежать на одній прямій. Щоб переконатися в цьому, достатньо виміряти кути.

Підсумовуючи зазначимо, що навіть найпростіші задачі з будь-якої теми можна модифікувати для формування логічного складника математичної компетентності учнів. На активно-діяльнісному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи особливу увагу вчителів математики звертаємо на наявність у методичній скарбничці вчителя наступних видів задач: задачі з неповною умовою, задачі з надлишковою умовою, евристичні задачі, задачі з декількома різними розв'язками, логічні задачі, математичні софізми.

2.6. Пошуково-творчий етап формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

Нагадаємо, що *пошуково-творчий* етап формування логічної компетентності учнів має здійснюватися на уроках математики протягом двох семестрів 9 класу. Цей період дуже важливий для укріплення міцної основи математичної компетентності учнів, приведення знань та умінь в цілісну систему, включаючи логічний аспект. Згідно навчальних програм з математики в цей період вивчаються на уроках алгебри нерівності, квадратична функція, числові послідовності, а також мають сформуватися уявлення учнів про основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. На уроках геометрії активно мають розв'язуватися задачі, що стосуються довільних трикутників та правильних багатокутників, а також сформуватися знання учнів про координати, вектори та геометричні перетворення на площині. На цьому етапі навчання математики в школі важливо особливу увагу приділити розвитку критичного мислення учнів, як складнику їхньої логічної компетентності.

На пошуково-творчому етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи має відбуватися творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через провадження пошукової та дослідницької діяльності. Не втрачає актуальності система спеціальних задач з явно вираженим логічним аспектом. Зусилля мають бути спрямовані на вдосконалення всіх компонентів логічного складника математичної компетентності учнів, варто здійснювати психолого-педагогічну діагностику рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. На цьому етапі варто використовувати подані у додатках діагностичні методики (Методика «Складні аналогії», методика «Виявлення загальних понять», методика «Логіко-кількісні відношення»).

Методична діяльність учителя математики з формування логічного складника математичної компетентності учнів не може здійснюватися від випадку до випадку. Слід використовувати щонайменші можливості, тобто кожен теорему, яка вивчається, кожен задачу, яка розв'язується. Навіть задача на обчислення може стати зручним матеріалом для формування логічного складника математичної компетентності учнів. Важливо навчати учнів усвідомлювати не тільки умову й висновок задачі, а й проміжні судження, які потрібно здійснювати у процесі виконання того чи іншого завдання. Більшість задач, зокрема геометричних, можна розв'язати кількома різними способами. При розв'язуванні таких задач можна використовувати *прийом додаткової умови* або *прийом додаткового обмеження*. Суть їх полягає у тому, що накладається додаткова умова (або додаткове обмеження) на використання при розв'язуванні відповідного матеріалу. Додаткова умова або додаткове обмеження можна накладати на кожен крок розв'язання. Наприклад, додатковою умовою може бути «розв'язати задачу з допомогою додаткової побудови», а додатковим обмеженням – «розв'язати задачу не використовуючи теорему косинусів» (тобто будь-який з можливих очевидних способів розв'язування задачі).

Особливо актуальною для формування логічного складника математичної компетентності, на нашу думку, є *технологія проблемного навчання*, яка покликана забезпечити оволодіння учнями знаннями, навичками та вміннями не в готовому вигляді, а в процесі власної активної мисленнєвої діяльності. Іншими словами, учень має опинитися в умовах, де невідоме презентується як предмет пошуку, невідоме стає відомим і засвоюється в процесі активної розумової діяльності. На пошуково-творчому етапі, який охоплює I-II семестри 9 класу, має відбутися творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через впровадження пошукової та дослідницької діяльності.

Особливе місце у процесі формування логічного складника математичної компетентності учнів займають задачі на дослідження. Задачі на дослідження, якщо вони є доступними і зрозумілими учням основної школи за постановкою завдання, надзвичайно змістовні у логічному навантаженні. Саме розв'язування задач на дослідження може спонукати до активного розвитку мислення учнів і вміння застосовувати знання на практиці. Методично грамотне розв'язування задач на дослідження сприяє формуванню вміння розв'язувати задачі з використанням дослідницьких прийомів; формуванню та розвитку просторового та логічного мислення; здатності встановлювати логічні зв'язки та закономірності. Задачі на дослідження в шкільному курсі алгебри зустрічаються відносно рідко. Наші спостереження свідчать, що найчастіше задачі такого виду використовуються під час вивчення теми «Функції». До таких задач, для прикладу, належить задача:

Користуючись графіком функції, вкажіть: нулі функції / при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень / проміжок зростання та проміжок спадання функції / область значень функції.

Аналіз задач у підручниках шкільного курсу геометрії для 7-8 класів дозволяє стверджувати, що задачі на дослідження можна виявити під час вивчення майже кожної теми. Тому робимо висновок, що уроки геометрії в

школі мають кращі умови для формування логічного складника математичної компетентності учнів. Розглянемо, для прикладу, задачу:

Одна сторона трикутника менша від другої на 1см і більша за третю на 3 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати 10см?

Розв'язуючи дану задачу учень мав би позначити одну сторону x і розв'язати рівняння $x+(x+1)+(x-3)=10$. Розв'язавши дане рівняння учень одержить сторони трикутника, які дорівнюють 4, 5, 1. Провівши невелике дослідження, він мав би зробити висновок, що трикутника з даними сторонами не існує, тому що найбільша сторона трикутника повинна бути меншою за суму двох інших сторін цього трикутника.

Наведемо інші приклади геометричних задач на дослідження, розв'язування яких може сприяти формуванню логічного складника математичної компетентності учнів:

- ✓ Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0,4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см?
Відповідь обґрунтуйте.
- ✓ Чи може проекція паралелограма у разі паралельного проектування бути квадратом?
- ✓ Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють: 5 см, 7 см і 9 см;
- ✓ Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати: 6 см^2 .
- ✓ Діаметр круга дорівнює 16 см. Чи можна з нього вирізати квадрат зі стороною 12 см?
- ✓ Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Чи можна стверджувати, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?

Спеціально побудований вчителем процес розв'язування задач на доведення та дослідження має значні можливості для формуванню логічного складника математичної компетентності учнів на пошуково-творчому етапі.

Розглянемо наші рекомендації щодо методики розв'язування з учнями окремих завдань із нашого посібника «Вчимося мислити логічно» на пошуково-творчому етапі.

Завдання 4.2.1. Будівельна компанія отримала замовлення на реконструкцію будинку за 36 днів. Для цього необхідно було виділити 84 робітники, але протягом 18 днів працювали всього 24 робітники, а протягом наступних 6 днів – 16 робітників. Скільки потрібно виділити робітників на останні 12 днів роботи, щоб завершити реконструкцію вчасно? При розв'язуванні задачі вважаємо, що всі робітники працюють з однаковою продуктивністю.

Методичний коментар: Нехай весь обсяг роботи – A . Оскільки 84 робітники могли здійснити реконструкцію будинку за 36 днів, і всі робітники працюють з однаковою продуктивністю, то продуктивність праці одного робітника $\frac{A}{36 \times 84}$. Тоді 24 робітники за 18 днів виконають $\frac{24 \times 18 A}{36 \times 84}$ роботи. А 16 робітників за 6 днів виконають $\frac{16 \times 6 A}{36 \times 84}$ роботи. Тоді x робітників за 12 днів виконають $\frac{12 \times x A}{36 \times 84}$ роботи.

Таким чином, згідно умови задачі, отримаємо:

$\frac{24 \times 18 A}{36 \times 84} + \frac{16 \times 6 A}{36 \times 84} + \frac{12 \times x A}{36 \times 84} = A$. Поділимо обидві частини рівняння на A , отримаємо $\frac{24 \times 18}{36 \times 84} + \frac{16 \times 6}{36 \times 84} + \frac{12 \times x}{36 \times 84} = 1$. Розв'язавши це лінійне рівняння отримаємо, що $x = 208$.

Завдання 4.2.2. Відстань між вантажним і пасажирським річковими портами дорівнює 24 км. Якщо від вантажного порту до пасажирського за течією річки пливають два катери, то перший прийде до місця призначення на 2 години раніше, ніж другий. Якби катери рухалися назустріч один одному (перший із вантажного порту, а другий – із пасажирського), то вони б зустрілися через 3 години. Власна швидкість другого катера втричі більша за швидкість течії річки. Знайдіть швидкість течії річки.

Методичний коментар: Нехай швидкість течії річки x кілометрів за годину. Тоді власна швидкість другого катера $3x$ кілометрів за годину. Тоді швидкість другого катера за течією річки - $4x$, а проти течії річки - $2x$ кілометрів за годину. Тому на рух від вантажного порту до пасажирського

порту, за течією річки, другий катер витратить $\frac{24}{4x}$ годин, а перший катер витратить $(\frac{24}{4x} - 2)$ годин. Можна знайти швидкість першого катера на рух від вантажного порту до пасажирського порту, а саме $24 : (\frac{24}{4x} - 2) = \frac{12x}{3-x}$. Тоді за 3 години від вантажного порту до пасажирського порту перший катер пройде $\frac{36x}{3-x}$ км, а другий катер від пасажирського порту до вантажного порту пройде $6x$ км. Згідно умови задачі $\frac{36x}{3-x} + 6x = 24$. Розв'язавши це дробове рівняння отримаємо, що $x = 1$ кілометрів за годину, або $x = 12$ кілометрів за годину. Однак, оскільки x кілометрів за годину це швидкість течії річки, то 12 кілометрів за годину не може бути такою течія (не відповідає змісту задачі). Отже, швидкість течії річки 1 кілометр за годину.

Завдання 4.3.1. При яких значеннях k розв'язки системи

$$\begin{cases} kx - 2y = 3; \\ 3x + ky = 4 \end{cases} \text{ задовольняють умову } x > 0, y < 0.$$

Методичний коментар: Розв'яжемо дану систему відносно x і y , знайдемо:

$$x = \frac{3k+8}{k^2+6}; \quad y = \frac{4k-9}{k^2+6}.$$

Вираз $k^2 + 6 > 0$ при будь-яких дійсних значеннях k . Отже, x буде додатним, якщо $3k + 8 > 0$, а y буде від'ємним, коли $4k - 9 < 0$.

Таким чином, значення k повинні задовольняти такі умови:

$$k > -\frac{8}{3}; \quad k < \frac{9}{4}.$$

Тобто, $-\frac{8}{3} < k < \frac{9}{4}$.

Отже, $k = -2; -1; 0; 1; 2$.

Завдання 4.3.2. Довести, що якщо a, b, c – сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має коренів.

Методичний коментар: Оскільки a, b, c – сторони трикутника, то $a > 0, b > 0, c > 0$. Квадратне рівняння коренів не має, якщо дискримінант – від'ємне число.

$$\begin{aligned}
 D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) \\
 &= ((b + c)^2 - a^2)((b - c)^2 - a^2) \\
 &= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a).
 \end{aligned}$$

Оскільки сума двох сторін трикутника більша третьої сторони, то $(b + c + a) > 0$, $(b + c - a) > 0$, $(b - c + a) > 0$, а $(b - c - a) < 0$.

Отже, дискримінант – від’ємне число і наше квадратне рівняння коренів не має.

Завдання 4.4.1. Розділити заданий трикутник за допомогою зигзагоподібної ламаної на 5 рівновеликих частин.

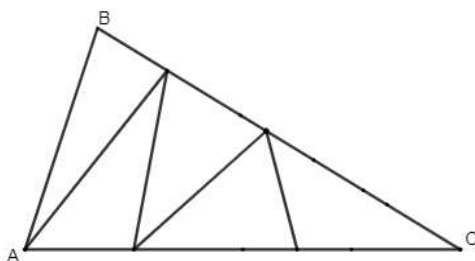


Рис. 2.12.

Методичний коментар: З одного боку, ми розуміємо корисність даної задачі для розвитку мислення учнів. З іншого боку, наш початковий експеримент показав, що задача виявилася занадто складною для учнів. Щоб створити належні умови для глибокого розуміння всіх аспектів розв’язання обраної задачі, ми запропонували учням розглянути спочатку наступну задачу:

Задача. За допомогою одного відрізка розділити даний трикутник на дві рівновеликі частини.

Змоделюємо методику розв’язування цієї задачі на уроці математики в 9 класі. Згідно навчальних програм з математики учні мають знати: властивість медіани трикутника ділити його на два рівновеликі; формули для обчислення площі трикутника: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$; означення та ознаки подібних трикутників; основні задачі на побудову; означення та властивості нерівностей. Розглянемо можливий діалог вчителя з учнями класу.

Учитель: Які є міркування щодо розв'язання вказаної задачі?

Учень А: Ми знаємо властивість медіани трикутника ділити трикутник на два рівні за площею, тому розв'язання задачі має вигляд:

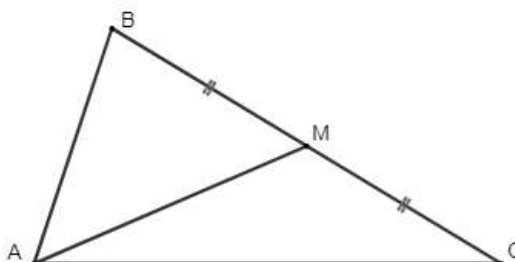


Рис. 2.13.

Учитель: Чи може хтось пояснити чому медіана AM даного трикутника має вказану властивість?

Учень В: Якщо з вершини A опустити висоту на протилежну сторону BC , то AH є висотою як для трикутника ABM , так і для трикутника ACM . Тоді маємо:

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AH,$$

$$S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot AH,$$

Оскільки $BM=CM$, то $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$.

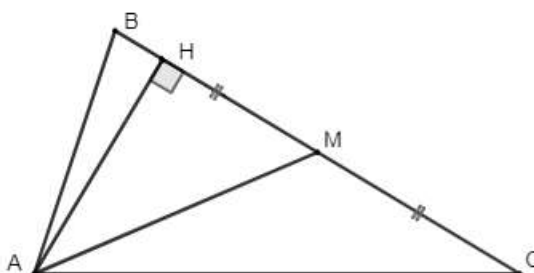


Рис. 2.14.

Отже, щоб поділити даний трикутник одним відрізком на два рівновеликі, потрібно провести його медіану.

Вчитель: Дійсно, ми розділили даний трикутник на дві рівновеликі частини. А чи можна поділити даний трикутник на дві рівновеликі частини відрізком, який не є медіаною трикутника?

Учень С: Я припустив, що можна. Тому зобразив такий малюнок:

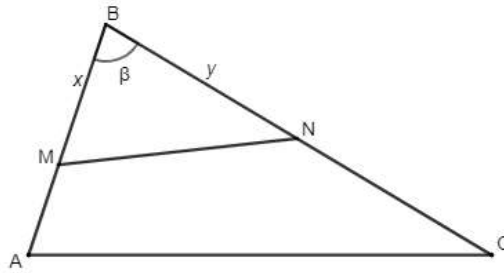


Рис. 2.15.

Якщо вказаний відрізок MN ділить трикутник ABC на дві рівновеликі частини, то $S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$.

Оскільки у цих трикутників спільний кут β , розглянемо площі за формулою $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Нехай $AB = a, BC = b, BM = x, BN = y$, тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \beta$$

$$S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin \beta$$

Оскільки, за умовою задачі має бути

$$S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}, \text{ то}$$

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \beta \right), \text{ тому}$$

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

Звідси легко бачити, що якщо $x = \frac{1}{2} \cdot a$, і $y = b$, то виконується вказана нерівність. Або навпаки, $x = a$, і $y = \frac{1}{2} \cdot b$. Тобто, це буде так, як вказано на наступних малюнках, тобто MN обов'язково є медіаною трикутника.

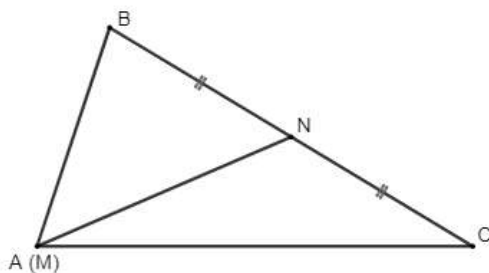


Рис. 2.16.

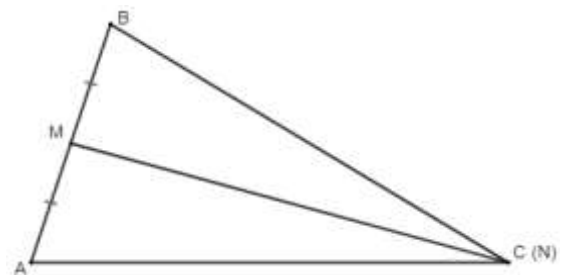


Рис. 2.17.

Вчитель: Добре. Скільки медіан можна провести в трикутнику?

Учень Д: Три. Тобто можна вказати ще й такий малюнок:

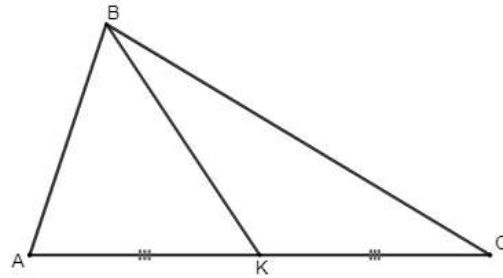


Рис. 2.18.

Вчитель: Давайте повернемося до рівності $x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$. Чому ви вирішили, що вказана рівність можлива лише у випадках $x = \frac{1}{2} \cdot a$, $y = b$ (або $x = a$, $y = \frac{1}{2} \cdot b$)? А якщо я, наприклад, візьму, що $x = \frac{3}{4} a$, то тоді $y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \div \frac{3}{4} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot b$. Тобто, поділю AB на чотири рівні частини, виберу три з них і вкажу точку M , а BC поділю на три рівні частини і виберу дві з них, отримаю точку N . Знайду площу трикутника MBN :

$$\begin{aligned} S_{\triangle MBN} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot b\right) \cdot \sin \beta = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot \sin \beta = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \beta\right) = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

$$S_{AMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MBN} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

Отже, $S_{\triangle MBN} = S_{AMNC}$.

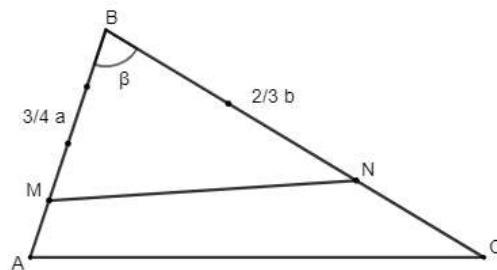


Рис. 2.19.

А це дозволяє стверджувати, що не лише медіана ділить трикутник на дві рівновеликі частини. Однак, $x = \frac{3}{4} a$, я обрала як один конкретний приклад.

Учень К: Я зрозумів! Тобто, якщо $x = \frac{5}{6}a$, то тоді $y = \frac{1}{2}ab \div \frac{5}{6}a = \frac{3}{5}b$.

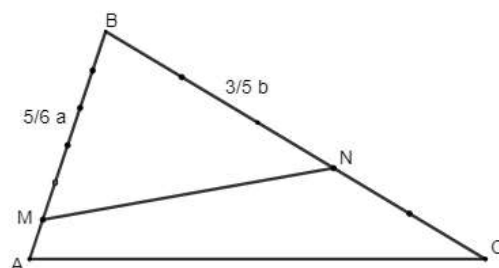


Рис. 2.20.

Такий відрізок MN також поділить даний трикутник на дві рівновеликі частини.

Учень М: А у мене не виходить, бо я взяв $x = \frac{1}{4}a$, то тоді

$$y = \frac{1}{2}ab \div \frac{1}{4}a = 2b.$$

Хоча $S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC}$, ми ж не можемо стверджувати, що відрізок MN поділив трикутник ABC на дві частини рівні за площею? (мал. 9)

Вчитель: Так!!! Тобто варто розглянути умову, в якому проміжку має знаходитися x , щоб точка N належала відрізку BC . Що ви думаєте з цього приводу?

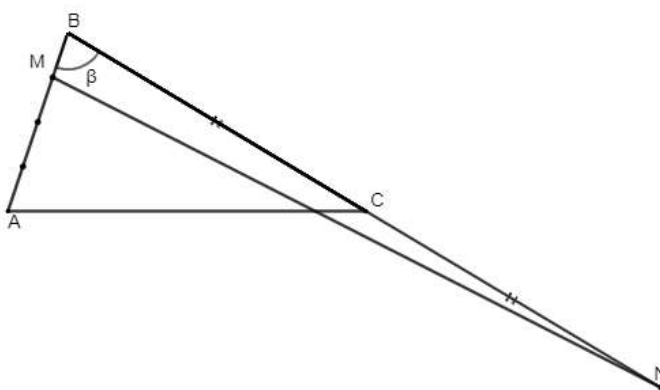


Рис. 2.21.

Учень N: Я помітив, якщо $BM = \frac{1}{2}a$, або $BM = \frac{3}{4}a$, або $BM = \frac{5}{6}a$, то все було гаразд. А якщо $BM = \frac{1}{4}a$, то точка N вийшла за межі відрізка BC .

Мабуть, $BM \geq \frac{1}{2}a$?

Вчитель: Давайте перевіримо твою здогадку: $x \geq \frac{1}{2}a$, тоді $\frac{1}{2}a \leq x$.

Ми знаємо, що $x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, тоді $\frac{1}{2} \cdot a \cdot y \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, отже, $y \leq b$.

Тобто, якщо $x \geq \frac{1}{2}a$, то $y \leq b$, а це означає, що $N \in BC$.

Учень F: А я подивіться як зробив: $MN \parallel AC$.

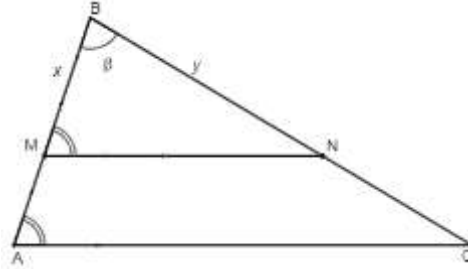


Рис. 2.22.

Оскільки $MN \parallel AC$, то $\angle BMA = \angle BAC$, тому $\triangle ABC \sim \triangle MBN$, а це означає, що $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Якщо $S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC}$, то $x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$. Тому маємо, що

$$\begin{cases} x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ y = \frac{x \cdot b}{a} \end{cases}.$$

Отже, $x \cdot \frac{x \cdot b}{a} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$,

$$\frac{x^2}{a} = \frac{a}{2},$$

$$2 \cdot x^2 = a^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

А як тепер вибрати точку M ?

Вчитель: $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$. Тобто потрібно побудувати відрізок $a \cdot \sqrt{2}$,

якщо відомий відрізок a .

Учень Z: Я знаю, що якщо сторона квадрата a , то його діагональ $a \cdot \sqrt{2}$. Тому побудуємо квадрат на стороні a трикутника ABC , проведемо його діагоналі, які точкою перетину діляться навпіл і отримаємо відрізок $x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$.

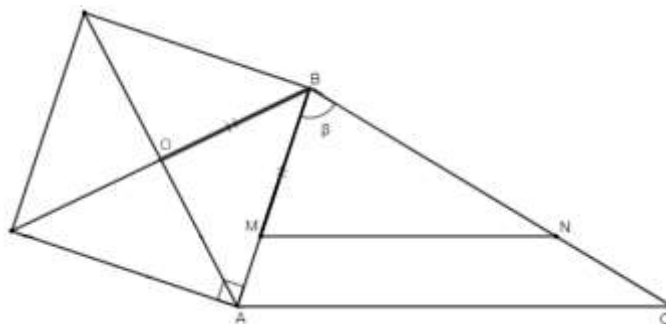


Рис. 2.23.

$$1) BM = BO = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

$$2) MN \parallel AC$$

$$\text{Оскільки } \triangle ABC \sim \triangle MBN, \text{ то } \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Вчитель: Давайте підсумуємо результати нашого дослідження:

1) Даний трикутник одним відрізком можна розділити на дві рівновеликі частини.

2) Дамо характеристику положення цього відрізка:

- на одній із сторін даного трикутника обираємо точку M , таку що: відстань від вершини трикутника дорівнює x .

- якщо $x = \frac{1}{2}a$, то відрізок є медіаною даного трикутника;
- якщо $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$, то відрізок паралельний до сторони трикутника;
- якщо $x = a$, то відрізок є медіаною даного трикутника;
- якщо $x \in \left(\frac{1}{2}a; \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a; a\right)$, то на одній із двох інших сторін трикутника обираємо точку N таку що, відстань від тієї ж вершини трикутника (див. т.М) дорівнює y , причому $y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \div x$.

Відразу ж зауважимо, що основною метою вказаної методики розв'язування даної задачі було створення умов для формування логічного

складника математичної компетентності учнів. Очевидно, учні були поставлені в умови здійснення певного дослідження під керівництвом вчителя. Дуже добре, якщо змодельована картинка, є картинкою уроку геометрії в 9 класі. По-перше, це може бути клас поглибленого навчання математики, тому проблем ні з навчальним часом, ні з рівнем математичної компетентності учнів не має бути. Якщо ж, ми маємо справу з учнями 9 класу загальноосвітньої школи, то виникає питання: чи може вчитель на уроках дозволити собі стільки часу витратити на розв'язування однієї задачі? Відповідь на це питання потребує врахування багатьох різних чинників. З поміж них вкажемо:

- рівень навчальних досягнень учнів конкретного класу з геометрії;
- рівень пізнавальної активності учнів класу;
- пріоритети вчителя у визначенні цілей конкретного уроку;
- усвідомлення вчителем необхідності формування та розвитку логічного складника математичної компетентності учнів.

Якщо ж вчитель, все-таки, не знаходить достатньо аргументів та можливостей, щоб розвивати на уроках математики логічний складник математичної компетентності учнів з використанням вказаної вище методики розв'язування спеціально відібраних задач, то такі задачі можуть стати основою для організації проектної діяльності учнів у навчання математики в школі. Для прикладу, проект може мати назву «Розбиваємо трикутник на рівновеликі частини» і виконуватися групою здібних до навчання математики учнів. Сутність пошукової діяльності учнів може бути зведена до розв'язування кількох задач. Зокрема:

Задача 1. За допомогою одного відрізка розділити даний трикутник на дві рівновеликі частини.

Задача 2. За допомогою двох відрізків розділити даний трикутник на три рівновеликі частини.

Задача 3. Розділити заданий трикутник за допомогою зигзагоподібної ламаної на 5 рівновеликих частин.

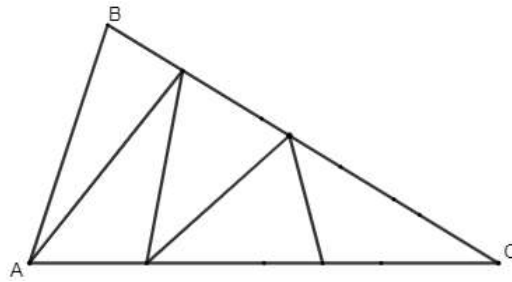


Рис. 2.24.

Зокрема, учитель має орієнтуватися, чи варто давати учням малюнки-підказки. Для прикладу, до задачі 2 це могли б бути малюнки:

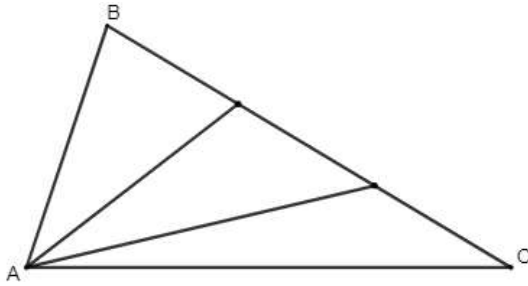


Рис. 2.25.

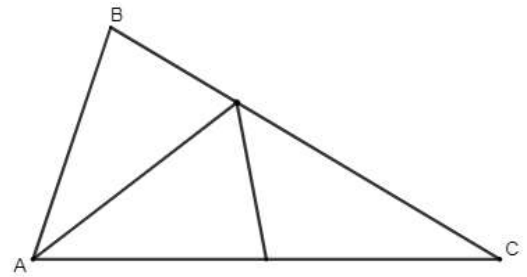


Рис. 2.26.

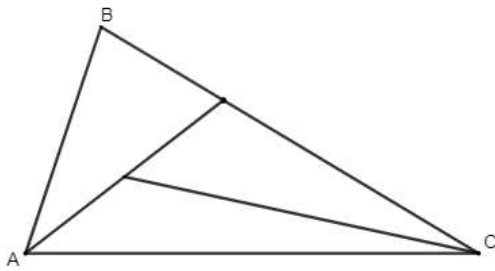


Рис. 2.27.

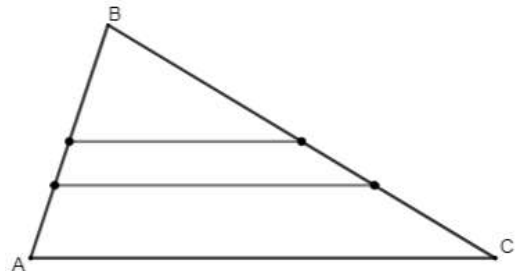


Рис. 2.28.

Задача 3 у такій комбінації задач потрапляє в кращі умови для досягнення мети: формування логічного складника математичної компетентності учнів. Набутий учнями досвід розв'язування задач 1 та 2 дозволяє усвідомити основну ідею: якщо спочатку розглянути трикутник ACD (I), площа якого становить $\frac{1}{5}$ від площі трикутника ABC : для цього досить вибрати точку D так, щоб $CD = \frac{1}{5}CB$. Площа трикутника дорівнює пів добутку сторони на висоту проведену до неї. Якщо візьмемо п'яту частину сторони, то матимемо п'яту частину площі. Висота при цьому одна і та ж.

Продовжуючи діяти аналогічним чином, розглядаємо трикутник ADE (II), площа якого становить $\frac{1}{4}$ частини, що залишилася від вихідного трикутника, - трикутника ABD: для цього досить вибрати точку E так, щоб $AE = \frac{1}{4}AB$. Потім досить вибрати точку F так, щоб $DF = \frac{1}{3}DB$ і, нарешті, точку G так, щоб $EG = \frac{1}{2}EB$.

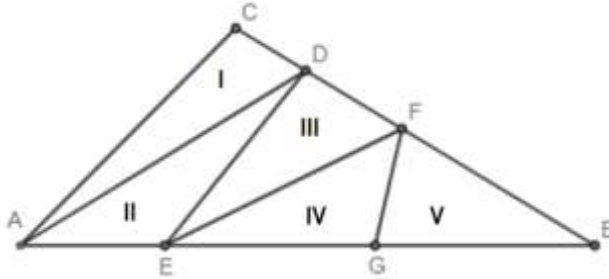


Рис. 2.29.

Особливо актуальною така задача є на етапі систематизації та узагальнення знань та умінь учнів з теми «Площі фігур». Задачі на дослідження самі по собі недостатні для розвитку логічних міркувань учнів. Методична діяльність учителя є надважливою для організації активної розумової діяльності учнів. Учитель має допомагати учням зрозуміти чийсь міркування, просити альтернативні обґрунтування, зосереджуватися на поясненні «чому?». Крім того, важливо, щоб учитель заохочував учнів ділитися своїми ідеями та різними версіями своїх міркувань, прагнучи врахувати неправильний або частковий внесок учнів та розширити їх справжній внесок.

Вчитель і учні мають чітко відслідковувати те, про що говорять учні у процесі розв'язування задачі, усвідомлювати відмінності між різними стратегіями міркувань, і використовувати цю рефлексію для регулювання свого власного розуміння розв'язання задачі. Через навчання розв'язання окремих проблем можна стимулювати логічне мислення учнів та посилити потребу в аргументації та обговоренні як найважливішій частині навчання математики.

Підсумовуючи зазначимо, що на пошуково-творчому етапі формування та розвитку логічної компетентності учнів ми рекомендуємо вчителям математики прагнути перетворити процес навчання математики у певне привабливе дослідження, забезпечити можливість глибоко пізнавати невідоме і можливість мислити гнучко і різнобічно... Важливо, щоб прийоми, методи та засоби формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики урізноманітнювалися і поступово ставали складнішими, щоб зростала питома вага активних розумових дій. У процесі наших досліджень ми переконалися, що вдало відібрана комбінація задач, по-перше, створює хороші умови для формування математичних умінь учнів, по-друге, дозволяє використати, а тим самим активізувати, закріпити, систематизувати та розвинути математичні знання. По-третє, розв'язування вдало відібраної задачі, або їх комбінацій, дозволяє створити умови для розвитку логічного складника математичної компетентності учнів. Також ми вважаємо, що учитель математики має усвідомлювати: процес розв'язування задачі це умови формування логічної компетентності учнів. Одним із способів удосконалення навчання математики в школі може бути активізація цих умов.

Висновки до розділу 2

Враховуючи психологічні особливості періоду основної школи, в якому виокремлюють молодший підлітковий вік (11–12 років) і старший підлітковий вік (13–15 років) та особливості розвитку розумових операцій учнів підліткового віку виділено чотири етапи формування логічного складника математичної компетентності учнів: діагностико-прогностичний етап (два семестри); мотиваційно-пізнавальний етап (3 семестри); активно-діяльнісний етап (3 семестри); пошуково-творчий етап (2 семестри).

Діагностико-прогностичний етап реалізується упродовж I-II семестрів навчання математики в 5 класі. Важливою на цьому етапі є діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів. Це дає можливість з'ясувати рівень сформованості логічних умінь учнів, здобутий під час навчання у початковій школі, прогнозувати особливості подальших етапів формування логічної компетентності та побудувати стратегію його формування, а також сприяє усвідомленню учнями логічних умінь.

Мотиваційно-пізнавальний етап здійснюється I та II семестрів 6 класу та I семестру 7 класу. На цьому етапі формується пізнавальний інтерес та позитивна мотивація учнів до формування та розвитку логічного складника математичної компетентності, оволодіння логічними вміннями та прийомами.

Активно-діяльнісний етап реалізується у процесі навчання математик в II семестрі 7 класу та I і II семестрах 8 класу. За допомогою різноманітних методів, прийомів, організаційних форм і засобів відбувається формування основних показників логічного складника математичної компетентності учнів.

На *пошуково-творчому* етапі, який охоплює I-II семестри 9 класу, відбувається творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через впровадження пошукової та дослідницької діяльності.

Основним засобом формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи у дисертації вказується спеціальна система задач сконструйована вчителем математики. Нами пояснено доцільність і можливість використання основних типів задач: на доведення, на дослідження, евристичних; задач з декількома розв'язками; задач з неповною умовою; задач з надлишковою умовою; математичних софізмів; логічних задач.

Цілеспрямована методична діяльність вчителя математики основної школи є основою для розвитку логічної компетентності учнів у процесі навчання математики. До основних інструментів якісної методики формування логічної компетентності учнів ми відносимо: майстерність учителя ставити вдалі запитання, методично виважено добирати задачі та їх комбінації, а також комплекс інших спеціальних прийомів та засобів формування логічного мислення учнів, який має бути підібраний учителем з урахуванням конкретного навчального середовища.

Основні результати першого розділу дисертації відображено у роботах автора [5]; [6]; [7]; [8]; [48]; [49]; [61]; [62]; [63]; [64].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 2

1. Ачкан В. В. Проблема реалізації компетентнісного підходу при вивченні курсу алгебри та початків аналізу. *Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету* (Педагогічні науки). №1. Бердянськ : БДПУ, 2007. С. 60-65.
2. Ачкан В. В. Формування математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей : автореф. дис. на канд. пед. наук. Київ, 2009. 20 с.
3. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: методические основы. Москва : Просвещение, 1982. 192 с
4. Байгушева И. А. Формирование математической компетентности в ВУЗе. *Современные проблемы науки и образования*. 2012 №1. URL: <http://www.scienceeducation.ru/101-5543>.
5. Бачинська Р. С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2018. Випуск 51. С. 29–33.
6. Бачинська Р. С. Місце і роль історичних задач на уроках математики в школі. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики* : зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 26-27 листопада 2015 р., м. Вінниця, 2015. С. 227–229.
7. Бачинська Р. С. Проблемне навчання як технологія формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Чернівці, 11 -12 жовтня 2018 р. С. 38 – 41.
8. Бачинська Р. С. Типологія завдань для розвитку логічної компетентності учнів на уроках математики. *Методичний пошук*

- вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 18 жовтня 2018 р. С. 137 – 140.*
9. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
 10. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2016. 254 с.
 11. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
 12. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. 8 клас. К. : Видавництво «Відродження», 2016. 272 с.
 13. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
 14. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 192 с.
 15. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика для 5 кл.: підручн. для загальноосвіт. навч. закл. К. : Зодіак-ЕКО, 2005. 352 с.
 16. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: 6 кл.: підручн. для загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2006. 304 с.
 17. Бех І. Д. Теоретико-прикладний сенс компетентнісного підходу в педагогіці. *Педагогіка і психологія*. 2009. №2 (63). С. 26-
 18. Бібік Н. М. Компетентнісний підхід: рефлексивний аналіз застосування. *Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи* / Під заг. ред. О. В. Овчарук ; Міністерство освіти і науки України. К. : К.І.С., 2004. С. 45-50.
 19. Бондар С. П. Термінологічний аналіз понять «компетенція» і «компетентність» у педагогіці : сутність та структура. *Освіта і управління*. 2007. Т. 10. № 2. С. 93-99.
 20. Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

- 21.Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 224 с.
- 22.Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : «Зодіак-ЕКО», 2009. 241 с.
23. Виноградова Е. П. Модель формирования математической компетентности будущего учителя начальных как система качества математического образования. Гарантии качества проф. образования : тезисы докладов межд. научно-практ. конференции. Барнаул. 2010. URL : <http://elib.altstu.ru/elib/php5/disser/conferenc/2010/01/>.
- 24.Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. *Вища освіта України*. 2008. №3. С. 23-30.
- 25.Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? *Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – м. Суми) : У 3-х частинах. Ч. 1. Суми : Мрія, 2012. С. 36-38.*
- 26.Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. К. : Либідь, 1997. 368 с.
- 27.Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. URL: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/derj-stand.html>.
- 28.Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- 29.Додаток до листа МОН України від 17.08.2016 1/9-437 «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у загальноосвітніх навчальних закладах». URL: <http://old.mon.gov.ua/ua/about-ministry/normative/6119->.
- 30.Зимняя И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования. 2011. URL : <http://aspirant.rggu.ru/article.html?id=50758>.

- 31.Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2009. № 2. С. 165-174.
- 32.Ильин В. С. О концепции целостности учебно-воспитательного процесса. Методологические основы учебно-воспитательного процесса. Волгоград, 1981. С. 5-14.
- 33.Істер О. С. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2015. 256 с.
- 34.Істер О. С. Алгебра : підручн. для 8-го класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2016. 272 с.
- 35.Істер О. С. Алгебра : підручн. для 9-го класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2017. 264 с.
- 36.Істер О. С. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2015. 184 с.
- 37.Істер О. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2016. 216 с.
- 38.Істер О. С. Геометрія : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 240 с.
- 39.Істер О. С. Математика. 5 кл.: підручн. для закл. заг. серед. освіти. 2-ге вид., доопрац. Київ : Генеза. 2018. 288 с.
- 40.Істер О. С. Математика: підруч. для 6 кл.: підручн. для загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза. 2014. 296 с.
- 41.Кугай Н. В. Функції задач на доведення у шкільному курсі математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 34. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2010. С. 77 – 81.
- 42.Локшина О. І. Моніторинг рівнів досягнень компетентностей: інноваційні підходи. *Компетентнісний підхід у сучасній освіті : світовий досвід та українські перспективи* / Під заг. ред. О. В.Овчарук; Міністерство освіти і науки України. К. : К.І.С., 2004. С. 25-32.

- 43.Луговий В. І. Європейська концепція компетентнісного підходу в вищій школі та проблеми її реалізації в Україні. *Педагогіка і психологія*. 2009. №2 (63). С. 13-25.
- 44.Луговий В. І. Компетентності та компетенції: поняттєво-термінологічний дискурс. *Вища освіта України : теоретичний та науково-методичний часопис*. № 3 (дод. 1). Тематичний випуск «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології» : збірник / Ін-т вищої освіти АПН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. К. : Гнозис, 2009. С. 8-14.
- 45.Малафійк І. В. Дидактика. Навч. посібник. Київ: Кондор, 2009. 406 с.
- 46.Матвейкина В. П. Модель формирования математической компетентности студентов университета. *Вестник ОГУ*. 2012 № 2 (138). С. 115-121.
- 47.Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. праць. Вип. 26. Київ-Вінниця, 2010. С. 39–44.
- 48.Матяш О.І. Мілян Р. С. Вчимося мислити логічно. Навчально-методичний посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 2020. 106 с.
- 49.Матяш О.І. Мілян Р. С. Навчаємо мислити логічно. Методичні рекомендації для вчителів. Тернопіль: Вектор, 2020. 104 с.
- 50.Матяш О.І. Удосконалення професійної підготовки вчителя математики в умовах компетентнісного підходу. *Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus*. Спеціальний випуск. Варна, 2015. С. 241-246.
- 51.Матяш О. И. Формирование математических компетенций учащихся использовать метод координат при решении задач планиметрии. МАТТЕХ 2012: научна конференція Шуменски університет «Епископ Константин Преславски». Болгарія, 2012. С. 257–260.

52. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге вид., переробл. Х. : Гімназія, 2020. 288 с.
53. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2016. 240 с.
54. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.
55. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2015. 224 с.
56. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2016. 208 с.
57. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2017. 240 с.
58. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. 5 кл.: підручн. для закладів заг. середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 272 с.
59. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2014. 400 с.
60. Михайленко Л. Ф. Розв'язування текстових задач як засіб формування математичної компетентності старшокласників. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : збірник наукових праць, Випуск 46. Київ ; Вінниця : Планер, 2016. С .37-41.
61. Мілян Р. С. Geogebra як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2019. С. 138 – 140.
62. Мілян Р. С. Добірка задач для формування логічної компетентності учнів на уроках геометрії. *Методичний пошук вчителя математики:*

- зб. наук. праць за матеріалами III Всеукр. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 25 квітня 2019 р. С. 142 – 150.
63. Мілян Р. С. Логічний складник геометричної компетентності учнів основної школи. *Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика: тези доповідей II міжнародної конференції (23–25 березня, м. Харків, Україна)*. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. С.130-131.
64. Мілян Р. С. Мова вчителя як засіб формування логічного мислення учнів. Матеріали IX Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси, 9-10 квітня 2021 р. С. 75-76.
65. Морозова Т. Ю. Погляд на освітні стандарти крізь призму компетентнісного підходу. *Проблеми освіти : науково-методичний збірник* Вип. 46, Ч. 2 : Болонський процес в Україні. Київ : Знання. 2005. С. 73-79.
66. Немченко В. Вебінар «Проектне навчання: розвиваємо логічне, критичне та креативне мислення школярів». URL: <https://naurok.com.ua/webinar/proektne-navchannya-rozvivayemo-logichne-kritichne-ta-kreativne-mislennya-shkolyariv>.
67. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні : рекомендації з освітньої політики. Київ : К.І.С., 2003. С. 13-41.
68. Овчарук О. В. Розвиток компетентнісного підходу: стратегічні орієнтири міжнародної спільноти. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Під заг. ред. О. В. Овчарук. Київ : К.І.С., 2004. С. 5-14.
69. Онопрієнко О. Компетентнісно зорієнтовані задачі як засіб формування математичної компетентності учнів. *Початкова школа*. № 3. 2013. С. 23-26.
70. Офіційні звіти про проведення ЗНО. URL: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>.

- 71.Петрова Е. М. Модель формирования математической компетентности специалистов технического профиля. Известия Российского государственного университета им. А. И. Герцена. Выпуск №133. 2012. С. 238-245.
- 72.Пометун О. І. Дискусія українських педагогів навколо питань запровадження компетентнісного підходу в українській освіті. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Під заг. ред. О. В. Овчарук ; Міністерство освіти і науки України. К. : К.І.С., 2004. С. 64-70.
- 73.Пометун О. І. Теорія та практика послідовної реалізації компетентнісного підходу в досвіді зарубіжних країн. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Під заг. ред. О. В. Овчарук ; Міністерство освіти і науки України. К. : К.І.С., 2004. С. 15-24.
- 74.Про затвердження Положення про дистанційне навчання: Наказ Міністерства освіти і науки України від 25.04.2013 р. № 466 / Верховна Рада України. URL: [http:// zakon.rada.gov.ua](http://zakon.rada.gov.ua).
75. Разливинских И. Н. Формирование математической компетентности у будущих учителей начальных классов в процессе профессиональной подготовки в вузе : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.08 – теория и методика профессионального образования. Челябинск, 2011. 214 с.
- 76.Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Х. : Факт, 2005. 360 с.
- 77.Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... докт. пед. наук. Харків, 2005. 526 с.
- 78.Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. *Математика в школі*. №5. 2007. С. 2-7.

- 79.Рашкевич Ю. М. Компетентнісний підхід в побудові навчальних програм. 2014. 18 с. URL: http://www.mnau.edu.ua/files/03_05/2012-rashkevych1.pdf
- 80.Савченко О. Я. Уміння вчитися як ключова компетентність загальної середньої освіти. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Під заг. ред. О. В. Овчарук ; Міністерство освіти і науки України. К. : К.І.С., 2004. С. 33-44.
- 81.Самарук Н. М. Формування математичої компетентності – основна мета математичної підготовки студентів. *Педагогические науки*. URL: http://www.rusnauka.com/15_NPN_2013/Pedagogica/2_139027.doc.htm
- 82.Сафонова І. Я. Формування математичної компетентності у старшокласників. *Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології*. 2013. Вип. 2. С. 397-402.
- 83.Скворцова С. О. Професійна компетентність: зміст поняття та класифікація. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету*. Серія: Педагогіка. Тернопіль, 2009. №5. С. 27-33.
- 84.Слепкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів.К. : Зодіак-ЕКО , 2000. 512 с.
- 85.Степко М. Ф. Компетентнісний підхід до організації підготовки фахівців, його розуміння і проблеми використання в вищій школі. *Педагогіка і психологія*. 2009. №2 (63). С. 42-51.
- 86.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Бочко О. П., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика. 5 кл.: підручн. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.
- 87.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Бочко О. П., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика. 6 кл.: підручн. для загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2014. 304 с.

- 88.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.
- 89.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.
- 90.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
- 91.Тарасенкова Н., Кірман В. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Наука-вчителю*. 2008. С. 3–9.
- 92.Тесленко І. Ф. Педагогічні основи викладання геометрії в середній школі: дис. ... д-ра пед. наук. Київ, 1969. Т. 1 (294 с.); Т. 2 (596 с.).
- 93.Ткаченко О. М., Кожевнікова І. М., Шатохіна Л. П. Формування компетентностей на уроках математики. *Математика в школах України*. 2014. № 6 (414). С. 2-3.
94. Хуторской А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты. 2002. URL : <http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm4>.
- 95.Чепелев В. И., Подласый И. П. Модели обучения. *Программированное обучение*. Київ : Вища школа, 1975. Вып. 12. С. 3–10.
- 96.12 інтерактивних онлайн-дошок для дистанційного навчання та спільної роботи URL: <https://osvitanova.com.ua/posts/4181-12-interaktyvnykh-onlain-doshok-dlia-dystantsiinoho-navchannia-taspilnoi-roboty>
97. Anderson, L. & Krathwohl, D. R. A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessin: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. New York: Longman, 2001. 336 p.
- 98.Bloom B. S. Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. New York: Longman, 1984. 207 p.

РОЗДІЛ 3.

ОРГАНІЗАЦІЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1. Організація й перебіг дослідно-експериментальної роботи

З метою перевірки ефективності запропонованої нами методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи було проведено педагогічний експеримент, під час якого *з'ясовано* типові задачі та вміння методичної діяльності вчителів математики щодо формування та розвитку логічного мислення учнів; *встановлено наявні протиріччя* у практиці формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів в школі; *здійснено* пошук шляхів удосконалення методичної діяльності учителів математики спрямованої на розвиток прийомів логічного мислення в учнів; *з'ясовано* показники сформованості логічного складника предметної математичної компетентності учнів, *науково аргументовано* систему задач для формування та розвитку логічної компетентності учнів, *перевірено* її ефективність; перевірено на ефективність виокремлені у дослідженні організаційно-педагогічні умови формування та розвитку логічної компетентності учнів; *встановлено* позитивну динаміку змін у формуванні логічного складника предметної математичної компетентності учнів в основній школі.

Створення, дослідження, уточнення, корекція та перевірка ефективності запропонованої методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи здійснювались у процесі дослідно-експериментальної роботи, яка, зокрема, вміщує етап паралельної роботи автора дисертації в педагогічному університеті, в якості викладача методики навчання математики.

З метою забезпечення об'єктивності результатів педагогічного експерименту, дослідно-експериментальна робота з теми дослідження тривала з 2015 по 2021 роки.

Педагогічний експеримент складався з трьох етапів:

- ✓ констатувальний (2015-2017 рр.);
- ✓ пошуковий (2018-2019 рр.);
- ✓ формувальний (2020-2021 рр.).

Експериментальною базою дослідження на констатувальному етапі педагогічного експерименту став Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Державний навчальний заклад «Тернопільський центр професійно-технічної освіти», Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж», факультет математики в університеті Александра Іоана Кузи в місті Ясси.

Метою констатувального етапу педагогічного експерименту було з'ясування проблем методичної діяльності вчителів математики, виокремлення типових задач методичної діяльності та відповідних методичних умінь для розвитку прийомів мислення в учнів на уроках математики; встановлення чинників ефективності формування складників предметної математичної компетентності в учнів.

Для організації дослідно-експериментальної роботи були поставлені такі завдання констатувального етапу педагогічного експерименту:

- *проаналізувати* державні документи, педагогічну, навчально-методичну літературу щодо завдань, умов та проблем формування предметної математичної компетентності в учнів.
- *з'ясувати типові* проблеми методичної діяльності вчителів математики в практиці навчання учнів математики.
- *з'ясувати* специфіку набуття методичних знань та умінь майбутніми учителями математики на факультеті математики в університеті

Александра Іоана Кузи в місті Ясси у процесі вивчення курсу Дидактика математики (Didactics of mathematics) у викладача Роксани Паной (Roxana Rănoi) за програмою академічної мобільності Erasmus+ для студентів вищих навчальних закладів із країнами-партнерами.

- виокремити конкретну актуальну проблему методичної діяльності учителів математики для наступного дослідження.
- визначити гіпотезу дослідження.

Серед методів дослідно-експериментальної роботи, які використовувалися на цьому етапі, вкажемо:

1. Метод педагогічного спостереження, як спеціально організоване сприймання педагогічного процесу в природних умовах:

- спостереження методичної діяльності різних учителів математики в реальному процесі навчання математики в школі для отримання достовірних відомостей про типові проблеми методичної діяльності вчителів у навчанні учнів математики;
- спостереження діяльності студентів у набутті методичних знань та умінь у процесі фахової підготовки майбутніх учителів математики в педагогічному університеті;
- спостереження навчальної діяльності учнів на заняттях з математики для виокремлення й аналізу методів, прийомів і засобів формування предметної математичної компетентності, прийомів активізації їхньої пізнавальної діяльності;
- спостереження діяльності студентів у набутті методичних знань та умінь у процесі фахової підготовки на факультеті математики в університеті Александра Іоана Кузи в місті Ясси.

2. Метод педагогічного експерименту, як науково поставлений дослід організації навчання у спеціально визначених умовах:

- виконання обов'язків вчителя математики автором дослідження для уточнення типових задач та проблем методичної діяльності вчителя математики;

- цілеспрямована зміна умов педагогічного впливу на учнів у процесі навчання математики; перетворення й удосконалення умов формування їхнього логічного мислення; розгляд й аналіз досліджуваного явища в експериментальних умовах;
 - виконання обов'язків викладача методики навчання математики автором дослідження для уточнення висновків дослідження у процесі апробації його результатів у фаховому середовищі.
3. *Метод вивчення педагогічного досвіду*, використаний з метою узагальнення методів, прийомів та засобів формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи. Зокрема, метод вивчення педагогічного досвіду використаний нами для з'ясування специфіки набуття методичних знань та умінь майбутніми учителями математики на факультеті математики в університеті Александра Іоана Кузи в місті Ясси у процесі вивчення автором дисертації курсу Дидактика математики (Didactics of mathematics) у викладача Роксани Паной (Roxana Pănoi) за програмою академічної мобільності Erasmus+ для студентів вищих навчальних закладів із країнами-партнерами.
4. *Метод бесіди* із учнями, вчителями математики, майбутніми вчителями математики та викладачами методики навчання математики:
- для вивчення ставлення учнів до процесу навчання математики, та усвідомлення ними умов для формування власного мислення на уроках математики;
 - для з'ясування розуміння вчителями математики різних методів, прийомів і засобів формування окремих складників предметної математичної компетентності учнів;
 - для виявлення рівня усвідомлення викладачами методики навчання математики актуальних завдань і прийомів формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів і відповідно формування готовності та здатності у майбутніх учителів математики

до виконання таких завдань.

5. *Метод анкетування* для підвищення об'єктивності зібраної інформації про педагогічні факти, явища, процеси, їх типовість, за рахунок збільшення кількості опитаних.

Результати *констатувального етапу* педагогічного експерименту: встановлена доцільність наукового обґрунтування методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи в сучасних умовах розвитку шкільної освіти в Україні.

Результати цього етапу доповідалися та обговорювалися на засіданнях кафедри алгебри та методики викладання математики, звітних наукових конференціях викладачів та студентів Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка та Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, всеукраїнських науково-практичних конференціях [1; 2; 5;7; 8; 33; 35; 38].

Мета *пошукового етапу* педагогічного експерименту, який проходив з 2018 р. по 2019 р., полягала в *науковому обґрунтуванні* методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи: *з'ясуванні* показників сформованості логічного складника математичної компетентності учнів, *визначенні* основних етапів формування логічної компетентності учнів, *з'ясуванні* ефективних методів, прийомів і засобів формування логічного складника математичної компетентності учнів; *побудові* відповідної моделі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі, *визначенні* організаційно-педагогічних умов.

Експериментальною базою дослідження на *пошуковому етапі* педагогічного експерименту став Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, обласний науковий ліцей-інтернат Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж», Чернівецька загальноосвітня школа I-II ступенів

№ 19, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 37, Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 38, Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 16 імені Володимира Левицького, Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 3.

У педагогічному експерименті на цьому етапі взяли участь всього біля 560 учнів, 24 вчителі математики, 146 студентів (майбутніх учителів математики) і 12 викладачів педагогічних університетів, що забезпечують методичну підготовку майбутніх учителів математики.

Упродовж *пошукового* етапу педагогічного експерименту були отримані такі результати:

- *обґрунтовано* перелік функцій та задач методичної діяльності вчителя математики для формування логічної компетентності учнів.
- *з'ясовано* показники логічної компетентності учнів основної школи.
- *визначено й обґрунтовано* структурні компоненти моделі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі.
- *виявлено* чинники розвитку методичної компетентності майбутніх учителів математики в процесі організації та підготовки до друку щорічного тематичного збірника публікацій «Методичний пошук» на тему «Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики».
- *здійснено* поділ класів учнів на контрольні та експериментальні.
- *забезпечено* реалізацію організаційно-педагогічних умов для формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі.
- *апробовано* методи, прийоми та засоби формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі.
- *виокремлено* організаційно-педагогічні умови формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі.

-розроблено й апробовано систему задач для формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів у процесі навчання математики в основній школі.

На *пошуковому* етапі педагогічного експерименту в експериментальних класах навчання математики здійснювалося за пропонованою нами методикою формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів. На цьому етапі відбулася корекція моделі поетапної методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів в основній школі.

Результати *пошукового етапу* педагогічного експерименту доповідались та обговорювались на міжнародних науково-практичних конференціях [5; 6; 7; 8] всеукраїнських науково-методичних конференціях [2; 3]. Окремі результати пошукового етапу педагогічного експерименту відображені в також в публікаціях [4; 34; 33].

Метою *формуального етапу* педагогічного експерименту, який проходив упродовж 2020 – 2021 років, було *встановлення* динаміки змін у формуванні логічного складника предметної математичної компетентності учнів в основній школі в результаті експериментальної роботи, *оцінка* результативності застосування запропонованої нами поетапної методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів в основній школі; *впровадження* результатів дослідно-експериментальної роботи в педагогічну практику.

На *формуальному етапі* педагогічного експерименту отримані наступні результати:

✓ *Підготовлено й упроваджено* в процес навчання математики в школі навчально-методичних посібників:

- Матяш О.І. Мілян Р. С. Вчимося мислити логічно. Навчально-методичний посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 2020. 106 с.
- Матяш О.І. Мілян Р. С. Навчаємо мислити логічно. Методичні рекомендації для вчителів. Тернопіль: Вектор, 2020. 104 с.

- ✓ *Здійснено* статистичний аналіз та інтерпретацію результатів дослідження.
- ✓ Результати дослідження *впроваджено* в практику діяльності п'яти шкіл та двох педагогічних університетів, що здійснюють підготовку майбутніх учителів математики.
- ✓ *Сформульовано* висновки дослідно-експериментальної роботи.
- ✓ *Оформлено* текст дисертаційної роботи.

Результати *формульованого* етапу педагогічного експерименту доповідались на обговорювались на міжнародних науково-практичних конференціях [37; 39; 40] та на всеукраїнських науково-практичних конференціях [35; 38].

3.2. Обробка й аналіз результатів педагогічного експерименту

З метою оцінювання рівня усвідомлення вчителями математики важливості розвитку логічної компетентності учнів основної школи у процесі навчання математики нами було проведено діагностування стану цієї проблеми шляхом опитування й анкетування учителів математики різних регіонів України. Під час курсів підвищення кваліфікації вчителів математики на базі обласних інститутів післядипломної педагогічної освіти, а також під час проведення численних семінарів, круглих столів, тренінгів, майстер-класів вчителів у ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, було запропоновано анкети. Усього анкетуванням було охоплено 75 осіб, які мали достатній педагогічний стаж. Крім того, проводилися бесіди з окремими вчителями математики основної школи Вінницької та Тернопільської областей. Запитання анкет були розроблені нами з урахуванням мети та завдань нашого експериментального дослідження. В анкетах були використані завдання як закритого (тестового) характеру, так і відкритого типу, що дало можливість учителям математики висловити та пояснити власні методичні переконання.

Респондентам було запропоновано анкету, яка складалася з 9 запитань, спрямованих на з'ясування різних аспектів практичної організації роботи

щодо розвитку логічного мислення учнів основної школи у процесі навчання математики (додаток В). Аналіз анкет дав змогу узагальнити основні тенденції в організації методичної діяльності вчителів щодо розвитку логічного складника математичної компетентності учнів на уроках математики в основній школі.

Перше запитання анкети «Розкрийте поняття «логічна компетентність»» мало на меті з'ясувати, як учителі математики, які працюють в 5-9 класах, розуміють саме поняття «логічна компетентність». Більшість учителів (63 %) у поданих відповідях навели такі характеристики логічної компетентності: здатність до аналізу, синтезу, висловлення й аргументування власної думки; 28 % учителів відзначили, що логічна компетентність – це вміння критично оцінювати інформацію, власні та інші твердження; утім, 9 % опитаних учителів математики не відповіли на це запитання.

Аналіз другого питання анкети «Охарактеризуйте сутність поняття «методика формування логічного складника математичної компетентності»» виявив, що 34 % учителів основної школи на достатньому рівні розкрили сутність вказаного поняття; 52 % опитаних учителів математики мають досить поверхові уявлення про відповідну методику; 14 % – не змогли нічого конкретного повідомити про методику формування логічного складника математичної компетентності учнів.

Хоча 57 % опитаних учителів математики під час відповіді на третє запитання анкети «Аргументуйте актуальність методики формування логічної компетентності учнів в основній школі» зазначили, що ця проблема набуває особливої актуальності впродовж останніх років, в період реформування української шкільної освіти. 35 % учителів зауважили, що саме вміння логічного мислення не вистачає учням для належного рівня сформованості ключових компетентностей. 8 % респондентів зазначили, що прагнення розв'язання такої проблеми займає надто багато часу на уроці, тому не обов'язково перейматися формуванням логічної компетентності

учнів в основній школі. слід в першу чергу дбати про формування математичної компетентності учнів.

74 % опитаних вчителів математики 7-9 класів на четверте запитання анкети («Чи достатня кількість завдань у підручниках з математики для розвитку логічного мислення учнів основної школи») висловили побажання про збільшення кількості та урізноманітнення видів відповідних завдань у підручниках з математики, особливо для учнів 7-9 класів, щодо розвитку логічного мислення. 26 % респондентів залишилися переконаними у тому, що такі завдання є важливими, проте не основними, і тому, на їх думку, завдань для формування логічного мислення учнів у шкільних підручниках з математики достатньо.

Найменш активними були вчителі у відповіді на п'яте запитання анкети («Наведіть приклади конкретних завдань на розвиток логічного мислення з Вашого досвіду роботи»). Так, учителі які все-таки дали відповідь на поставлене питання, акцентували увагу на інтерактивних, евристичних технологіях навчання: «Асоціативний куш», «Ромашка запитань Блума», «Мозковий штурм» тощо.

На шосте запитання анкети «Яка Ваша думка щодо необхідності застосування інноваційних засобів навчання під час формування логічного мислення учнів на уроках математики?» 12 % респондентів не відповіли; 26 % зазначили, що застосовують сучасні засоби навчання на уроках математики з метою розвитку логічного мислення учнів, проте не вказали їх; 62% опитаних учителів вказали на необхідність використання мультимедійних презентацій, інтерактивних дошок та інших засобів навчання.

Метою сьомого запитання «Оцініть свою здатність забезпечити умови для ефективного формування логічного складника математичної компетентності учнів на уроках математики» було з'ясувати, наскільки компетентними відчують себе вчителі математики основної школи в реалізації методики розвитку логічного мислення учнів. Аналіз анкет виявив,

що 26 % учителів оцінюють вказану здатність на достатньому рівні. На рівні поверхових уявлень оцінили вказану компетентність 42 % опитаних. 25 % респондентів зазначили, що не мають спеціальних сформованих знань та умінь про відповідну методику, проте практично намагаються дбати про логічний аспект мислення учнів на уроках математики. 7 % вчителів математики відверто вказали на низький рівень методичної компетентності у питанні формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи на уроках математики.

Іншим напрямом констатувальних досліджень було виявлення рівня розвитку логічного мислення учнів на уроках математики в основній школі. На цьому етапі ми використали тест Ліппмана «Логічні закономірності», методику оцінки логічного мислення «Логіко-кількісні відношення» та спеціальний тест для визначення рівня логічної компетентності, результати яких представлено у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

Розподіл учнів за рівнем розвитку логічного мислення

Рівні розвитку логічного мислення учнів	Тест Ліппмана «Логічні закономірності»	Тест Логіко-кількісні відношення»	Тест для визначення рівня логічної компетентності
Початковий	42 %	51 %	56 %
Середній	35 %	32 %	31%
Достатній	23 %	17 %	13 %
Високий	0%	0%	0%

Основним видом діяльності учнів на уроках математики є розв'язування задач. Тому в процесі дослідницько-експериментальної роботи ми з'ясували оптимальні умови для формування логічного складника математичної компетентності учнів, зокрема під час розв'язування задач на доведення та дослідження. Вивчення теорем, їх доведень, розв'язування задач на доведення та дослідження є важливою методичною проблемою, оскільки у сучасній школі зменшується інтерес до такого виду задач. Одним

із завдань *пошукового етапу дослідно-експериментальної роботи* був аналіз підручників з алгебри та геометрії для 7-9 класів методом контент-аналізу, а саме, ми здійснювали оцінку того, як представлені в сучасних підручниках математики для основної школи задачі на доведення та дослідження.

Вивчення алгебри та геометрії в 7-9 класах сучасної української школи здійснюється за декількома альтернативними підручниками, серед яких ми обрали підручники чотирьох колективів авторів, які стали об'єктом нашого аналізу, всього 24 підручники:

Алгебра : підручн. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге вид., переробл. Х. : Гімназія, 2020. 288 с.

Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. К. : Генеза, 2015. 256 с.

Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.

Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2015. 184 с.

Геометрія : підруч. для 7-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге вид., переробл. Х. : Гімназія, 2020. 240 с.

Геометрія : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 192 с.

Геометрія : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

Алгебра : підручн. для 8-го класу загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. К. : Генеза, 2016. 272 с.

Алгебра : підручн. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2016. 240 с.

Алгебра : підручн. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавництво «Відродження», 2016. 254 с.

Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.

Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2016. 216 с.

Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2016. 208 с.

Геометрія : підручн. для загальноосвіт. навч. закладів. 8 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. 272 с.

Геометрія : підручн. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 224 с.

Алгебра : підручн. для 9-го класу загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. К. : Генеза, 2017. 264 с.

Алгебра : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.

Алгебра : підручн. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2017. 240 с.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. 240 с.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

Геометрія : підручн. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.

У проаналізованих нами підручниках розподіл матеріалу та послідовність тем здійснюється по різному, тому наш аналіз ми здійснювали, базуючись на темах Державного стандарту. Згідно Навчальної програми в курсі алгебри 7 класу передбачається вивчення трьох тем «Цілі вирази», «Функції», «Лінійні рівняння та їх системи». Відсоток задач на доведення та дослідження у підручниках з алгебри для 7 класу представлено у таблиці 3.2.

Із загальної кількості задач, запропонованих до першої теми («Цілі вирази») найвищий відсоток задач на доведення містить підручник [27] – 15,8%, найнижчий – підручник [42] (8,3%). Що стосується задач на дослідження, то найвищий відсоток представлений у підручнику [27] (8,6%), а найнижчий – у підручнику [9] (4,5%) та підручнику [42] (4,7%).

Таблиця 3.2.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках алгебри для 7 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	А.Г.Мерзляк та ін.	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	А.Г.Мерзляк та ін.	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз
Цілі вирази	15,8%	8,3%	9,4%	11%	8,6%	4,7%	5,9%	4,5%
Функції	4,8%	0%	0%	1%	5,3%	3,4%	7,3%	12,8%
Лінійні рівняння та їх системи	3,5%	3,2%	3,8%	3,1%	15,6%	9,4%	7,9%	8,2%

У двох підручниках [19, 42] до теми «Функція» не запропоновано жодної задачі на доведення, в інших підручниках задачі на доведення представлені, проте їх відсоток незначний. Найбільший відсоток задач на дослідження у підручнику [9] – 12,8%. Вважаємо, що можливості цієї теми

щодо використання задач на доведення та дослідження не використані у жодному підручнику.

Задачі на доведення у третій темі «Лінійні рівняння та їх системи» в усіх підручниках представлені на одному рівні – в діапазоні 3,1%-3,8%, найвищий відсоток задач на дослідження у підручнику [27] – 15,6%, інші підручники містять майже вдвічі менше задач такого типу. Оскільки найвищий відсоток задач на доведення та дослідження містить підручник [27], то, вважаємо, що він створює найкращі умови для формування логічного складника математичної компетентності учнів у 7 класі під час вивчення алгебри.

Таблиця 3.3.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках геометрії для 7 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	А.Г.Мерзляк та ін.	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	А.Г.Мерзляк та ін.	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз
Елементарні геометричні фігури та їх властивості	6,4%	4,29%	2,3%	1,7%	27,1%	22,1%	27,9%	33%
Взаємне розміщення прямих на площині	36,8%	16,3%	15,1%	18,4%	16%	16,3%	21,9%	28,2%
Трикутники. Ознаки рівності трикутників	43,1%	28%	24,2%	30,6%	14,4%	17,8%	17,9%	18,1%
Коло і круг	19,3%	8,9%	12%	9%	13,5%	16,9%	12,8%	33%

Підручники з геометрії для 7 класу містять найбільшу кількість задач на доведення та дослідження у порівнянні із підручниками геометрії для 8 та 9 класів. Згідно навчальної програми з математики в курсі геометрії 7 класу передбачається вивчення чотирьох тем «Елементарні геометричні фігури та їх властивості», «Взаємне розміщення прямих на площині», «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» та «Коло і круг». Відсоток задач на доведення та дослідження у підручниках з геометрії для 7 класу представлений у таблиці 3.3.

Найнижчий відсоток задач на доведення представлений у першій темі «Елементарні геометричні фігури та їх властивості» (від 1,7% у підручнику [14] до 6,4% у підручнику [30]), проте задачі на дослідження становлять четверту частину усіх задач, запропонованих у цій темі. Вважаємо, що такий розподіл зумовлений навчальним матеріалом, який передбачається у цій темі.

Найбільшу кількість задач на доведення запропоновано у темах «Взаємне розміщення прямих на площині», «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», зокрема у підручнику [30] у третій темі задачі на доведення становлять 43,1% від усіх задач, а у другій темі – 36,8%.

Найвищий відсоток задач на доведення містить підручник [30] (6,4%, 36,8%, 43,1%, 19,3% відповідно для кожної теми згідно Державного стандарту), а найвищий відсоток задач на дослідження містить підручник [14] (33%, 28,2%, 18,1%, 33% відповідно для кожної теми згідно Державного стандарту).

Відсоток задач на доведення та дослідження у підручниках з алгебри для 8 класу представлений у таблиці 3.4, які розподілено за темами згідно навчальної програми.

У підручниках задачі на доведення представлені у незначній кількості, найменше їх у підручнику [43] – від 1,1% до 2%, найбільше у підручниках [20, 28] – в середньому 10% задач у першій темі та 5% і 4% у другій і третій темах відповідно.

Задачі на дослідження у підручниках з алгебри 8 класу представлені краще (найменше – 7,2% у першій темі підручника [20]). Найпоширенішими задачами на дослідження у підручниках є «Чи існує число $a(m)$, таке що...?», а також дослідження функцій та їх графіків, які передбачаються навчальною програмою у 8 класі. Особливої уваги заслуговують параграфи у темі «Квадратні корені. Дійсні числа», які присвячені множинам. Оскільки такі типи завдань сприяють формуванню логічного складника математичної компетентності учнів.

Таблиця 3.4.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках алгебри для 8 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.
Раціональні вирази	9,5%	1,1%	10,9%	7,6%	16,9%	12%	7,2%	9,2%
Квадратні корені. Дійсні числа	5,8%	1,8%	4,8%	3,6%	19%	20%	14,1%	16,7%
Квадратні рівняння	4,5%	2%	3,5%	2,1%	18,4%	8,9%	12,7%	8,4%

У підручниках з геометрії для 8 класу відсоток задач на доведення та дослідження нижчий, ніж у 7 класі. Оскільки рівень абстрактності, теоретичності мислення учнів зростає з віком, то важливо використовувати це у навчальному процесі, зокрема у підборі завдань під час вивчення математики. Проте, автори зменшують відсоток задач на доведення та дослідження і таким чином відсоток задач на обчислення зростає, про що свідчать дані у таблиці 3.5.

Найменше задач на доведення та дослідження представлено у підручниках у третій темі «Розв'язування прямокутних трикутників», що становить менше 10 задач на доведення чи дослідження в середньому у кожному з проаналізованих підручників.

Найбільше задач на доведення представлено у підручнику [3] – 117 задач з 390, запропонованих у темі «Чотирикутники», а на дослідження – у підручнику [12] – 27 задач з 122 у темі «Многокутники. Площі многокутників».

Таблиця 3.5.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках геометрії для 8 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.
Чотирикутники	30%	28,3%	15,3%	23%	13,1%	14,3%	14%	14,4%
Подібність трикутників	13,4%	17,8%	15,4%	8,3%	14,7%	20,4%	13%	16,7%
Розв'язування прямокутних трикутників	2,9%	5,7%	3,7%	1,7%	3,6%	2,6%	7,5%	4,3%
Многокутник и. Площі многокутників	13,1%	11,3%	5,2%	9%	14,9%	10,2%	15,2%	22,1%

У підручниках з алгебри для 9 класу задач на доведення та дослідження значно більше, ніж у підручниках 7 та 8 класів, про що свідчать дані у таблиці 3.6.

Найвищий відсоток задач на доведення та дослідження містить підручник [29], тому він створює найкращі умови для формування логічного

складника математичної компетентності учнів у 9 класі під час вивчення алгебри.

У двох підручниках [21, 44] до теми «Квадратична функція» запропоновано дуже мало задач на доведення – 6 і 3 задач з 310 і 338 задач, запропонованих у цій темі, відповідно. Вважаємо, що можливості цієї теми для використання задач на доведення не використані у цих підручниках. Таким чином, можливості теми «Квадратична функція» не можуть бути використані в повній мірі для формування логічного складника математичної компетентності учнів.

Таблиця 3.6.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках алгебри для 9 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.
Нерівності	11,6%	6,6%	8,3%	10,2%	42,2%	29,3%	33,4%	25,3%
Квадратична функція	4%	1,9%	0,9%	9,5%	32,1%	23,9%	19,8%	21,8%
Числові послідовності	18,8%	0,7%	5,2%	7,6%	29,2%	8,9%	13%	11,1%

Згідно навчальної програми в курсі геометрії 9 класу передбачається вивчення п'яти тем «Координати на площині», «Вектори на площині», «Розв'язування трикутників», «Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга» та «Геометричні переміщення». Відсоток задач на доведення та дослідження у підручниках з геометрії для 9 класу представлений у таблиці 3.7.

Найменше задач на доведення та дослідження у підручниках передбачаються у темах «Розв'язування трикутників» та «Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга». У підручнику [26] найменший відсоток задач на доведення передбачений для всіх тем, задач на дослідження більше, що підтверджують дані таблиці 3.7.

Таблиця 3.7.

Відсоток задач на доведення та дослідження в українських підручниках геометрії для 9 класу

Тема	Відсоток задач на доведення				Відсоток задач на дослідження			
	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.	О.С.Істер	А.Г.Мерзляк та ін.	Г.П.Бевз, В.Г.Бевз	Н.А.Тарасенкова та ін.
Координати на площині	16%	10,1%	6,7%	7,4%	9,2%	23,8%	16,7%	14,4%
Вектори на площині	21,4%	8,9%	9,1%	13,3%	13,7%	16,4%	22,7%	18,8%
Розв'язування трикутників	9,7%	10,9%	5,3%	4,8%	9,2%	11,4%	7,5%	7,7%
Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга	8,4%	8,9%	1,8%	6,1%	9,5%	14,7%	9%	10,3%
Геометричні переміщення	19,2%	18,9%	6,9%	16,4%	12,1%	29,3%	22%	22%

Тема «Геометричні переміщення, на нашу думку, займає важливе місце у пізнавальному та інтелектуальному розвитку учнів. Під час вивчення цієї теми можна ефективно застосовувати пошуковий та проблемний методи навчання з допомогою задач на доведення та дослідження, що сприятиме формуванню логічного складника математичної компетентності учнів.

Аналіз задач у підручниках свідчить про активніше використання задач на доведення та дослідження під час вивчення цієї теми.

Суттєвим недоліком, на нашу думку, є зменшення кількості задач на доведення та дослідження у порівнянні з 7 класом, в той час як рівень абстрактного мислення учнів з віком зростає.

Проведений аналіз підручників з алгебри та геометрії для 7-9 класів дозволяє сформулювати такі висновки:

1) у підручниках з алгебри задачі на доведення та дослідження не достатньо представлені, зокрема, втрачаються можливості формування логічного складника математичної компетентності учнів при вивченні у 7-9 класах функцій, їх властивостей та графіків;

2) у підручниках з геометрії відсоток задач на доведення та дослідження зменшується із збільшенням номера класу, хоча, вважаємо, що навчальний матеріал і розвиток абстрактного мислення учнів сприяє збільшенню кількості задач на доведення та дослідження;

3) спрощеність, уніфікованість та переважна більшість шаблонних задач на обчислення утруднює формування логічного складника математичної компетентності учнів.

3.3. Статистичний аналіз ефективності авторської методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи

На початку формувального етапу експерименту були визначені КГ та ЕГ, враховуючи вимоги ідентичності та рівних стартових умов. Дані групи порівнювалися на основі показника якісної успішності учнів з математики перед початком упровадження авторської методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи. В результаті, до контрольних груп увійшло 472 учні, до експериментальних – 474 учні. Відповідно, на діагностико-прогностичному етапі: КГ - 138 учнів,

ЕГ - 132 учні; на мотиваційно-пізнавальному етапі: КГ - 120 учнів, ЕГ - 118 учнів, на активно-діяльнісному етапі: КГ - 118 учнів, ЕГ - 122 учнів; на пошуково-творчому етапі: КГ - 102 учнів, ЕГ - 98 учні.

Рівні сформованості логічної компетентності учнів за мотиваційно-ціннісним, когнітивним, діяльнісним та рефлексивно-оцінним критеріями визначались комплексно. Критерії сформованості логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи є якісними характеристиками, а рівні сформованості є кількісними характеристиками.

Формування та розвиток логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи в учнів експериментальних груп відбувалося на кожному етапі (діагностико-прогностичному, мотиваційно-пізнавальному, активно-діяльнісному та пошуково-творчому) формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи через реалізацію визначених нами організаційно-педагогічних умов:

- удосконалення змістового наповнення та навчально-методичного забезпечення курсу математики з метою формування логічних умінь, прийомів та досвіду їх використання;
- впровадження системи спеціальних завдань та задач для забезпечення позитивної динаміки сформованості логічного складника математичної компетентності;
- інтенсифікація процесу формування логічної компетентності учнів засобами інтерактивних, проєктних, ігрових та інформаційно-комунікаційних технологій та технологій проблемного навчання.

Для реалізації першої організаційно-педагогічної умови в експериментальних групах вивчалися, зокрема, теми «Судження», «Індукція та дедукція» тощо. Для реалізації другої організаційно-педагогічної умови в експериментальних групах на кожному етапі активно використовувався навчально-методичний посібник для учнів О.І. Матяш, Р. С. Мілян «Вчимося мислити логічно». Для реалізації третьої організаційно-педагогічної умови вчителями математики в експериментальних групах на кожному етапі

активно використовувалися методичні рекомендації О.І. Матяш, Р. С. Мілян «Навчаємо мислити логічно».

В контрольних групах організація навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики відбувалась за традиційною методичною системою.

В якості кількісного критерію сформованості логічного складника предметної математичної компетентності в учнів контрольних та експериментальних груп був використаний коефіцієнт $k_i = \frac{a}{b}$, де a – сума набраних балів учнем у результаті виконання контрольної роботи на відповідному етапі формування логічної компетентності, b – максимально можлива сума балів з виконаної роботи. Середнє значення коефіцієнту K сформованості логічного складника предметної математичної компетентності в експериментальних групах визначалось як середнє арифметичне значень k_i .

За значенням коефіцієнта K визначався рівень сформованості логічної компетентності в учнів основної школи: 0 – 0,39 – початковий рівень; 0,40 – 0,60 – середній рівень; 0,61 – 0,84 – достатній рівень; 0,85 – 1 – високий рівень сформованості логічної компетентності.

Наприкінці кожного етапу (діагностико-прогностичного, мотиваційно-пізнавального, активно-діяльнісного та пошуково-творчого) з'ясування ефективності методики формування логічного складника предметної математичної компетентності в учнів основної школи здійснювалася підсумкова перевірка сформованості необхідних знань та умінь в учнів у контрольних та експериментальних групах. Для цього здійснювався контрольний зріз набутих учнями здатностей за мотиваційно-ціннісним, когнітивним, діяльнісним та рефлексивно-оцінним критеріями.

Наведемо приклад однієї із комплексних контрольних робіт проведеної на останньому етапі педагогічного експерименту для учнів ЕГ та КГ.

Контрольна робота для пошуково-творчого етапу (9 клас):

1. Як можна одним мішком пшениці, змолотивши її, наповнити два мішки, які такі ж великі, як і мішок, в якому знаходиться пшениця? (2 бали)
2. Загадайте число і запишіть його. Подвойте його і додайте 1. Потім помножьте на 5 і відніміть 5. Розділіть на 10. Результат запишіть поруч з задуманим числом. Що вийшло і чому? (2 бали)
3. Знайти довжину медіани проведеної до найбільшої сторони у трикутнику із сторонами 8 см, 12 см, 23 см. (3 бали)
4. Замовлення по випуску холодильників завод повинен був виконати за 20 днів. Випускаючи щодня по 3 холодильники понад план, завод вже за два дні до терміну виготовив на 6 холодильників більше, ніж було передбачено в замовленні. Скільки холодильників відповідно до замовлення повинен був випустити завод? (3 бали)
5. Дослідити, коли фігура, яка складається із трьох кіл має центр симетрії. (5 балів)
6. Двоє туристів одночасно вийшли з пункту А і пішли в пункт В. Перший турист половину часу витраченого ним на перехід, йшов із швидкістю 5 км/год, а потім пішов зі швидкістю 4 км/год. Другий же першу половину шляху пройшов по 4 км/год, а потім по 5 км/год. Хто з них раніше прийшов у пункт В? (5 балів)

Правильне виконання кожного завдання оцінюється вказаною в дужках кількістю балів. Тому максимальна кількість балів, яку міг набрати учень за одну контрольну роботу – 20 балів. Кількісні результати виконання комплексних контрольних робіт учнями експериментальних та контрольних груп на кожному етапі наведені в таблиці 3.8.

Таблиця 3.8.

**Результати аналізу сформованості логічної компетентності в учнів
після проведення педагогічного експерименту**

Середнє значення коефіцієнта	Експериментальні групи	Контрольні групи
На діагностико-прогностичному етапі	0,36	0,21
На мотиваційно-пізнавальному етапі	0,47	0,27
На активно-діяльнісному етапі	0,51	0,32
На пошуково-творчому етапі	0,56	0,34

Розглянемо розподіл учнів експериментальних та контрольних груп на кожному етапі за рівнями сформованості досліджуваної компетентності (таблиця 3.9).

Таблиця 3.9.

**Розподіл учнів за рівнями сформованості
логічної компетентності після педагогічного експерименту**

Етапи	Підсумковий рівень	Експериментальна група (%)	Контрольна група (%)
Діагностико-прогностичний етап	Початковий	42	58
	Середній	23	24
	Достатній	31	18
	Високий	4% (3 учні)	0
Мотиваційно-пізнавальний етап	Початковий	29	48
	Середній	30	36
	Достатній	32	16
	Високий	9% (8 учнів)	0
Активно-діяльнісний етап	Початковий	24	43
	Середній	26	33
	Достатній	48	24
	Високий	12% (10 учнів)	0
Пошуково-творчий етап	Початковий	21	56
	Середній	42	32
	Достатній	32	12
	Високий	5 % (5 учнів)	0

З таблиці 3.9 бачимо, що відбувся зріст за достатнім і високим рівнями в експериментальних групах, які перевищили відповідні відсотки учнів контрольної групи. Причому в контрольних групах ніхто із учнів не досяг високого рівня сформованості логічної компетентності. Якщо розглядати середні значення коефіцієнта K учнів експериментальної групи (Таблиця 3.8), то вони сягнули мітки вище середнього рівня, в той час, як для учнів контрольних груп засвідчено низький рівень сформованості логічного складника предметної математичної компетентності в учнів основної школи.

Таким чином, за результатами проведеного педагогічного експерименту, можна стверджувати, що за допомогою запропонованої нами методики можна формувати логічний складник предметної математичної компетентності в учнів основної школи. Висуваємо гіпотезу, що рівні сформованості логічного складника предметної математичної компетентності учнів були б значно вищими, якби експериментальна група пройшла послідовно всі етапи нашої поетапної методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи. Такий педагогічний експеримент потребує, як мінімум, 5 навчальних років.

Очевидно, ми будемо продовжувати експериментальні дослідження з метою вдосконалення поетапної методики формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної та старшої школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ У РОЗДІЛІ 3

1. Бачинська Р. С. Місце і роль історичних задач на уроках математики в школі. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики : зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 26-27 листопада 2015 р., м. Вінниця, 2015. С. 227–229.
2. Бачинська Р. С. Типологія завдань для розвитку логічної компетентності учнів на уроках математики. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 18 жовтня 2018 р. С. 137–140.
3. Бачинська Р. С. Аналіз вітчизняної теорії та практики формування математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2017. Випуск 49. С. 12 – 15.
4. Бачинська Р. С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2018. Випуск 51. С. 29–33.
5. Бачинська Р. С. Логічна складова математичної компетентності учнів базової школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 30 травня – 1 червня 2018 р. С. 194–196.
6. Бачинська Р. С. Математична компетентність учнів: ключова чи предметна?. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017), м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р, С. 48 – 49.
7. Бачинська Р. С. Проблемне навчання як технологія формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами

Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Чернівці, 11 -12 жовтня 2018 р. С. 38 – 41.

8. Бачинська Р. С. Сучасні проблеми впровадження компетентнісного підходу у навчанні учнів математики. Матеріали V Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів *«Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень»*, м. Вінниця, 21-22 листопада 2017 р. С. 238– 240.
9. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
10. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2016. 254 с.
11. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручн. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
12. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. 8 клас. К. : Видавництво «Відродження», 2016. 272 с.
13. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
14. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавництво «Відродження», 2015. 192 с.
15. Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.
16. Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 224 с.
17. Бурда М. І. Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : «Зодіак-ЕКО», 2009. 241 с.
18. Захарченко Н. В. Експеримент як один із методів педагогічного дослідження. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2014. Вип. 39. С. 230-234.

19. Істер О. С. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 256 с.
20. Істер О. С. Алгебра : підручн. для 8-го класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2016. 272 с.
21. Істер О. С. Алгебра : підручн. для 9-го класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2017. 264 с.
22. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 184 с.
23. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2016. 216 с.
24. Істер О. С. Геометрія : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 240 с.
25. Матяш О.І. Мілян Р. С. Вчимося мислити логічно. Навчально-методичний посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 2020. 106 с.
26. Матяш О.І. Мілян Р. С. Навчаємо мислити логічно. Методичні рекомендації для вчителів. Тернопіль: Вектор, 2020. 104 с.
27. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге вид., переробл. Х. : Гімназія, 2020. 288 с.
28. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2016. 240 с.
29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.
30. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2015. 224 с.
31. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2016. 208 с.
32. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х. : Гімназія, 2017. 240 с.
33. Мілян Р. С. Geogebra як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та*

інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи. Матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2019. С. 138 – 140.

34. Мілян Р. С. Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (95), Issue: 239, 2020 Nov. P. 33 – 37.
35. Мілян Р. С. Добірка задач для формування логічної компетентності учнів на уроках геометрії. *Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами III Всеукр. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 25 квітня 2019 р.* С. 142 – 150.
36. Мілян Р. С. Порівняльний аналіз дефініцій «критичне мислення» та «логічне мислення». *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* Зб. наук. пр. 2019. Випуск 54. С. 121 – 125.
37. Мілян Р. С. Формування логічного складника математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи.* Матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Тернопіль, 12 – 13 листопада, 2020). С. 136 – 139.
38. Мілян Р. С. Віртуальні дошки як інструмент формування математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Тези доповідей Дистанційної Всеукраїнської наукової конференції з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань»*, 15–16 квітня 2021 р., Київ, Україна [електронне видання]. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. С. 111 – 113.
39. Мілян Р. С. Логічний складник геометричної компетентності учнів основної школи. *Проблеми викладання математики у закладах освіти:*

- теорія, методика, практика: тези доповідей II міжнародної конференції (23–25 березня, м. Харків, Україна). Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. С.130-131.
40. Мілян Р. С. Мова вчителя як засіб формування логічного мислення учнів. Матеріали IX Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси, 9-10 квітня 2021 р. С. 75-76.
41. Педагогічний експеримент : навч.-метод. посіб. / укладач: О. Е. Жосан. Кіровоград: Видавництво КОІППО імені Василя Сухомлинського, 2008. 72 с.
42. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підручн. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.
43. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.
44. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
45. Bachynska R. Criteria and indicators of pupils' logical competence formation. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale: Materialele Conferintei Stiintifice Internationale*, Chisinau, Moldova, 9-10 Noiembrie 2017. P. 250 – 252.
46. Milian R. Pupils' mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX (99), Issue: 252, 2021 May. P. 21 – 25.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертації подано теоретичний аналіз і нове практичне вирішення проблеми формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. У відповідності до поставленої мети та завдань дисертаційного дослідження отримані наступні **основні результати**:

- *виділено* цілі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- *з'ясовано* психолого-педагогічні передумови формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- *розроблено* критеріїв сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи та виявленні організаційно-педагогічних умов ефективності його формування;
- *апробовано* методичний інструментарій формування логічного складника математичної компетентності учнів в основній школі;
- *запропоновано* поетапну методику формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи;
- *виокремлено* основні напрямки вдосконалення методичної діяльності вчителя математики для формування логічного складника математичної компетентності учнів.

Результати дослідження засвідчили досягнення мети та ефективність виконання завдань, уможливили формулювання **наступних висновків**:

1. Основною метою шкільної освіти, згідно з Концепцією нової української школи, є не лише забезпечення учнів певною системою знань, а й різнобічний розвиток особистості, здатної до самовдосконалення та самореалізації. Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей, серед компонентів якої виділяють логічне мислення. Уміння логічно мислити є спільним для всіх компетентностей, що свідчить про важливість його формування.

Важливість логічних умінь, що визначають логічну компетентність учнів, викликана потребами як самого курсу математики, так і інших дисциплін. Курс математики вимагає більш розвинених логічних умінь, зокрема, правильного формулювання означень, вміння класифікувати різні об'єкти, доводити твердження, здійснювати класифікацію, знаходити логічні зв'язки тощо.

Під логічним складником математичної компетентності учнів розуміємо ту динамічну комбінацію їхніх здатностей, що поєднує розуміння логіки подій, логічні вміння та досвід їх використання, які необхідні для здійснення математичної та/або особистісно значущої продуктивної діяльності. Поняття «логічний складник математичної компетентності учнів», «логічна складова частина математичної компетентності учнів» та «логічна компетентність учнів» можна використовувати як синонімічні поняття.

2. Структуру логічного складника математичної компетентності утворює єдність мотиваційно-ціннісної, когнітивної, діяльнісної та рефлексивно-оцінної компонент, в яких відображена специфіка навчання математики у школі:

- *мотиваційно-ціннісна компонента* - розуміння учнями необхідності формування логічної складової математичної компетентності, її значення в подальшій навчальній та у майбутній професійній діяльності;
- *когнітивна компонента* - фундаментальні теоретичні математичні знання, знання алгоритмів і методів розв'язання математичних задач;
- *діяльнісна компонента* - здібності до застосування не тільки вже відомих умінь, навичок і відповідних знань (в репродуктивній діяльності), а й засвоєння нових (у творчій діяльності) під час розв'язування логічних і прикладних задач; вміння раціоналізувати свою діяльність у виборі способів і засобів розв'язування завдань з логічним аспектом;

- *рефлексивно-оцінна компонента* - вміння аналізувати, осмислювати, усвідомлювати процеси і результати власної та колективної діяльності при розв'язуванні логічних і прикладних задач, вміння критично оцінювати і коригувати діяльність при необхідності (розуміння важливості відповідальності за результати діяльності).

На основі проведеного аналізу розроблено модель формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Розроблена модель представляє цілісний і комплексний процес та відображає єдність його структурних компонентів (блоків): цільовий блок (мета, завдання); методологічний блок (підходи, принципи); змістовий блок (традиційний пропедевтичний курс математики; традиційний зміст курсу алгебри основної школи; традиційний зміст курсу геометрії основної школи; пропонувані нами навчальні теми; система спеціальних задач, з явно вираженим логічним аспектом); процесуальний блок (етапи, форми, організаційно-педагогічні умови); технологічний блок (методи, засоби, прийоми); діагностично-результативний блок (критерії, показники, рівні).

3. Для визначення рівнів сформованості логічного складника математичної компетентності учнів обрано критерії:

- мотиваційно-ціннісний критерій передбачає формування мотивів, інтересу, позитивного ставлення, потреб в оволодінні логічною компетентністю;
- когнітивний критерій передбачає систему знань, необхідних для успішного формування логічного складника математичної компетентності та ступеню розуміння його сутності та структури;
- діяльнісний критерій передбачає сформованість умінь і навичок учнів логічно грамотно розв'язувати задачі; прояв логічного складника математичної компетентності, апробованого в дії та засвоєного учнями;
- рефлексивно-оцінний критерій передбачає здатність адекватно оцінювати власні результати; прагнення до самовдосконалення.

Мотиваційно-ціннісний критерій. Мотив є «внутрішнім спонуканням» учня до формування логічного складника математичної компетентності. Якщо розглядати навчальну діяльність учнів на уроках математики, то на її успішність суттєво впливають мотивація та інтерес. Свідома мотивація та прийоми підсилення інтересу сприяють формуванню логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи.

Когнітивний критерій. За допомогою цього критерію оцінюється об'єм і рівень знань учнів, необхідних для логічного складника математичної компетентності, інтегрованість знань, здатність відтворювати, узагальнювати та застосовувати знання у процесі вирішення проблемних ситуацій.

Діяльнісний критерій. За допомогою діяльнісного критерію оцінюється прояв логічної компетентності, апробованої в дії та засвоєної учнями. Показники діяльнісного критерію виявляються у певному рівні розвитку аналітичних, прогностичних та проєктивних умінь і навичок учнів.

Рефлексивно-оцінний критерій. За допомогою рефлексивно-оцінного критерію оцінюється сформованість здатності до аналізу, осмислення, усвідомлення і переосмислення власної діяльності та її результатів. Формування рефлексивних умінь учнів є необхідною умовою для формування і розвитку логічної складової частини їхньої математичної компетентності.

Діагностика рівнів сформованості логічного складника математичної компетентності передбачає моніторинг успішності виконання учнями специфічних завдань, що дозволяють перевірити ступінь сформованості конкретних умінь і навичок. Співвідношення та ступінь прояву критеріїв та показників, дозволяють виокремити чотири рівні сформованості логічного складника математичної компетентності учнів основної школи: початковий, середній, достатній, високий.

Для цілісності й безперервності процесу формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи взаємодія вчителя математики та учнів має бути організована в єдності послідовних і

взаємозумовлених етапів: діагностично-прогностичного, мотиваційно-пізнавального, активно-діяльнісного, пошуково-творчого. Удосконалення традиційної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи ми презентуємо через реалізацію визначених нами організаційно-педагогічних умов на кожному етапі формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи.

- удосконалення змістового наповнення та навчально-методичного забезпечення курсу математики з метою формування логічних умінь, прийомів та досвіду їх використання;
- інтенсифікація процесу формування логічної компетентності учнів засобами інтерактивних, проєктних, ігрових та інформаційно-комунікаційних технологій та технологій проблемного навчання;
- впровадження системи спеціальних завдань та задач для забезпечення позитивної динаміки сформованості логічного складника математичної компетентності.

4. Виокремлені нами організаційно-педагогічні умови формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи є основою удосконалення традиційної методики формування логічної компетентності учнів і мають бути реалізовані на всіх запропонованих нами етапах:

Діагностико-прогностичний етап реалізується упродовж двох семестрів навчання (I-II семестри 5 класу). Важливою на цьому етапі є діагностика рівня сформованості логічного складника математичної компетентності учнів. Це дає можливість з'ясувати рівень сформованості логічних умінь учнів, здобутий під час навчання у початковій школі, прогнозувати особливості подальших етапів формування логічної компетентності та побудувати стратегію його формування, а також сприяє усвідомленню учнями логічних умінь. На цьому етапі варто використовувати

спеціальні методики. Для прикладу: Методика «Прості аналогії», Методика «Логічні закономірності», Методика «Логічність умовиводів».

Мотиваційно-пізнавальний етап здійснюється протягом трьох семестрів: I, II семестри 6 класу та I семестр 7 класу. На цьому етапі формується пізнавальний інтерес та позитивна мотивація учнів до формування та розвитку логічного складника математичної компетентності, оволодіння логічними уміннями та прийомами. На цьому етапі важливим є глибоке осмислення учнями традиційного змісту пропедевтичного курсу математики. На мотиваційно-пізнавальному етапі важливими є: метод міркувального викладу (розглядаючи запропоновану вчителем проблемну ситуацію, учні аналізують фактичний матеріал, роблять висновки та узагальнення з допомогою вчителя); метод евристичних завдань (вивчення нового правила чи поняття здійснюється самими учнями під керівництвом і з допомогою вчителя); метод діалогічного викладу (вчитель організовує діалог з учнями або між учнями; учні беруть активну участь у процесі формулювання проблеми, висунення припущень й обґрунтування гіпотез); метод дослідницьких завдань (організовується вчителем шляхом постановки перед учнями спеціально дібраних завдань з явно вираженим логічним аспектом).

Активно-діяльнісний етап реалізується у процесі навчання протягом трьох семестрів (II семестр 7 класу та I, II семестри 8 класу). Використання на уроках математики запитань високого рівня – *на аналіз, синтез, оцінку* – має дозволити вчителю математики ефективно розвивати логічну компетентність учнів. Майстерність учителя формулювати такі запитання є обов'язковою умовою вирішення цієї проблеми. На активно-діяльнісному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи важливо систематично використовувати вправи і завдання логічного характеру. Спеціально побудований учителем математики процес розв'язування задач на доведення та на дослідження має значні можливості для розвитку логічного складника

математичної компетентності учнів, сприяє усвідомленому розумінню учнями змісту навчального матеріалу. На активно-діяльнісному етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи особливу увагу вчителів математики звертаємо на наявність у методичній скарбничці вчителя наступних видів задач: задачі з неповною умовою, задачі з надлишковою умовою, евристичні задачі, задачі з декількома різними розв'язками, логічні задачі, математичні софізми.

На *пошуково-творчому* етапі, який охоплює I-II семестри 9 класу, відбувається творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через впровадження пошукової та дослідницької діяльності. Робота має бути спрямована на вдосконалення всіх компонентів логічного складника математичної компетентності учнів, здійснюється психолого-педагогічна діагностика рівнів сформованості логічної компетентності учнів. На пошуково-творчому етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи має відбуватися творче застосування опанованих учнями логічних прийомів, логічних умінь через впровадження пошукової та дослідницької діяльності. Важливо, щоб прийоми, методи та засоби формування логічного складника математичної компетентності учнів у процесі навчання математики урізноманітнювалися і поступово ставали складнішими, щоб зростала питома вага активних розумових дій. Учитель математики має усвідомлювати, що процес розв'язування задачі це умови формування логічної компетентності учнів. Одним із способів удосконалення навчання математики в школі має бути активізація цих умов. На пошуково-творчому етапі формування логічного складника предметної математичної компетентності учнів основної школи варто використовувати спеціальні діагностичні методики. Для прикладу: методика «Складні аналогії», методика «Виявлення загальних понять», методика «Логіко-кількісні відношення».

Ефективність запропонованої поетапної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи

підтверджена результатами педагогічного експерименту. З'ясовано, що суттєвість змін у формуванні логічної складової частини математичної компетентності учнів основної школи в умовах запропонованої нами поетапної методики більша суттєвості змін у формуванні логічної компетентності учнів в умовах традиційної методичної системи.

Матеріали дисертації не вичерпують усіх аспектів проблеми забезпечення ефективних умов формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Ці аспекти вмотивовують доцільність подальших наукових досліджень. Вважаємо необхідним дослідження проблеми формування логічного складника математичної компетентності учнів старшої школи. Подальшого розвитку потребує також питання формування методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо формування логічного складника математичної компетентності учнів.

ДОДАТКИ

Додаток А

**Вимоги до обов'язкових результатів навчання та компоненти
логічного складника математичної компетентності учнів 5 – 6 класів**

Вимоги до обов'язкових результатів навчання	Компоненти логічного складника математичної компетентності учнів
<i>1. Виокремлення проблем і дослідження ситуацій, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів</i>	
розпізнає серед життєвих ситуацій ті, що вирішуються математичними методами, виділяє аналогічні ситуації [6 MAO 1.1]	здатність до аналізу, уміння встановлювати аналогії
аналізує проблемну ситуацію; зчитує дані, оцінює достовірність даних, аналізує дані, описує зв'язки між ними; записує дані у різних формах; відбирає дані, потрібні для вирішення проблеми [6 MAO 1.2]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння встановлювати логічні зв'язки
прогнозує форму представлення результату розв'язання проблемної ситуації та його межі [6 MAO 1.3]	уміння встановлювати закономірності;
<i>2. Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	
шукає, відбирає, впорядковує, зберігає, видозмінює звукову, текстову, графічну інформацію математичного змісту, зокрема в цифрових середовищах; представляє та поширює інформацію математичного змісту з використанням різних засобів, зокрема цифрових; перетворює інформацію математичного змісту різними способами у різні форми [6 MAO 2.1]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність узагальнювати,
обирає способи та розробляє план необхідних дій для вирішення проблемної ситуації;	знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; уміння робити умовиводи;

<p>продукує нові ідеї щодо розв'язання проблем, розглядає ідеї з різних поглядів [6 MAO 2.2]</p>	<p>здатність бачити логічні відношення та виділяти зв'язки</p>
<p>визначає компоненти проблемної ситуації та взаємозв'язки між ними, їх повноту, представляє їх у вигляді, придатному для розв'язання математичними методами; зв'язує абстрактне та конкретне; будує математичну модель проблемної ситуації, використовуючи визначений математичний апарат [6 MAO 2.3]</p>	<p>уміння встановлювати логічні зв'язки; здатність до аналізу, здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>формулює та відображає у зручній для сприйняття формі результати розв'язання проблемної ситуації, зокрема з використанням визначених цифрових технологій; презентує результати розв'язання проблемної ситуації, аргументує їх [6 MAO 2.4]</p>	<p>знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; здатність узагальнювати, уміння доводити твердження;</p>
<p><i>3. Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i></p>	
<p>оцінює повноту даних для розв'язання проблемної ситуації, вказує на їх недостатність чи надлишковість [6 MAO 3.1]</p>	<p>здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>оцінює різні способи розв'язання та різні моделі проблемної ситуації, пов'язані з ними припущення та обмеження, необхідні ресурси, аналізує спільні та відмінні риси цих способів, обирає найзручніший; добирає математичну модель до стандартної ситуації [6 MAO 3.2]</p>	<p>здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння доводити твердження; уміння виділяти спільні ознаки між математичними поняттями уміння робити логічні висновки з отриманих результатів.</p>
<p>оцінює правильність та точність вирішення проблемної ситуації, виявляє та виправляє помилки, інтерпретує математичний результат у відповідному контексті [6 MAO 3.3]</p>	<p>здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння робити умовиводи уміння встановлювати закономірності;</p>
<p><i>4. Розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення</i></p>	

<i>дійсності, володіння математичною мовою</i>	
<p>визначає та описує зв'язки між математичними об'єктами; зв'язує різні елементи математичних знань і умінь, робить висновки; описує хід своїх міркувань, підкріплює свою думку аргументами; формулює припущення і досліджує їх істинність; визначає прогалини у власних математичних знаннях і вміннях та усуває їх [6 MAO 4.1]</p>	<p>уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими; здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння робити логічні висновки з отриманих результатів; здатність знаходити причинно-наслідкові зв'язки,</p>
<p>використовує математичні поняття, факти, алгоритми, структури, процедури й міркування для вирішення проблемних ситуацій й одержання висновків; виконує операції з математичними об'єктами, будує діаграми, графіки й геометричні конструкції; використовує різні форми представлення інформації; використовує приладдя та комп'ютерні технології для знаходження результатів [6 MAO 4.2]</p>	<p>знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими; уміння робити логічні висновки з отриманих результатів. здатність теоретизувати, знаходити причинно-наслідкові зв'язки, здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>доречно формулює, використовує математичні поняття, факти і процедури, аргументовано пояснює їх; використовує математичну нотацію, у тому числі в електронній формі, правильно її озвучує; доцільно та правильно вживає у мовленні математичну термінологію та символіку; висловлюється точно і лаконічно [6 MAO 4.3]</p>	<p>уміння робити логічні висновки з отриманих результатів. уміння доводити твердження;</p>

Вимоги до обов'язкових результатів навчання та компоненти логічного складника математичної компетентності учнів 7 – 9 класів

Вимоги до обов'язкових результатів навчання	Компоненти логічного складника математичної компетентності учнів
<i>1. Виокремлення проблем і дослідження ситуацій, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів</i>	
розпізнає серед життєвих ситуацій ті, що вирішуються математичними методами; виділяє і описує сукупність ситуацій, для вирішення яких можна застосувати ті самі методи [9 MAO 1.1]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння встановлювати аналогії уміння виділяти спільні ознаки між математичними поняттями; здатність бачити логічні відношення
аналізує проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела, розпізнає дезінформацію, неповну інформацію, маніпулювання даними; зчитує та інтерпретує дані, оцінює достовірність даних, аналізує, систематизує пов'язані між собою дані; записує дані у різних формах; відбирає дані, потрібні для вирішення проблем різного рівня складності [9 MAO 1.2]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність узагальнювати, уміння встановлювати логічні зв'язки уміння виділяти спільні ознаки між математичними поняттями; здатність бачити логічні відношення
прогнозує можливість кількох результатів розв'язання проблемної ситуації, форму їх представлення, точність та межі [9 MAO 1.3]	уміння встановлювати закономірності; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки
<i>2. Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	
шукає і опрацьовує інформацію математичного змісту, визначає повноту і надійність джерел, використовує обчислювальні та графічні можливості спеціалізованого	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність узагальнювати, уміння виділяти спільні ознаки; уміння встановлювати логічні

<p>програмного забезпечення для систематизації й інтерпретації даних і побудови допоміжних моделей; представляє і поширює інформацію математичного змісту з використанням різних засобів, зокрема цифрових, висловлює власні судження; використовує визначений спектр цифрових технологій та засобів комунікації для взаємодії, застосовує усталені практики цитування та посилення; перетворює інформацію математичного змісту різними способами у різні форми, зокрема використовуючи інформаційно-комунікаційні технології [9 MAO 2.1]</p>	<p>зв'язки; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>шукає підходи та розробляє стратегії вирішення проблемної ситуації; використовує різноманітні підходи для продукування нових ідей [9 MAO 2.2]</p>	<p>знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; уміння робити умовиводи; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>визначає компоненти проблемної ситуації та взаємозв'язки між ними, їх повноту, представляє їх у вигляді, придатному для розв'язання математичними методами, відшукує додаткові дані для вдосконалення моделі; здійснює перехід від абстрактного до конкретного і навпаки; будує математичну модель проблемної ситуації, доречно добирає математичний апарат для побудови моделі [9 MAO 2.3]</p>	<p>уміння встановлювати логічні зв'язки; здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки; здатність узагальнювати, уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими;</p>
<p>формулює та відображає у зручній формі результати розв'язання проблемної ситуації, зокрема з використанням широкого спектру цифрових технологій; обґрунтовано презентує результати вирішення проблемної ситуації, розпізнає сильні і слабкі аргументи, формулює контраргументи,</p>	<p>знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; здатність узагальнювати, уміння доводити твердження;</p>

висловлює ідеї, пов'язані з новим розумінням проблемної ситуації [9 МАО 2.4]	
<i>3. Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>	
прогнозує результат розв'язання проблемної ситуації залежно від зміни наявних даних [9 МАО 3.1]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки
оцінює різні способи розв'язання та різні моделі проблемної ситуації, пов'язані з ними припущення та обмеження, необхідні ресурси, аналізує спільні та відмінні риси цих способів, обирає найбільш раціональний; коригує спосіб розв'язання проблемної ситуації; добирає математичну модель до стандартної ситуації, комбінує математичні моделі для розв'язання складної проблемної ситуації [9 МАО 3.2]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння доводити твердження; уміння виділяти спільні ознаки між математичними поняттями уміння робити логічні висновки з отриманих результатів.
оцінює правильність та точність вирішення проблемної ситуації, виявляє та виправляє помилки, інтерпретує математичний результат у різних контекстах; прогнозує та оцінює наслідки можливих результатів розв'язання проблеми [9 МАО 3.3]	здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння робити умовиводи уміння встановлювати закономірності;
<i>4. Розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіння математичною мовою</i>	
визначає, описує та аналізує зв'язки між математичними об'єктами; зв'язує різні елементи математичних знань і умінь, узагальнює їх, робить висновки ; обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, аналізує і оцінює доказовість аргументів у своїх твердженнях і судженнях інших, враховує різні думки;	уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими; здатність до аналізу, порівняння та синтезу; уміння робити логічні висновки з отриманих результатів; здатність знаходити причинно-

<p>формулює припущення і досліджує їх істинність різними способами; визначає прогалини у власних математичних знаннях і вміннях та усуває їх [9 MAO 4.1]</p>	<p>наслідкові зв'язки,</p>
<p>доцільно добирає математичні поняття, факти, алгоритми, структури, процедури й міркування для вирішення проблемних ситуацій й одержання висновків, переносить знання з одного контексту на інший; виконує операції з математичними об'єктами, будує діаграми, графіки й геометричні конструкції; використовує різні форми представлення інформації, здійснює переходи між ними в процесі вирішення проблемної ситуації; використовує приладдя та комп'ютерні технології для знаходження результатів [6 MAO 4.2]</p>	<p>знання алгоритмів і методів розв'язування логічних задач; уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими; уміння робити логічні висновки з отриманих результатів. здатність теоретизувати, знаходити причинно-наслідкові зв'язки, здатність бачити логічні відношення та виділяти абстрактні зв'язки</p>
<p>доречно формулює, використовує математичні поняття, факти і процедури, аргументовано пояснює їх; використовує математичну нотацію, у тому числі в електронній формі, правильно її озвучує; доцільно та правильно вживає у мовленні математичну термінологію та символіку; висловлюється точно і лаконічно [9 MAO 4.3]</p>	<p>уміння встановлювати логічні зв'язки між математичними поняттями, між поняттями та їх властивостями, між системами різних понять, між уже наявними знаннями і здобутими; уміння робити логічні висновки з отриманих результатів. уміння доводити твердження;</p>

Анкета

1. Розкрийте поняття «логічна компетентність».
2. Охарактеризуйте сутність поняття «методика формування логічного складника математичної компетентності»
3. Аргументуйте актуальність методики формування логічної компетентності учнів в основній школі
4. Чи достатня кількість завдань у підручниках з математики для розвитку логічного мислення учнів основної школи
5. Наведіть приклади конкретних завдань на розвиток логічного мислення з Вашого досвіду роботи
6. Яка Ваша думка щодо необхідності застосування інноваційних засобів навчання під час формування логічного мислення учнів на уроках математики?
7. Оцініть свою здатність забезпечити умови для ефективного формування логічного складника математичної компетентності учнів на уроках математики

Контрольна робота для діагностико-прогностичного етапу (6 клас):

1. Знесли разом 7 стогів сіна та 11 стогів сіна. Скільки стогів сіна вийшло? (2 бали)

2. Порвано книгу. З книги випала частина сторінок. Перша сторінка куска має номер 387, а номер останньої складається з тих самих цифр, але записаних у іншому порядку. Скільки сторінок випало з книги? (2 бали)

3. Діана множить число на 3, Поліна додає 2, а Надя віднімає 1. У якій послідовності їм потрібно виконати дії, щоб із трьох отримати 14? Кожен виконує свою дію лише 1 раз. (3 бали)

4. Марійка живе на відстані 2 км від школи, її однокласник Дмитро – на відстані 5 км від школи. На якій відстані один від одного живуть Марійка та Дмитро? (3 бали)

5. В Андрія і Бориса разом 11 горіхів, у Андрія і Володимира — 12 горіхів, у Бориса й Володимира — 13 горіхів. Скільки всього горіхів у Андрія, Бориса й Володимира разом? (5 балів)

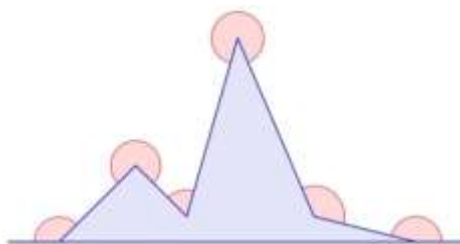
6. Дорогу довжиною 28 км поділили на три нерівні частини. Відстань між серединами крайніх частин дорівнює 16 км. Знайдіть довжину середньої частини. (5 балів)

Контрольна робота для мотиваційно-пізнавального етапу (7 клас):

1. В одному з під'їздів 8-поверхового будинку на першому поверсі розміщено квартири від 97 до 102. На якому поверсі і в якому під'їзді розміщена квартира 222, якщо всі під'їзди побудовано однаково і на кожному поверсі однакова кількість квартир? (2 бали)
2. Записали два числа. До першого додали друге і отримали третє. До другого додали третє і отримали четверте і т.д. Чому дорівнює сума шести написаних чисел, якщо п'яте дорівнює 7? (2 бали)
3. Використовуючи 6 прямих ліній, створіть 11 перетинів (точок, що виникли у результаті перетину ліній). (3 бали)
4. Дорога від дому до магазину в Андрія займає 40 хв. Одного разу по дорозі в магазин він згадав, що забув вдома список покупок. Якщо він піде далі, то прийде в магазин за 15 хв до обідньої перерви, якщо повернеться по список покупок, то запізниться на 5 хв. Яку частину дороги до магазину встиг пройти Андрій? (3 бали)
5. Равлик за день заповзає вгору по дереву на 4 м, а за ніч сповзає на 3 м. Висота дерева 10 м. За скільки днів равлик вперше доповзе до вершини дерева? (5 балів)
6. На кільцевій дорозі проводять естафету мотоциклістів. Лінії старту й фінішу естафети збігаються. Мотоциклісти рухаються колом в одному напрямку. Довжина кола 350 км. Довжина кожного етапу 75 км. Яка найменша кількість етапів може бути в цій естафеті? (5 балів)

Контрольна робота для активно-діяльнісного етапу (8 клас):

1. Як від двадцяти відняти 88 так, щоб залишилось 22? (2 бали)
2. На сковорідці вміщаються 2 шматочки хліба. Щоб підсмажити шматочок хліба з одного боку потрібна 1 хв. Як підсмажити за 3 хв 3 шматочки з обох боків? (2 бали)
3. Якщо людина йде на роботу пішки, а назад їде на транспорті, то в цілому на дорогу витрачає півтори години. Якщо ж в обидва кінці він їде на транспорті, то весь шлях займає в нього 30 хвилин. Скільки часу потрібно людині на дорогу, якщо на роботу й назад вона піде пішки? (3 бали)
4. Знайти суму кутів, позначених на рисунку. (3 бали)



5. Скелелаз стоїть на верхівці гладкої стрімкої скелі висотою 100 м. На висоті 50 м є виступ, на якому можна зробити проміжну зупинку. У скелелаз є мотузка довжиною 75 м. Як він може спуститися зі скелі? (5 балів)
6. Рибалки Андрій, Денис, Сергій та Микита (скорочено А, D, С і М – по перших літерах їхніх імен), зваживши свій улов, установили наступне:
 - (1) М піймав більше, ніж С.
 - (2) А і D разом піймали стільки ж, скільки С і М разом.
 - (3) А і М разом піймали менше, ніж D і С разом.
 Розташуйте результати зважувань уловів а, d, с та m рибалок А, D, С та М за величині. (5 балів)

Методика «Прості аналогії» (за описом Л.Д. Столяренко)

Мета: дослідження особливостей встановлення учнем логічних зв'язків і відношень між поняттями

Обладнання: бланк, на якому зліва подано пари слів, між якими існують певні зв'язки, а справа — слова, між якими необхідно знайти зв'язки такого ж типу (за заданим словом):

1. Школа — навчання	Лікарня (лікар, учень, заклад, лікування, хворий)
2. Пісня — глухий	Картина (кульгавий, сліпий, художник, малюнок, хворий)
3. Ніж — сталь	Стіл (виделка, дерево, стіл, їжа, скатертина)
4. Риба — сітка	Муха (решето, комар, кімната, дзижчати, павутина)
5. Птах — гніздо	Людина (люди, пташеня, робочий, звір, будинок)
6. Хліб — пекар	Будинок (вагон, місто, житло, будівельник, двері)
7. Пальто — гудзик	Черевик (кравець, магазин, нога, шнурок, капелюх)
8. Коса — трава	Бритва (сіно, волосся, гостра, сталь, інструмент)
9. Нога — чобіт	Рука (калоши, кулак, рукавиці, палець, кисть)
10. Вода — спрага	Їжа (пити, голод, хліб, рот, харчування)
11. Електрика — провід	Пар (лампочка, кінь, вода, труби, кипіння)
12. Паровоз — вагони	Кінь (поїзд, овес, коняка, віз, стайня)
13. Алмаз — рідкісний	Залізо (дорогоцінний, залізний, твердий, сталь, звичайний)
14. Бігти — стояти	Кричати (мовчати, повзати, шуміти, гукати, плакати)
15. Вовк — паща	Птаха (повітря, дзьоб, соловей, яйце, спів)
16. Театр — глядач	Бібліотека (актор, книги, читач, бібліотекар, любитель)
17. Залізо — коваль	Дерево (пень, пилка, столяр, кора, гілка)
18. Нога — милиця	Очі (палка, окуляри, сльози, зір, ніс)
19. Ранок — ніч	Зима (мороз, день, січень, осінь, сани)

Інструкція: «Між словами, поданими зліва, існують певні зв'язки. Ваше завдання полягає в тому, щоб на основі встановленого характеру зв'язку між кожною парою слів віднайти із запропонованих в дужках слів те, яке так само пов'язано з словом, винесеним за дужки. До виконання приступайте по заданій команді і намагайтеся працювати швидко й уважно».

1. Школа — навчання	Лікарня —
2. Пісня — глухий	Картина —
3. Ніж — сталь	Стіл —
4. Риба — сітка	Муха —

5. Птах — гніздо	Людина —
6. Хліб — пекар	Будинок —
7. Пальто — гудзик	Черевик —
8. Коса — трава	Бритва —
9. Нога — чобіт	Рука —
10. Вода — спрага	Їжа —
11. Електрика — провід	Пар —
12. Паровоз — вагони	Кінь —
13. Алмаз — рідкісний	Залізо —
14. Бігти — стояти	Кричати —
15. Вовк — паща	Птаха —
16. Театр — глядач	Бібліотека —
17. Залізо — коваль	Дерево —
18. Нога — милиця	Очі —
19. Ранок — ніч	Зима —

Обробка результатів: Підраховується кількість правильних відповідей за 3 хвилини роботи і визначається оцінка в умовних балах на основі таблиці:

Оцінка	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Правильні відповіді	19	18	17	16	15	13-14	11-12	10	9

На основі результатів дослідження та аналізу характеру встановлених учнем зв'язків між поняттями (конкретні, асоціативні, логічні) робиться висновок про особливості встановлення учнем зв'язків і відношень між поняттями; наводяться рекомендації по розвитку мисленнєвих операцій узагальнення й абстрагування засобами навчальної діяльності.

Тест Ліппмана «Логічні закономірності»

Мета: дослідження логічного аспекту мислення

Опис: Для дослідження надають письмово ряди чисел. Необхідно проаналізувати кожен ряд і встановити закономірність його побудови. Той, хто проходить дослідження, повинен визначити два числа, які б продовжили ряд. Час виконання завдань фіксується.

ЧИСЛОВІ РЯДИ:

- 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7
- 2) 6, 9, 12, 15, 18, 21
- 3) 1, 2, 4, 8, 16, 32
- 4) 4, 5, 8, 9, 12, 13
- 5) 19, 16, 14, 11, 9, 6
- 6) 29, 28, 26, 23, 19, 14
- 7) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5
- 8) 1, 4, 9, 16, 25, 36
- 9) 21, 18, 16, 15, 12, 10
- 10) 3, 6, 8, 16, 18, 36

Обробка та інтерпретація результатів: Перевірити правильність відповідей та рівень розвитку логічного мислення згідно «ключа».

Ключ до методики «Логічні закономірності»:

Числові ряди	Правильні відповіді
1) 2, 3, 4, 5, 6, 7	1) 8; 9
2) 6, 9, 12, 15, 18, 21	2) 24; 27
3) 1, 2, 4, 8, 16, 32	3) 64; 128
4) 4, 5, 8, 9, 12, 13	4) 16; 17
5) 19, 16, 14, 11, 9, 6	5) 4; 1
6) 29, 28, 26, 23, 19, 14	6) 8; 1
7) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5	7) 0,25; 0,125
8) 1, 4, 9, 16, 25, 36	8) 49; 64
9) 21, 18, 16, 15, 12, 10	9) 9; 6
10) 3, 6, 8, 16, 18, 36	10) 38; 76

Оцінка результатів за допомогою таблиці.

Час виконання	К-сть помилок	Бал	Рівень розвитку логічного мислення
2 хв або менше	0	5	Високий рівень логічного мислення
2 хв 10 с – 4 хв 30 с	0	4	Хороший рівень логічного мислення; вищий, ніж у більшості
4 хв 35 с – 9 хв 50 с	0	3+	Хороша норма більшості людей
4 хв 35 с – 9 хв 50 с	1	3	Середня норма
4 хв 35 с – 9 хв 50 с	2-3	3-	Низька норма
2 хв 10 с – 15 хв	4-5	2	Нижче середнього рівня розвитку логічного мислення
10 хв – 15 хв	0-3	2+	Низька швидкість мислення
Більше 15 хв	Більше 5	1	Відсутність логічного мислення або висока перевтома

Методика «Логічність умовиводів»

Опис: Досліджуваному зачитують 20 завдань, в кожному з яких є два пов'язаних між собою судження і висновок-умовивід. Серед запропонованих умовиводів є правильні і неправильні. Досліджуваний має визначити який з умовиводів правильний, а який помилковий. На обдумування кожного із завдань дається 10 с.

1. Усі метали проводять електрику. Ртуть – метал. Значить, ртуть проводить електрику.	вірно	невірно
2. Усі араби смуглі. Ахмед смуглий. Отже, Ахмед – араб.	вірно	невірно
3. Деякі капіталістичні країни – члени НАТО. Японія – капіталістична країна. Отже, Японія – член НАТО.	вірно	невірно
4. Усі випускники медичного вишу отримують диплом. Іванов отримав диплом. Отже, Іванов – випускник медичного вузу.	вірно	невірно
5. Усі твори Шевченка не можна прочитати за одну ніч. «Гайдамаки» – твір Шевченка. Отже, «Гайдамаки» не можна прочитати за одну ніч.	вірно	невірно
6. Осіб, що займаються шахрайством, притягують до кримінальної відповідальності. Л. не займався шахрайством. Отже, Л. не притягувався до кримінальної відповідальності.	вірно	невірно
7. Усі студенти вищої школи вивчають логіку. Смирнов вивчає логіку. Отже, Смирнов навчається у вищій школі.	вірно	невірно
8. Деякі студенти Київського інституту – колишні військовослужбовці. Петров – студенту Київського інституту. Отже, Петров – колишній військовослужбовець.	вірно	невірно
9. Усі заводи Київської області є економічно успішними. Завод «Промінь» не у Київській області. Отже, завод «Промінь» не є економічно успішним. 10. Деякі працівники районної адміністрації – юристи. Фомін – юрист. Отже, він працівник районної адміністрації.	вірно	невірно
11. Усі громадяни України мають право на працю. Іванов – громадянин України. Отже, Іванов має право на працю.	вірно	невірно

12. Усі метали можна кувати. Золото – метал. Отже, золото можна кувати.	вірно	невірно
13. Усі корінні жителі Конго – негри. Мухамед – негр. Отже, Мухамед – житель Конго.	вірно	невірно
14. Усі студенти Київського університету вивчають історію України. Іванов вивчає історію України. Отже, Іванов – студент Київського університету.	вірно	невірно
15. Коли йде дощ, дахи будинків мокрі. Дахи будинків мокрі. Отже, йде дощ.	вірно	невірно
16. Деякі політики прагнуть почати війну. М. – політик. Отже, М. прагне почати війну.	вірно	невірно
17. Усі учні 8-го класу виконали самостійну роботу з фізики. Іванов виконав самостійну роботу з фізики. Отже, Іванов – учень 8-го класу.	вірно	невірно
18. Усі демократи проти війни. П. виступає проти війни. Отже, П. – демократ. 226	вірно	невірно
19. Деякі африканські країни належать до Всесвітньої організації торгівлі. Кенія – африканська країна. Отже, Кенія належить до Всесвітньої організації торгівлі.	вірно	невірно
20. Усі учні 7-го класу добре знають біологію. Смирнов добре знає біологію. Отже, Смирнов – учень 7-го класу.	вірно	невірно

Обробка та аналіз результатів: Отримані результати оцінюються за таблицею:

Кількість помилок	Бали	Рівень логічності
0	5	Високий рівень логічності в розмірковуваннях
1	4	Достатній рівень логічності в розмірковуваннях
2-3	3	Середній рівень логічності в розмірковуваннях
4-6	2	Низький рівень логічності в розмірковуваннях, часті логічні помилки

**Додаткова система задач для формування логічного складника
математичної компетентності учнів**

Задача 1. Дано $\triangle ABC$. Чи існує на площині точка P , що $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ рівнобедрені? Якщо: а) $\triangle ABC$ – рівносторонній; б) $\triangle ABC$ – рівнобедрений.

Розв'язання

а) $\triangle ABC$ – рівносторонній

1. Розглянемо випадок, коли т. P лежить всередині $\triangle ABC$ (Рис.4.1.).

Якщо така точка P існує і $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ рівнобедрені, то враховуючи, що $\triangle ABC$ рівносторонній, $AP < AC$ і $PC < AC$ (якщо це не виконується, то т. P лежить поза площиною $\triangle ABC$).

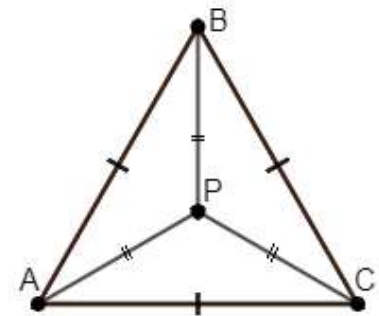


Рисунок 4.1.

Отже, якщо $\triangle PCA$ рівнобедрений, то $AP = PC$. Аналогічно у $\triangle PAB$ – $AP = PB$, у $\triangle PBC$ – $CP = PB$.

Проведемо серединні перпендикуляри до сторін AC , AB і BC , що перетнуться у точці P , яка є центром описаного кола.

Отже, $AP = PC = PB$ (як радіуси кола, описаного навколо $\triangle ABC$).

Таким чином, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ рівнобедрені, у яких $AP = PC$, $AP = PB$, $CP = PB$ відповідно.

Отже, така т. P існує і є центром кола, описаного навколо $\triangle ABC$

2. Розглянемо випадок, коли т. P лежить за межами трикутника $\triangle ABC$ (Рис.4.2.).

Розглянемо випадок, коли т. P лежить за межами трикутника $\triangle ABC$ відносно сторони BC (відносно сторін AB і AC можна буде довести аналогічно).

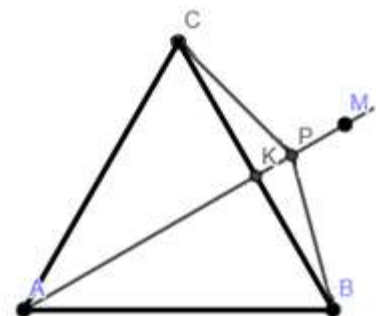


Рисунок 4.2.

Для того, щоб $\triangle PBC$ був рівнобедреним, т. P повинна лежати на перпендикулярі, проведеному через середину сторони BC .

Проведемо серединний перпендикуляр до сторони BC .

Оскільки $\triangle ABC$ рівносторонній, то цей перпендикуляр проходить через вершину A $\triangle ABC$.

На перпендикулярі AM позначимо т. P так, що $AP = AB = AC$.

Отже, $\triangle PAB$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Оскільки т. P лежить на серединному перпендикулярі, то $\triangle PBC$ теж рівнобедрений.

Перевіримо чи не існує інших точок P_i , для яких $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені (Рис. 4.3.).

Нехай т. K – точка перетину серединного перпендикуляра і сторони BC . Продовжимо AM на відрізок AK , отримавши т. P_1 .

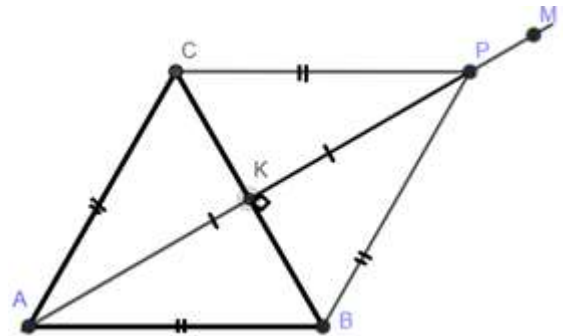


Рисунок 4.3.

Оскільки $AK = KP_1$, $KC \perp AK$, то $\triangle PCA$ рівнобедрений. Аналогічно можна довести, що $\triangle PAB$ рівнобедрений.

Оскільки т. P_1 лежить на серединному перпендикулярі, то $\triangle PBC$ теж рівнобедрений.

Отже, зовні $\triangle ABC$ відносно сторони BC існує дві точки P , для яких $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Аналогічно можна довести існування точок P_i відносно сторін AB і AC , для яких $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Таким чином, зовні $\triangle ABC$ існує 6 точок P_i , для яких виконуються умови задачі.

б) $\triangle ABC$ – рівнобедрений

1. Розглянемо випадок, коли т. P лежить всередині $\triangle ABC$ (Рис. 4.4.).

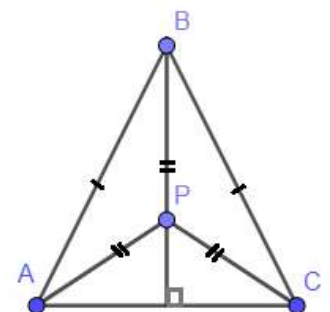


Рисунок 4.4.

Аналогічно до попереднього пункту, ця точка є центром кола, описаного навколо $\triangle ABC$.

2. Розглянемо випадок, коли т. P лежить зовні $\triangle ABC$ (Рис.4.5.).

Розглянемо випадок, коли т. P лежить за межами трикутника $\triangle ABC$ відносно сторони AC .

Для того, щоб $\triangle PAC$ був рівнобедреним, т. P повинна лежати на перпендикулярі, проведеному через середину сторони AC .

Проведемо серединний перпендикуляр до сторони AC .

Оскільки $\triangle ABC$ рівнобедрений, то цей перпендикуляр проходить через вершину B $\triangle ABC$.

На перпендикулярі BM позначимо т. P так, що $BP = BA = BC$.

Отже, $\triangle PAB$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Оскільки т. P лежить на серединному перпендикулярі, то $\triangle PBC$ теж рівнобедрений.

Перевіримо чи не існує інших точок P_i , для яких $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені (Рис.4.6.).

Нехай т. K – точка перетину серединного перпендикуляра і сторони AC . Продовжимо BM на відрізок BK , отримавши т. P_1 .

Оскільки $BK = KP_1$, $KA \perp BK$, то $\triangle PAB$ рівнобедрений. Аналогічно можна довести, що $\triangle PCB$ рівнобедрений.

Оскільки т. P_1 лежить на серединному перпендикулярі, то $\triangle PAC$ теж рівнобедрений.

Отже, зовні $\triangle ABC$ відносно сторони BC існує дві точки P , для яких $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ і $\triangle PCA$ рівнобедрені.

Задача 2. У півколі нарисовані два півкола, як показано на рисунку. Чи можна розмістити точну дотику R так, щоб: а) периметр великого півкола був більший суми периметрів двох менших півкіл; б) периметр великого півкола

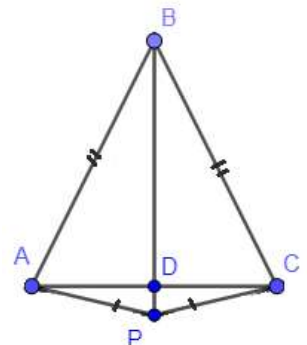


Рисунок 4.5.

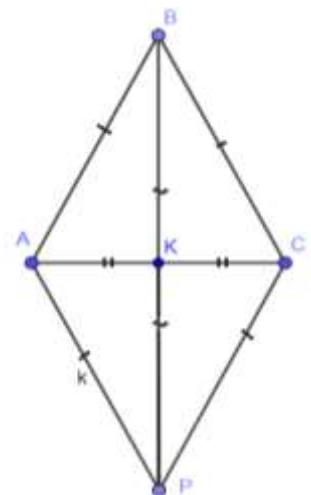


Рисунок 4.6.

менший був менший суми периметрів двох менших півкіл; в) периметр великого півкола дорівнював сумі периметрів двох менших півкіл? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання.

Позначимо:

O – центр великого півкола, O_1 і O_2 – центри двох менших півкіл.

d – діаметр великого півкола, d_1 і d_2 – діаметри двох менших півкіл.

$$d = d_1 + d_2$$

Тоді, довжина великого півкола - $C = \frac{\pi d}{2}$, довжини менших півкіл - $C_1 = \frac{\pi d_1}{2}$ та $C_2 = \frac{\pi d_2}{2}$.

Оскільки $d = d_1 + d_2$, то $C = \frac{\pi d}{2} = \frac{\pi(d_1 + d_2)}{2} = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2}$.

Знайдемо суму периметрів двох менших півкіл:

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2} = C$$

Отже, можливий тільки випадок, коли периметр великого півкола дорівнює сумі периметрів двох менших півкіл.

Відповідь. Периметр великого півкола дорівнює сумі периметрів двох менших півкіл.

Задача 3. Чи можна розрізати трикутник на три частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник? Розглянути коли трикутник гострокутний, прямокутний та тупокутний.

Розв'язання.

1) $\triangle ABC$ – гострокутний

З точок L і M – середин сторін AC і BC – опустимо перпендикуляри LL_1 і MM_1 на основу AB .

Якщо розрізати $\triangle ABC$ вздовж LL_1 і MM_1

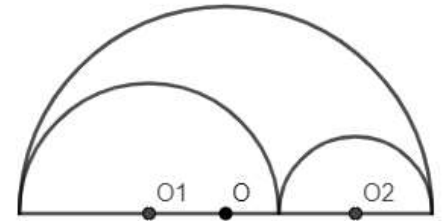


Рисунок 4.7.

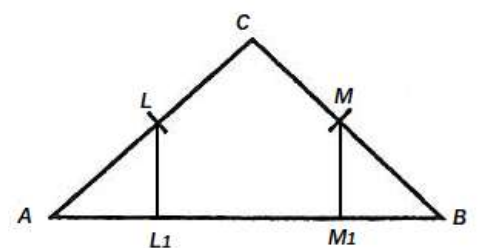


Рисунок 4.8.

та повернути трикутники ALL_1 і MM_1B навколо точок L і M на 180° , то отримаємо прямокутник.

Взявши за основу AC чи BC , отримаємо ще два розв'язки.

2) $\triangle ABC$ – прямокутний

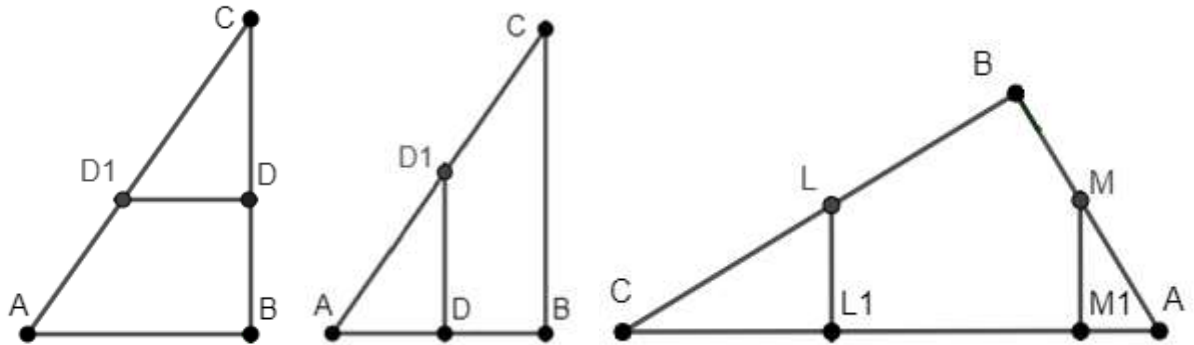


Рисунок 4.9.

Попередній спосіб розв'язання виконується, якщо основою вибрати гіпотенузу. Якщо ж основою будуть катети, то для утворення прямокутника достатньо розрізати трикутник на дві частини.

3) $\triangle ABC$ – тупокутний

Розрізати трикутник таким чином можна лише якщо основою вибрано сторону, яка лежить проти тупого кута.

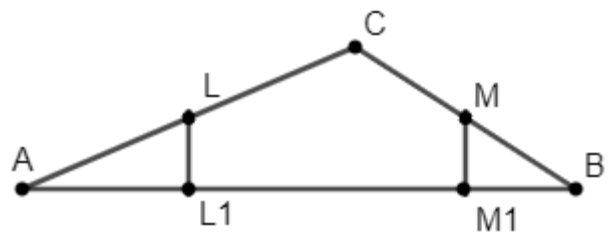


Рисунок 4.10.

Задача 5. Прожектори по периметру освітлюють прямокутну огорожу розміром $a \times b$. Розмістити мінімальну кількість прожекторів для повної освітленості за умови, що прожектор розсіює промені під кутом φ і для забезпечення нормативної освітленості прожектор не може бути віддалений від огорожі більше, ніж на відстань $c \left(a > b > 2c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$. Домогтись в умовах задачі максимальної інтенсивності освітлення огорожі.

Розв'язання.

Враховуючи умови задачі, бачимо, що для освітленості прямокутної огорожі $ABCD$ прожектори потрібно розміщувати окремо для кожної сторони (рис.4.11). Отже, потрібно:

- 1) підрахувати, яку частину огорожі d може освітити прожектор, віддалений від неї на максимальну відстань c (рис.4), що дає можливість вибрати мінімальну кількість прожекторів;
- 2) визначити найменшу кількість прожекторів, потрібну для освітленості сторін AB і CD та BC і AD ;
- 3) з'ясувати, чи дозволяють умови задачі розмістити прожектори ближче до огорожі, ніж на відстань c .

Як видно з рисунку, прожектор, віддалений від неї на максимальну відстань c від огорожі, може освітити частину огорожі $MN = d = 2c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

Тому, якщо $a = pd$ і p – ціле число, то для освітленості кожної зі сторін AB і CD потрібно взяти p прожекторів; якщо $pd < a < (p+1)d$, то потрібно $p+1$ прожекторів. Аналогічно, якщо $b = qd$ і q – ціле число, то для освітленості кожної зі сторін BC і AD потрібно взяти q прожекторів; якщо ні, то $q+1$ прожекторів.

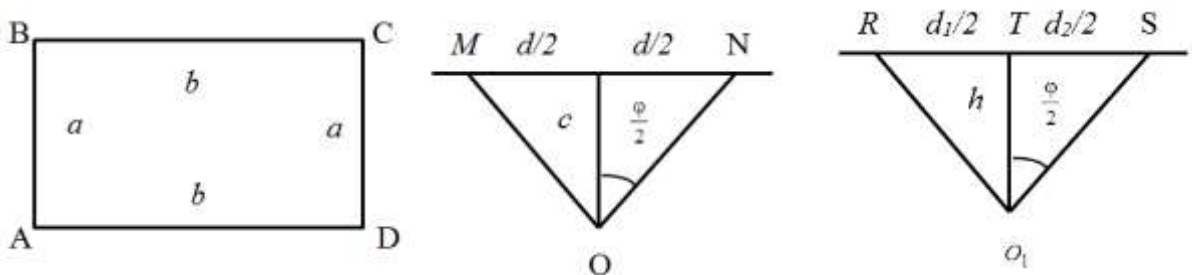


Рисунок 4.11.

Отже, можна зробити такі висновки. Якщо p, q – цілі числа, то мінімальна кількість прожекторів, потрібна для освітлення всієї огорожі, становитиме $2(p+q)$; якщо ж p – ціле число, а q – ні, то $2p+2(q+1)$; якщо q – ціле число, а p – ні, то $2q+2(p+1)$; якщо p, q – нецілі числа, то $2(p+q+)$.

У випадку, якщо p або q є нецілими числами, то прожектори на відповідних сторонах можна розмістити ближче до огорожі, ніж на відстань c . Нехай, наприклад, p – неціле число. Позначимо $d_1 = \frac{a}{p+1} = RS$ і знайдемо відстань h від прожектора до огорожі, за якої буде освітленим відрізок $RS = d_1$ (рис. 4.11):

$$h = \frac{d_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Відповідь. Отже, якщо p – неціле число, то на сторонах AB і CD розмістяться по $(p+1)$ -му прожектору, які можна розмістити до огорожі на відстані $h < c$ (максимально збільшивши інтенсивність освітлення).

Аналогічні міркування і для сторін BC і AD

Задача 6. Доведіть, що серед всіх трикутників з фіксованим кутом α і площею S найменшу довжину сторони BC має рівнобедрений трикутник з основою BC .

Розв'язання.

За теоремою косинусів

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha) = \\ &= (b-c)^2 + 4S \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Так як значення другого доданка незмінне, то a мінімальне, якщо $b = c$.

Задача 7. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC обрана точка X ; M і N – її проєкції на катети AC і BC . а) При якому положенні точки X довжина відрізка MN буде найменшою? б) При якому положенні точки X площа чотирикутника $CMXN$ буде найбільшою?

Розв'язання.

а) Так як $CMXN$ – прямокутник, то $MN = CX$. Тому довжина відрізка MN буде найменшою, якщо CX – висота.

б) Нехай $S_{ABC} = S$. Тоді $S_{AMX} = AX^2 \cdot \frac{S}{AB^2}$ і $S_{BNX} = BX^2 \cdot \frac{S}{AB^2}$. Оскільки $AX^2 + BX^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ (причому рівність досягається, тільки якщо X – середина відрізка AB), то $S_{CMXN} = S - S_{AMX} - S_{BNX} \leq \frac{S}{2}$. Площа чотирикутника $CMXN$ буде найбільшою, якщо X – середина сторони AB .

Задача 8. На одній стороні гострого кута дані точки A і B . Побудуйте на іншій його стороні точку C , з якої відрізок AB видно під найбільшим кутом.

Розв'язання.

Нехай O – вершина даного кута. Точка C є точкою дотику сторони кута з колом, яке проходить через точки A і B , тобто $OC^2 = OA \cdot OB$. Для того, щоб знайти довжину відрізка OC достатньо провести дотичну до будь-якого кола, яке проходить через точки A і B .

Задача 9. Площа трапеції дорівнює 1. Яку найменшу величину може мати найбільша діагональ цієї трапеції.

Розв'язання.

Довжини діагоналей трапеції позначимо через d_1 і d_2 , довжини їх проєкцій на основу – через p_1 і p_2 , довжини основ – через a і b , висоту – через h . Нехай для означеності $d_1 \geq d_2$. Тоді $p_1 \geq p_2$. Очевидно, що

$p_1 + p_2 \geq a + b$. Через це $p_1 \geq \frac{a+b}{2} = \frac{S}{h} = \frac{1}{h}$. Звідси слідує що,

$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$, причому рівність досягається, тільки якщо

$p_1 = p_2 = h = 1$. При цьому $d_1 = \sqrt{2}$.

Задача 10. Серед всіх багатокутників, вписаних в дане коло, знайдіть той, у якого сума квадратів довжин сторін максимальна.

Розв'язання.

Якщо в трикутнику ABC кут B тупий чи прямий, то за теоремою косинусів $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$. Через це, якщо в багатокутнику кут при вершині B не гострий, то, відкинувши вершину B , отримаємо багатокутник з неменшою сумою квадратів довжин сторін. Так як у будь-якого n -кутника при $n \geq 3$ є негострий кут, з допомогою такої операції ми приходимо до трикутника. Серед всіх трикутників, вписаних в дане коло, найбільшу суму квадратів довжин сторін має правильний трикутник.

Задача 11. Доведіть, що серед всіх n -кутників, описаних навколо даного кола, найменшу площу має правильний n -кутник.

Розв'язання.

Нехай неправильний n -кутник описаний навколо кола S . Опишемо навколо цього кола правильний n -кутник, а навколо нього опишемо коло S_1 . Доведемо, що площа частини неправильного n -кутника, яка знаходиться всередині S_1 , більша за площу правильного n -кутника. Всі дотичні до S відтинають від S_1 рівні сегменти. Тому сума площ сегментів, відділених від S_1 сторонами правильного n -кутника, рівна сумі площ сегментів, відділених від S_1 сторонами неправильного n -кутника або їх продовженнями. Але для правильного n -кутника ці сегменти не перетинаються (точніше кажучи, не мають спільних внутрішніх точок), а для неправильного n -кутника деякі з них обов'язково перекриваються, через що площа об'єднання цих сегментів для правильного n -кутника більша, ніж для неправильного. Звідси слідує, що площа частини неправильного n -кутника, яка знаходиться всередині кола S_1 , більша за площу правильного n -кутника, а площа всього неправильного n -кутника тим паче більша за площу правильного.

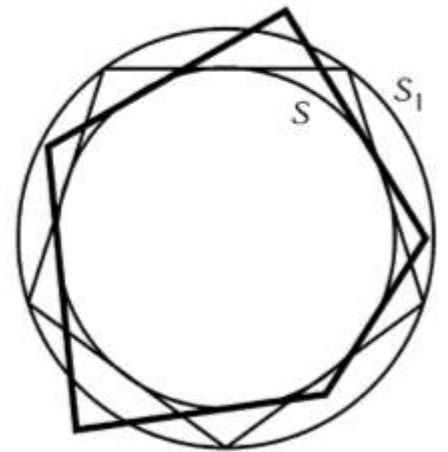


Рисунок 4.12.

Задача 12. Доведіть, що серед всіх n -кутників, вписаних в дане коло, найбільшу площу має правильний n -кутник.

Розв'язання.

Позначимо довжину сторони правильного n -кутника, вписаного в коло, через a_n . Розглянемо довільний неправильний n -кутник, вписаний в це коло. У нього обов'язково знайдеться сторона довжиною меншою a_n . А от сторони з більшою довжиною, ніж a_n , у нього може і не бути, але тоді цей многокутник можна вписати в сегмент, що відсікається стороною правильного n -кутника. Так як при симетрії відносно сторони правильного n -кутника сегмент, що відсікається цією стороною, потрапляє всередину n -кутника, то площа n -кутника більша за площу сегмента. Тому можна вважати, що у n -кутника, який розглядаємо, є сторона довжиною менше за a_n і сторона більша a_n .

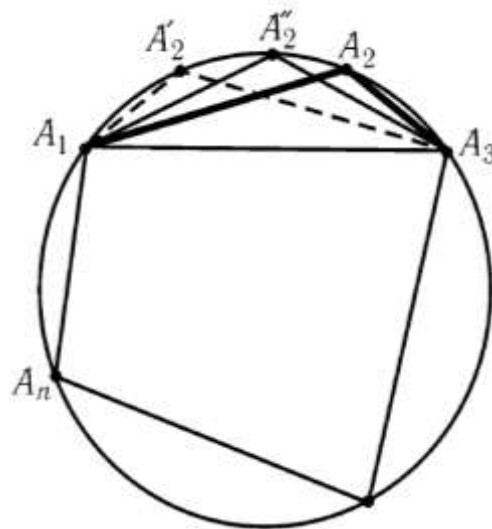


Рисунок 4.13.

Ми можемо поміняти місцями сусідні сторони n -кутника, тобто замість многокутника $A_1A_2A_3\dots A_n$ взяти многокутник $A_1A_2'A_3\dots A_n$, де точка A_2' симетрична точці A_2 відносно серединного перпендикуляра до відрізка A_1A_3 . При цьому два многокутники вписані в одне і те ж коло і їх площі рівні. Очевидно, що з допомогою цієї операції можна зробити сусідніми будь-які дві сторони многокутника. Тому будемо вважати, що у n -кутника, який

розглядаємо, $A_1A_2 > a_n$ і $A_2A_3 < a_n$. Нехай A_2' – точка, симетрична до точки A_2 відносно серединного перпендикуляра до відрізка A_1A_3 . Якщо точка A_2'' лежить на дузі A_2A_2' , то різниця кутів при основі A_1A_3 трикутника $A_1A_2''A_3$ менша, ніж у трикутника $A_1A_2A_3$, так як міри кутів $A_1A_3A_2''$ і $A_3A_1A_2''$ знаходяться між мірами кутів $A_1A_3A_2$ і $A_3A_1A_2$. Оскільки $A_1A_2' < a_n$ і $A_1A_2 > a_n$, то на дузі A_2A_2' існує точка A_2'' , для якої $A_1A_2'' = a_n$. Площа трикутника $A_1A_2''A_3$ більша за площу трикутника $A_1A_2A_3$. Площа многокутника $A_1A_2''A_3\dots A_n$ більша за площу вихідного многокутника, і у нього щонайменше на 1 більше сторін, які рівні a_n . Після кінцевого числа кроків ми прийдемо до правильного n -кутника, причому кожен раз площа збільшується. Відповідно, площа будь-якого неправильного n -кутника, вписаного в коло, менша за площу правильного n -кутника, вписаного в те ж коло.

Задача 13. Яку найменшу ширину повинна мати нескінченна смужка паперу, щоб із неї можна було вирізати будь-який трикутник площею 1?

Розв'язання.

Так як площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, сторона правильного трикутника площею 1 дорівнює $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а його висота – $\sqrt{3}$. Доведемо, що із смужки шириною менше $\sqrt{3}$ не можна вирізати правильний трикутник площею 1. Нехай правильний трикутник ABC лежить всередині смужки шириною менше $\sqrt{3}$. Нехай для означеності проекція вершини B на межу смужки лежить між проекціями вершин A і C . Тоді пряма, проведена через точку B перпендикулярно межі смужки, перетинає відрізок AC в деякій точці M . Висота трикутника ABC не перевищує BM , а BM не більше за ширину смужки, через це висота трикутника ABC менша за $\sqrt{3}$, тобто його площа менша 1.

Залишається довести, що із смужки шириною $\sqrt[4]{3}$ можна вирізати будь-який трикутник площею 1. Доведемо, що у будь-якого трикутника площею 1 є висота, що не перевищує $\sqrt[4]{3}$. Для цього достатньо довести, що у нього є сторона не менша $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Припустимо, що всі сторони трикутника ABC менші за $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Нехай α – найменший кут цього трикутника. Тоді $\alpha \leq 60^\circ$ і

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin \alpha}{2} < \left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1. \text{ Отримали протиріччя. Трикутник, у}$$

якого висота не перевищує $\sqrt[4]{3}$, можна помістити в смужку шириною $\sqrt[4]{3}$, поклавши сторону, на яку опущена ця висота, на сторону смужки.

Задача 14. По висоті розділимо рівносторонній трикутник на два трикутники і розташуємо їх так, як показано на малюнку. Площа рівностороннього трикутника дорівнює 600 см^2 . Знайдіть площу заштрихованої фігури (площу фігури, яка є спільною частиною двох новоутворених трикутників).

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ – рівносторонній, $AB = BC = AC = a$. Тоді отримаємо два трикутники: $\triangle ABK$ і $\triangle PCB$ у яких $\angle PBC = \angle AKB = 90^\circ$, $\angle PCB = \angle ABK = 60^\circ$, $\angle BAK = \angle CPB = 30^\circ$, $S_{\triangle ABK} = 300 \text{ см}^2$.

Для знаходження площі заштрихованої фігури знайдемо площу $\triangle AMN$ та $\triangle BDK$. Тоді $S_{MNDP} = S_{\triangle ABK} - (S_{\triangle AMN} + S_{\triangle BDK})$

Оскільки $\angle MAN = 30^\circ$ і $\angle ANM = 90^\circ$, то $\angle AMN = 180 - (90 + 30) = 60^\circ$.

$\angle CMB = \angle AMN = 60^\circ$ (як вертикальні кути).

$\angle BCM = 60^\circ$, $\angle CMB = 60^\circ$, то $\angle CBM = 180 - (60 + 60) = 60^\circ$.

Отже, $\triangle BCM$ – рівносторонній і $BC = CM = MB = a/2$.

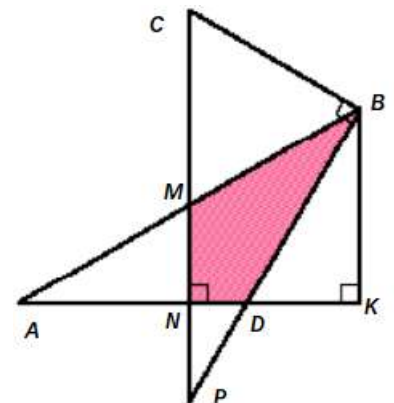


Рисунок 4.14.

Звідси $AM = a/2$

$$\triangle AMN \sim \triangle ABK, \text{ тому } \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABK}} = \frac{AM^2}{AB^2}; \frac{S_{\triangle AMN}}{300} = \frac{(\frac{a}{2})^2}{a^2}.$$

$$S_{\triangle AMN} = \frac{300 \cdot \frac{a^2}{4}}{a^2} = 75 \text{ (см}^2\text{)}$$

Оскільки $\angle NPD = 30$ і $\angle PND = 90$, то $\angle NDP = 180 - (90+30) = 60$.

$\angle BDK = \angle NDP = 60$ (як вертикальні кути).

Отже, $\angle DBK = 180 - (90 + 60) = 30$.

$$\text{Таким чином, } \triangle BDK \sim \triangle ABK, \text{ тому } \frac{S_{\triangle BDK}}{S_{\triangle ABK}} = \frac{BK^2}{AK^2}.$$

$$BK = \frac{a}{2}, AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle BDK}}{300} = \frac{(\frac{a}{2})^2}{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$S_{\triangle BDK} = \frac{300 \cdot \frac{a^2}{4}}{\frac{a^2 \cdot 3}{4}} = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, $S_{MNPD} = 300 - (75 + 100) = 125 \text{ (см}^2\text{)}.$

Відповідь. Площа заштрихованої фігури 125 см^2 .

Задача 15. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається сторони AB у такій точці D , коли $AC \cdot CB = 2AD \cdot DB$. Довести, що трикутник прямокутний.

Розв'язання.

Пригадаємо, що дотичні, проведені з однієї точки до того самого кола, рівні між собою.

Отже, маємо, що $AC = AD + CE$; $BC = CE + BD$. З умови задачі випливає, що $AC \cdot BC = 2AD \cdot DB$.

Замість AC і BC підставимо їхні значення:

$$(AD + CE)(CE + BD) = 2AD \cdot DB;$$

$$CE^2 + (AD + BD)CE + AD \cdot DB - 2AD \cdot DB = 0$$

$$CE^2 + AB \cdot CE - AD \cdot DB = 0$$

Розв'язуємо квадратне рівняння відносно CE :

$$CE = \frac{-AB \pm \sqrt{AB^2 + 4AD \cdot DB}}{2}$$

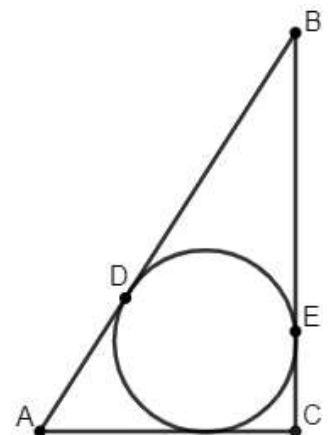


Рисунок 4.15.

(від'ємне значення не задовільняє, бо довжина відрізка не може бути від'ємною).

Знайдемо, що

$$CE = \frac{-AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}}{2}.$$

Периметр $\triangle ABC$ буде

$$AB + BC + AC = 2AB + 2CE$$

Підставивши замість CE його значення, дістанемо

$$AB + BC + AC = 2AB - AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}$$

$$BC + AC = \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}.$$

Піднесемо до квадрата

$$BC^2 + 2BC \cdot AC + AC^2 = AB^2 + 2AC \cdot BC$$

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

Отже, трикутник ABC буде прямокутним.

Задача 16. З вершини башти заввишки 30 м можна побачити міст, напрямлений в одній вертикальній площині з віссю башти. Промені зору, які йдуть до кінців моста, складають з вертикаллю кути в 60 та 45. Знайти довжину моста.

Розв'язання

За умовою задачі $AB = 30$ м, $\angle D = 45^\circ$ і $\angle ABC = 60^\circ$. З $\triangle BAD$ знайдемо, що $AB = AD$, а з $\triangle BAC$ – що $AC = AB \operatorname{tg} 60^\circ = 30\sqrt{3}$, або $AC \approx 52$ м; звідки $DC \approx 22$ м.

Відповідь. Довжина моста 22 м.

Задача 17. Знайти кути трикутника, якщо відомо, що висота, бісектриса і медіана, проведені з однієї з його вершин, ділять кут на чотири рівні частини.

Розв'язання.

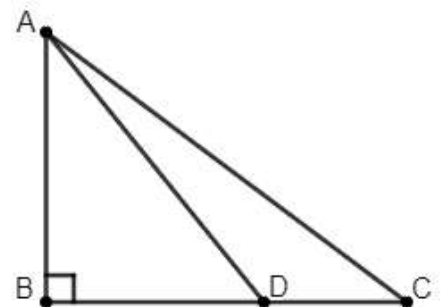


Рисунок 4.16.

Опишемо навколо даного $\triangle ABC$ коло і продовжимо до перетину з ним медіану BO , висоту BN та бісектрису BM , які виходять з однієї вершини. Згідно з умовою задачі $\cup AF = \cup FE = \cup ED = \cup DC$.

Позначимо $\angle ABF = \angle FBE = \angle EBD = \angle DBC = \alpha$.

З $\triangle BNC$ маємо, що $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \alpha$, отже, $\cup AKB = \pi - 2\alpha$, крім того, $\cup AF = 2\alpha$. $\cup BAF = \cup BKA + \cup AF = \pi - 2\alpha + 2\alpha = \pi$, а це означає, що BF – діаметр описаного кола, причому точка O поділяє AC навпіл (BO – медіана до сторони AC).

$$\cup AE = \cup EC; AO = OC$$

EOK – діаметр, перпендикулярний до хорди AC . Точка O – центр описаного кола, звідки виходить, що AC – теж діаметр.

$$\text{Таким чином, } \angle ABC = \frac{\pi}{2}; \angle BCA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}; \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, рис.4.17 – неправильний, правильним буде рис.4.18.

Відповідь. Кути трикутника $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$.

Задача 18. У рівносторонній трикутник вписане коло, в яке вписано правильний шестикутник. Знайти відношення площ шестикутника та трикутника.

Розв'язання.

Розглянемо $\triangle NOE$, площа якого $S = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Площа шестикутника $S = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$.

Знайдемо площу $\triangle ABC$, висота якого $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

тоді радіус вписаного кола $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, звідки $a =$

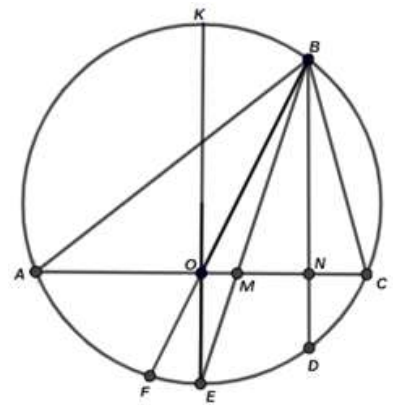


Рисунок 4.17.

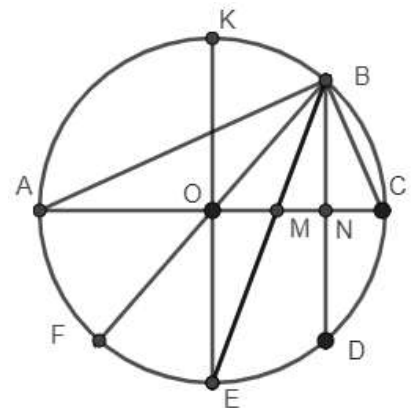


Рисунок 4.18.

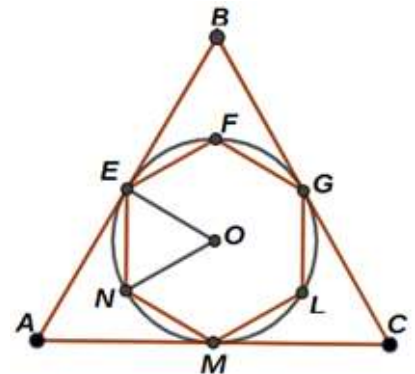


Рисунок 4.19.

$$2r\sqrt{3}.$$

Площа правильного трикутника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\Delta ABC} = 3r^2\sqrt{3}$.

Тоді відношення площ шестикутника і трикутника дорівнюватиме

$$\frac{S_{MLGFEN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}$$

Відповідь. Відношення площ шестикутника та трикутника $\frac{1}{2}$.

Задача 19. Знайти відношення площі трикутника до площі другого трикутника, сторони якого є медіанами першого.

Розв'язання.

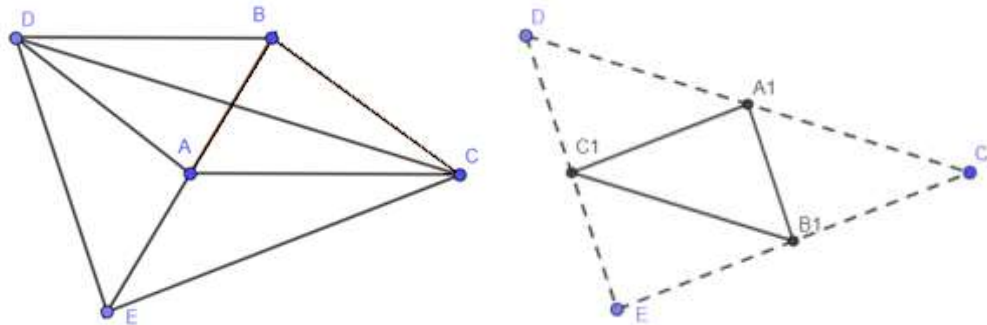


Рисунок 4.20.

Нехай сторони трикутника $A_1B_1C_1$ відповідно дорівнюють медіанам трикутника ABC . Перенісши паралельно сторону AC трикутника ABC в положення BD і відклавши на продовженні AB відрізок $AE = AB$, отримаємо трикутник CDE , сторони якого рівні подвоєним медіанам трикутника ABC , а отже, і подвоєним сторонам $A_1B_1C_1$.

Тоді $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta CDE$ і $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{1}{4}$.

Але площа ΔCDE у 3 рази більша площі ΔABC .

Таким чином, $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{4}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Задача 20. Довести, що вписане в прямокутний трикутник коло точкою дотику поділяє гіпотенузу на відрізки, добуток яких дорівнює площі трикутника.

Розв'язання.

Позначимо відрізок AG через a , відрізок GC через b .

Відомо, що дотичні, які виходять з однієї точки кола, рівні між собою

Позначимо відрізок $BE = BF = z$, тоді

$$AB = a + z; BC = b + z; AC = a + b.$$

За теоремою Піфагора

$$(a + z)^2 + (b + z)^2 = (a + b)^2,$$

Звідки

$$z^2 + (a + b)z - ab = 0; z^2 + (a + b)z = ab.$$

Таким чином,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(a+z)(b+z)}{2} = \frac{z^2 + (a+b)z + ab}{2},$$

замінюючи $z^2 + (a + b)z$ через ab , знайдемо, що $S = ab$.

Доведено.

Задача 21. Знайти сторони трикутника, коли відомо, що сума двох його сторін дорівнює 40 см, бісектриса кута між цими сторонами 15 см, а проекція бісектриси на одну з цих сторін 12 см.

Розв'язання.

Нехай: $AD = 15$ см ; $\angle BAD = \angle DAC$; $DF \perp AB$; $AE = 12$ см ; $AB + AC = 40$ см; $DF \perp AC$.
Визначити AB , AC , і BC .

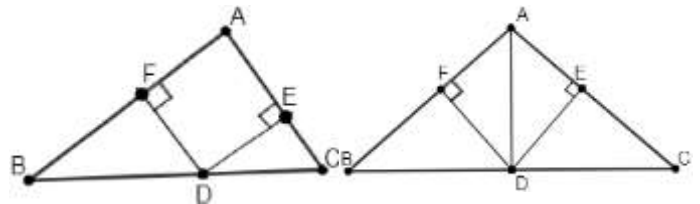


Рисунок 4.22.

За теоремою квадрата сторони трикутника, яка лежить проти гострого кута,

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AF;$$

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AE;$$

$$\frac{BD^2}{DC^2} = \frac{225 + AB^2 - 2 \cdot 12 \cdot AB}{225 + AC^2 - 2 \cdot 12 \cdot AC}$$

За теоремою про властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника одержимо:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{225 + AB^2 - 24AB}{225 + AC^2 - 24AC}$$

$$225(AB^2 - AC^2) - 24(AB - AC)AB \cdot AC = 0;$$

$$(AB - AC)[225(AB + AC) - 24 \cdot AB \cdot AC] = 0,$$

Звідки $AB = AC$; $225 \cdot 40 = 24AB \cdot AC$; $AB \cdot AC = 375$.

Маємо дві системи рівняння

$$\begin{cases} AB = AC \\ AB + AC = 40; \end{cases} (1) \quad \begin{cases} AB \cdot AC = 375; \\ AB + AC = 40 \end{cases} (2)$$

З першої знайдемо $AB = AC = 20$ см, з другої – $AB = 15$, $AC = 25$ або $AB = 25$, $AC = 15$.

Обчислимо третю сторону BC :

а) При $AB = AC$ її можна обчислити за теоремою Піфагора

$$BC = 2\sqrt{20^2 - 15^2} = 2\sqrt{175} = 10\sqrt{7} \text{ см};$$

б) при $AB \neq AC$ знайдемо окремо відрізки BD і DC ; а потім додамо їх:

$$BD = \sqrt{225 + 625 - 2 \cdot 12 \cdot 25} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10};$$

$$BD(\text{або } DC) = 5\sqrt{10}$$

$$DC = \sqrt{225 + 225 - 2 \cdot 12 \cdot 15} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10};$$

$$DC(\text{або } BD) = 3\sqrt{10};$$

$$BC = 5\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 8\sqrt{10} \text{ см}$$

Відповідь. 20; 20; $10\sqrt{7}$ см або 25; 15; $8\sqrt{10}$ см.

Задача 22. Через точку A , що лежить всередині кола, провести хорду таким чином, щоб вона цією точкою була поділена у відношенні $m:n$.

Розв'язання.

Через точку A проведемо діаметр. Позначимо його відрізки через a і b .

$EA \cdot AF = AB \cdot AC$ (за теоремою про добуток відрізків хорд, що перетинаються в одній точці всередині круга).

Отже, $AB \cdot AC = ab$.

З іншого боку - $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$; $AB = \frac{n}{m} AC$; $AC^2 = \frac{abm}{n}$,

$$AC = \sqrt{\frac{abm}{n}}.$$

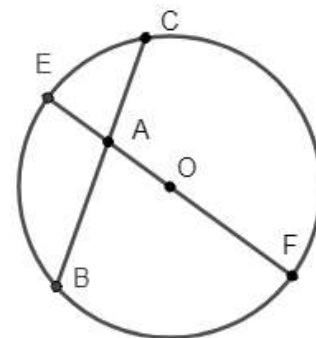


Рисунок 4.23.

Отже, потрібно побудувати відрізок AC , з якого добудувати шукану хорду.

Відповідь. Через точку A потрібно побудувати відрізок $AC = \sqrt{\frac{abm}{n}}$, з якого добудувати шукану хорду.

Задача 23. Вершини A і B гострих кутів прямокутного трикутника ABC ковзають по двох взаємно перпендикулярних прямих на площині. По якій лінії буде рухатися вершина C прямого кута?

Розв'язання.

Побудуємо на гіпотенузі AB як на діаметрі коло. Оскільки $C = P = 90$, то точки P і C лежать на одному колі. $\angle CPA = \angle CBA$, як вписані кути, що спираються на ту саму дугу. Звідси виходить, що $\triangle PDC \sim \triangle ABC$, де D – основа перпендикуляра, опущеного з точки C на PA . З цієї подібності випливає, що $\frac{CD}{PD} = \frac{b}{a}$.

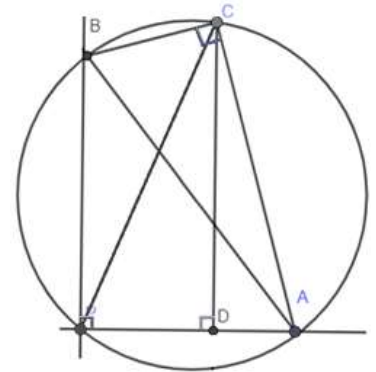


Рисунок 4.24.

Отже, якщо точки D і C лежать по різні сторони від гіпотенузи AB , то шукане геометричне місце точок є відрізком прямої $y = \frac{b}{a}x$, яка проходить через точку P .

Відповідь.

Задача 24. З точки A провести n променів так, щоб кути між двома сусідніми променями були однакові і рівні $\frac{2\pi}{n}$. На одному з променів на відстані d від точки A взяти точку V_0 , з якої опустити перпендикуляр V_0V_1 до сусіднього променя. З точки V_1 – основи перпендикуляра V_0V_1 – опустити в тому ж напрямку перпендикуляр до сусіднього променя і т.д.

Знайти довжину l отриманої таким чином ламаної, я також з'ясувати як буде змінюватися l при збільшенні числа n , зокрема, при нескінченному його збільшенні.

Розв'язання.

Відповідно до позначень отримаємо:

$$\begin{aligned}
 AB_1 &= AB_0 \cos \frac{2\pi}{n}; \text{ при } n > 4; \\
 AB_2 &= AB_1 \cos \frac{2\pi}{n} = AB_0 \cos^2 \frac{2\pi}{n}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 AB_k &= AB_{k-1} \cos \frac{2\pi}{n} = AB_0 \cos^k \frac{2\pi}{n}; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Тому відрізки ламаної

$$B_k B_{k-1} = AB_{k-1} \sin \frac{2\pi}{n} = AB_0 \cos^{k-1} \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}$$

Отже,
$$l = d \sin \frac{2\pi}{n} + d \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + d \cos^2 \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + =$$

$$d \sin \frac{2\pi}{n} (1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots).$$

У дужках маємо суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії ($|\cos \frac{2\pi}{n}| < 1$).

Отже,
$$l = \frac{d \sin \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} = \frac{2d \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} = d \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

При $n \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$, бо при $\alpha \rightarrow \infty$ функція $\operatorname{ctg} \alpha$ необмежено зростає.

Очевидно, при $n < 4$ задача розв'язків не має.

Задача 25. Кусок дерева, густина якого 0,729, має форму прямого конуса. Його опускають у воду так, щоб конус був у вертикальному положенні, занурюючи спочатку вершиною вниз, а потім вершиною вгору. Визначити на яку частину висоти конус занурюється у воду у першому і другому положеннях.

Розв'язання.

I положення

Позначимо об'єм конуса через V , а об'єм його зануреної частини – V_1 .

Відомо, що об'єми конусів відносяться як куби їх висот:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{H^3}{h^3},$$

де H – висота конуса, h_1 – висота його частини, зануреної у воду.

Оскільки тіло, занурене в рідину, зазнає тиску, який дорівнює вазі рідини в об'ємі зануреної частини тіла, то вага конуса рівна вазі води об'ємом V_1 . Об'єми тіл, рівних за вагою, обернено пропорційні до їх густини. Отже,

$$\frac{V}{V_1} = \frac{d_1}{d} = \frac{1}{0,729}$$

(d – густина дерева, d_1 – густина води). Прирівнявши $\frac{V}{V_1}$ з двох рівнянь, знайдемо:

$$\frac{H^3}{h^3} = \frac{1}{0,729},$$

$$h = \sqrt[3]{0,729}H = 0,9H.$$

II положення

Об'єм зануреної частини конуса позначимо через V_2 , а його висоту (яку треба визначити) – через h_2 : $V - V_2$ – об'єм конуса, що виступає над поверхнею води.

$$\frac{V - V_2}{V} = \frac{(H - h_2)^3}{H^3} \text{ і } \frac{V}{V_2} = \frac{1}{0,729};$$

$$\frac{V - V_2}{V} = \frac{(H - h_2)^3}{H^3} \text{ і } \frac{V - V_2}{V} = \frac{1 - 0,729}{1}.$$

Порівнюючи ці рівності, знайдемо

$$\frac{H - h_2}{H} = \sqrt[3]{0,271};$$

$$H - h_2 = 0,647H;$$

$$h_2 = 0,353H \approx 0,35H.$$

Задача 26. Основою прямої чотирикутної призми є ромб з гострим кутом α . Під яким кутом до площини основи треба провести площину, щоб у перерізі був квадрат з вершинами на бічних ребрах призми?

Розв'язання

Позначимо шуканий кут BDN через x

Тоді

$$\frac{BD}{ND} = \cos x; BD = 2OD; OD = OA \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

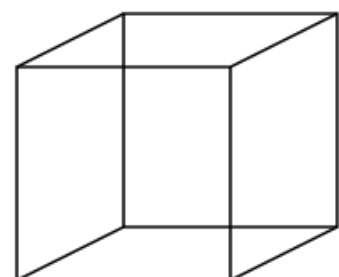


Рисунок 4.25.

Таким чином,

$$BD = 2AO \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; ND = 2AO$$

(тому що за умовою $MP = ND$).

$$\text{Отже, } \cos x = \frac{2AO \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2AO} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Звідки } x = \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Відповідь. } \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Задача 27. Яку найбільшу призму можна дістати з піраміди, якщо зробити переріз, паралельний до основи ?

Розв'язання

Позначимо через B і H площу основи і висоту піраміди $SACDE$, а через b і h площу основи і висоту призми. Многокутники $ACDE$ і $A'C'D'E'$ подібні, тому їхні площі відносяться між собою, як квадрати їх віддалей від вершини піраміди:

$$\frac{b}{B} = \frac{(H-h)^2}{H^2},$$

Звідки

$$b = \frac{B}{H^2} (H-h)^2.$$

Отже об'єм призми дорівнює

$$V = bh = \frac{Bh}{H^2} (H-h)^2.$$

Найбільший добуток $\frac{Bh}{H^2} (H-h)^2$ дістанемо, коли

$h(H-h)^2$ буде найбільшим, бо $\frac{B}{H^2}$ – стале число.

У цьому прикладі добуток $h(H-h)(H-h)$ можна записати у вигляді, $\frac{2h(H-h)(H-h)}{2}$ три величини $2h$; $H-h$; $H-h$ мають сталу суму $2h + H-h + H-h = 2H$, тому максимальне значення добутку буде при $2h = H-h$, або $h = \frac{H}{3}$.

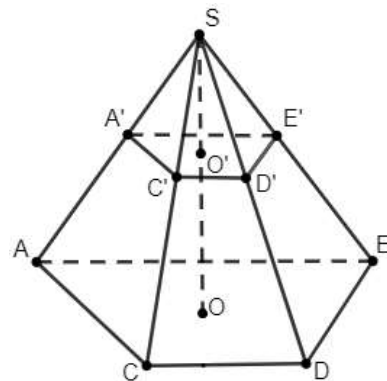


Рисунок 4.26.

Задача 28. Дах башти має форму правильної чотирикутної піраміди. Сторона основи піраміди дорівнює 1,8 м, висота -1,2 м. Скільки листового заліза потрібно для покриття даху, якщо на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі?

Розв'язання.

Потрібно знайти кількість листового заліза для покриття даху, врахувавши, що на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі. А так як дах є бічною поверхнею нашої піраміди, то потрібно знайти $S_{\text{біч}}$ і ще плюс 10% від цієї площі. Отже, ми можемо перекласти нашу задачу на математичну мову, переформулювавши так:

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди 1,8 м, висота -1,2 м. Знайти площу бічної поверхні, врахувавши що на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі.

1. $SABCD$ - правильна чотирикутна піраміда, O – точка перетину діагоналей. Проведемо $OM \perp DC$, M - середина DC , тоді $SM \perp DC$, SM – апофема (рис. 2).

$$2. \quad S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SM = 2DC \cdot SM. \quad \text{За умовою}$$

$$DC = 1,8 \text{ м, тоді } OM = \frac{1}{2} DC = 0,9 \text{ (м), } SO = 1,2 \text{ (м).}$$

$$3. \quad \text{Із } \triangle SOM, \angle SOM = 90^\circ, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2},$$

$$SM = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} = 1,5 \text{ (м).}$$

$$4. \quad S_{\text{біч}} = 2 \cdot 1,8 \cdot 1,5 = 5,49 \text{ (м).}$$

$$\text{Площа листового заліза } S = 1,1S_{\text{біч}} = 1,1 \cdot 5,4 = 5,94 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: $5,94 \text{ м}^2$.

Задача 29. Скільки квадратних метрів парусини пішло на виготовлення намету, який має форму правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 4,5 м і висотою 2,5 м? (Витрати матеріалу на шви складають 8% бічної поверхні піраміди).

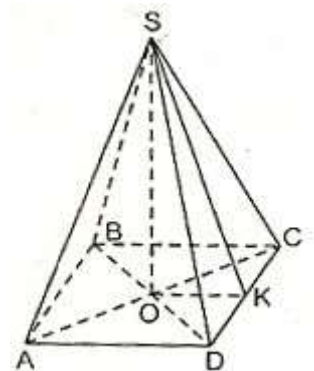


Рисунок 4.27.

Розв'язання.

Щоб знайти скільки квадратних метрів пішло на виготовлення намету, що має форму правильної чотирикутної піраміди потрібно знайти площу бічної поверхні цієї піраміди, але слід ще врахувати умову, що на шви йде ще 8% бічної поверхні піраміди. Отже, можна сформулювати задачу наступним чином: знайти площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 4,5 м і висотою 2,5 м, врахувавши, що на витрати на шви складають 8% бічної поверхні піраміди.

Задача 30. Скільки літрів води вміщує яма, яку вирили у вигляді зрізаної піраміди, якщо глибина ями 1,5 м, сторона нижньої квадратної основи 0,8 м, а верхньої 1,2 м.

Розв'язання.

Нам дано зрізану чотирикутну піраміду з висотою 1,5м і сторонами основ $a_1 = 0,8\text{ м}$, $a_2 = 1,2\text{ м}$. Потрібно знайти скільки літрів води вміщує яма, яка має вигляд зрізаної піраміди. Зрозуміло, що потрібно знайти об'єм цієї піраміди за формулою: $V = \frac{H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}{3}$, H – висота, а S_1 і S_2 – площі основ».

1. Знайдемо площі основ піраміди:

$$S_1 = a_1^2, S_1 = 0,8^2 = 0,64(\text{м}^2). S_2 = a_2^2, S_2 = 1,2^2 = 1,44(\text{м}^2).$$

$$2. H = 1,5\text{ м}, V = \frac{1,5(0,64 + \sqrt{0,64 \cdot 1,44} + 1,44)}{3} = 1,52(\text{м}^3).$$

Отже, яма вміщує 1520л води.

Відповідь. 1520л.

Задача 31. Маємо аркуш паперу у формі прямокутника, діагональ якого утворює з стороною кут α . Прямокутник згорнули в циліндричну трубку, перший раз прийнявши за твірну більшу сторону його, другий раз – меншу сторону. Знайти відношення об'ємів знайдених циліндрів.

Розв'язання.

Нехай діагональ даного прямокутника $AC = a$. Знайдемо об'єм V_1 циліндра, утвореного згортанням аркуша по стороні, що прилягає до кута α .

Тоді $V_1 = \pi R_1 H_1$, де R_1 – радіус основи; H_1 – висота утвореного циліндра.

Але $2\pi R_1 = a \cos \alpha$, отже $R_1 = \frac{a \cos \alpha}{2\pi}$;
 $H_1 = a \sin \alpha$.

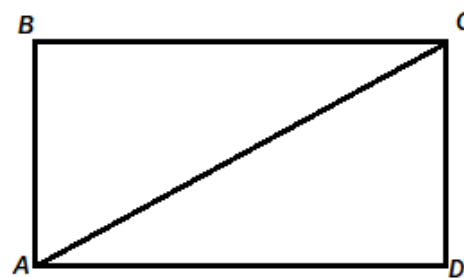


Рисунок 4.28.

Тоді

$$V_1 = \pi \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{4\pi^2} a \sin \alpha = \frac{a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4\pi}.$$

Потім знайдемо радіус основи R_2 і висоту H_2 циліндра, утвореного згортанням аркуша по стороні, що протилежна куту α :

$$2\pi R_2 = a \sin \alpha; R_2 = \frac{a \sin \alpha}{2\pi}; H_2 = a \cos \alpha.$$

$$\text{Отже, } V_2 = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{4\pi}.$$

$$\text{Таким чином, } \frac{V_1}{V_2} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задача 32. У ромбі $ABCD$ величина кута B дорівнює 40° , E – середина BC , F – основа перпендикуляра, опущеного з точки A на DE . Знайдіть величину кута DFC (рис. 4.29).

Розв'язання.

Нехай прямі DE і AB перетинаються в точці G . Тоді трикутники DEC та GEB рівні (за стороною та прилеглими до неї кутами). Тоді $BG = CB = BA$. Тому точки A, G і C лежать на колі з центром у точці B , причому AG – діаметр.

Оскільки $\angle AFG = 90^\circ$, точка F лежить на тому ж колі.

Маємо:

$$\angle GFC = \frac{1}{2} \angle GCB = \frac{1}{2} (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ.$$

$$\text{Тоді } \angle DFC = 180^\circ - \angle GFC = 110^\circ.$$

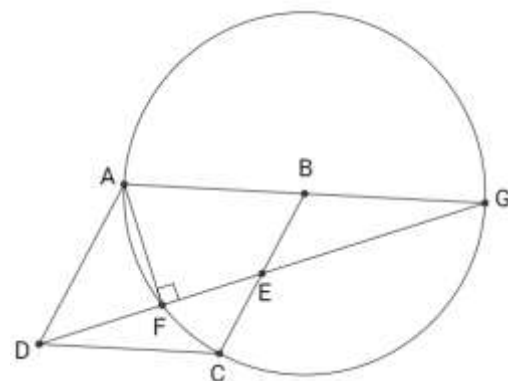


Рисунок 4.29.

Відповідь: 110° .

Задача 33. У трикутнику ABC точка M - середина сторони BC . На стороні AB відмітили точку N так, що $NB = 2AN$. Виявилось, що $\angle CAB = \angle CMN$. Чому дорівнює відношення $\frac{AC}{BC}$?

Розв'язання.

Відкладемо на промені CA точку D таким чином, щоб $CA = AD$.

Тоді для $\triangle VBCD$ відрізки DM та BA є медіанами, тому в точці перетину T вони діляться у відношенні $2:1$, якщо рахувати від вершини.

Звідси випливає, що точки T та N збігаються.

Тоді тому чотирикутник $BMAD$ - вписаний.

Оскільки $AM \parallel BD$, як середня лінія трикутника, то $\angle CDB = \angle CAM = \angle CBD$, звідки випливає, що $CD = CB$, тому

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DC}{DC} = \frac{1}{2}.$$

Неважко переконатись, що умова задачі справджується для будь-якого трикутника з таким відношенням сторін.

Відповідь: $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$

Задача 34. Відрізок AB – діаметр кола. Точки M та C належать цьому колу і розташовані у різних півплощинах відносно прямої AB . З точки M проведені перпендикуляри MN і MK на прямі AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма KN перетинає відрізок CM у його середині.

Розв'язання.

Проведемо відрізки BC, AM . Тоді навколо

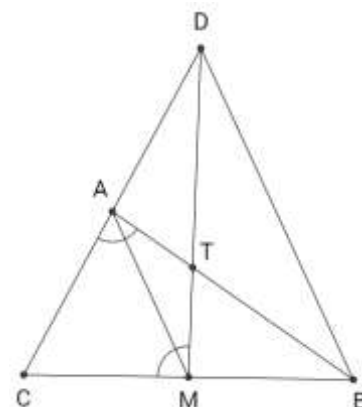


Рисунок 4.30.

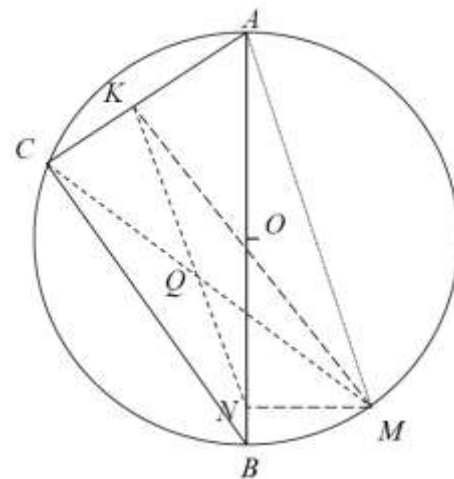


Рисунок 4.31.

чотирикутника $AKNM$ можна описати коло (рис. 4.31). Тому $\angle NAM = \angle NKM = \angle BCM$.

Оскільки $BC \perp AC$, то $MK \parallel BC$. Тому $\angle CMK = \angle BCM$. Звідси $\angle CMK = \angle NKM$. Отже $\triangle KMQ$ – рівнобедрений $KQ = QM$, тобто у прямокутному $\triangle CKM$: $KQ = QC = QM$, що й треба було довести.

Задача 35. За даними сторонами a, b, c і d побудувати чотирикутник, навколо якого можна описати коло.

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ – шуканий чотирикутник, навколо якого можна описати коло (рис. 4.32). Позначимо $AB = a$, $BC = b$, $DC = c$, $AD = d$, $BD = x$. З трикутника BAD за теоремою косинусів випливає

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A. \quad (1)$$

Аналогічно з $\triangle DCB$ маємо

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \quad (2)$$

Оскільки $\cos \tilde{N} = -\cos A$, то $x^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

(3)

Виключивши $\cos A$ з рівнянь (1) і (3) дістанемо

$$x^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Звідси

$$x = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)}}{\sqrt{ad + bc}} = \frac{\sqrt{ac + bd} \cdot \sqrt{ab + cd}}{\sqrt{ad + bc}}. \quad (4)$$

Розкладемо рівняння (4) на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

- 1) $m = \sqrt{ac}$; 2) $n = \sqrt{bd}$; 3) $p = \sqrt{ab}$; 4) $q = \sqrt{cd}$;
- 5) $r = \sqrt{ad}$; 6) $l = \sqrt{bc}$; 7) $y = \sqrt{ac + bd} = \sqrt{m^2 + n^2}$;
- 8) $z = \sqrt{ab + cd} = \sqrt{p^2 + q^2}$; 9) $w = \sqrt{ad + bc} = \sqrt{r^2 + l^2}$; 10) $x = \frac{yz}{w}$.

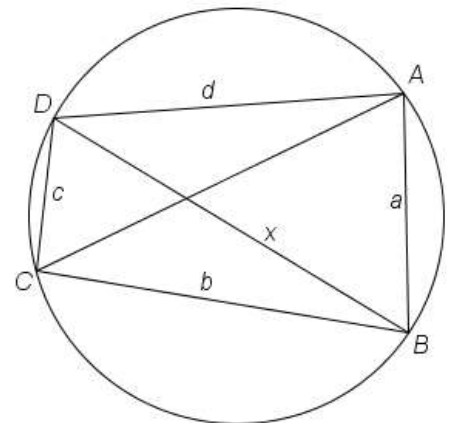


Рисунок 4.32.

Побудувавши діагональ x , будемо спочатку трикутник BAD за трьома сторонами (a , d та x), а далі трикутник DCB . Чотирикутник $ABCD$ – шуканий.

Задача 36. Побудувати трикутник ABC за a , A , l_a .

Розв'язання.

Опишемо на стороні BC дугу сегмента, що вміщує кут A (ГМТ – множина точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом), і доповнимо її до кола (рис. 4.33). Продовжимо бісектрису AL_1 до перетину з цим колом у точці W . Відрізок WM_1 – заданий (M_1 – середина відрізка BC). Позначимо $WM_1 = t$. Проведемо діаметр WD . Прямокутні трикутники WM_1L_1 і WAD – подібні. Нехай $WL_1 = x$, $WD = d$, тоді $\frac{WL_1}{WD} = \frac{WM_1}{WA}$, або $\frac{x}{d} = \frac{t}{l_a + x}$. Знайдемо x :

$$xl_a + x^2 = dt; \quad x^2 + xl_a = dt; \quad x^2 + xl_a - dt = 0; \quad x = \frac{l_a}{2} \pm \sqrt{\frac{l_a^2}{4} + dt}.$$

Розкладемо останню формулу на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

$$1) m = \frac{l_a}{2}; \quad 2) p = \sqrt{dt}; \quad 3) q = \sqrt{m^2 + p^2}; \quad 4)$$

$$x = m \pm \sqrt{m^2 + p^2}.$$

Побудувавши відрізок x , з точки W проведемо дугу радіуса $l_a + x$, дістанемо точку A . Трикутник ABC – шуканий.

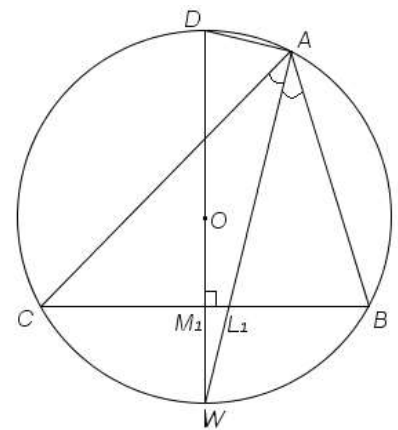


Рисунок 4.33.

Задача 37. Побудувати трапецію за її бічними сторонами і діагоналями.

Розв'язання.

У трапеції $ABCD$ введемо позначення: $AD = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = d$, $DO = x$, $CO = y$ (рис. 3), $\angle COB = \varphi$. З трикутників AOD і COB за теоремою косинусів маємо

$$a^2 = x^2 + (c - y)^2 - 2x(c - y)\cos \varphi;$$

$$b^2 = y^2 + (d-x)^2 - 2y(d-x)\cos\varphi,$$

звідки $\frac{x^2 - a^2 + (c-y)^2}{2x(c-y)} = \frac{y^2 - b^2 + (d-x)^2}{2y(d-x)}$. Очевидно, що $y = \frac{c}{d}x$. Тому

$$x = \frac{d}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2(c^2 - d^2)} \quad (1) \quad \text{і} \quad y = \frac{c}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2(c^2 - d^2)}c \quad (2).$$

Розкладемо рівняння (1) і (2) на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

- 1) $m = \frac{d}{2}$; 2) $l = a - b$; 3) $n = a + b$; 4) $r = c - d$; 5) $q = c + d$; 6) $z = 2rq$;
7) $w = \frac{c}{2}$; 8) $p = l \cdot n$; 9) $s = \frac{p}{z}$; 10) $t = \frac{p}{z} \cdot c$; 11) $x = m - s$; 12) $y = w - t$.

Виконавши 12 елементарних побудов та знайшовши x та y , будемо $\square ADO$ або $\square BCO$ за трьома сторонами, а далі виконуємо деякі побудови і отримуємо трапецію. Трапеція $ADCB$ – шукана.

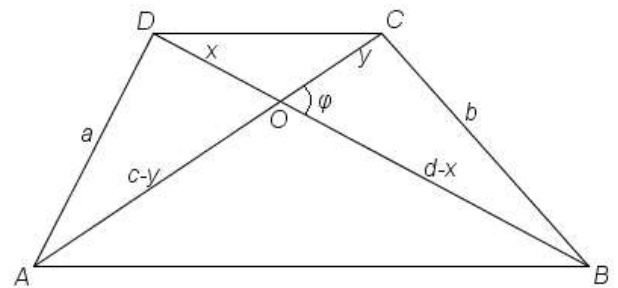


Рисунок 4.34.

Задача 38. Доведіть, що правильний трикутник не можна покрити двома меншими правильними трикутниками.

Розв'язання.

На рисунку зображено рівносторонній трикутник $\square ABC$, який майже покривають два менших рівносторонніх трикутників $\square AFE$ і $\square HIB$.

Кожен менший трикутник може накрити тільки одну вершину трикутника ABC , оскільки $\square AFE$ має менші сторони і при накладанні його на

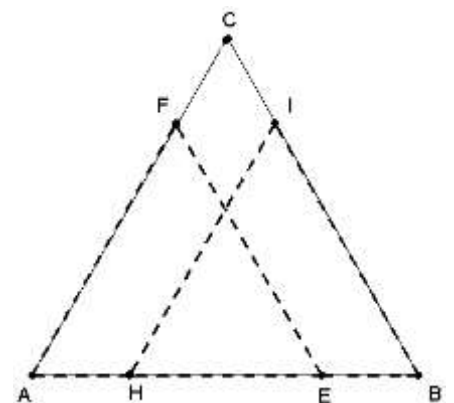


Рисунок 4.35.

$\square ABC$ у ньому буде накритаю лише одна із вершин: A або B або C . Отже, ми маємо два трикутників і три вершини. Припустимо протилежне умові задачі, тобто, що трикутник ABC можна накрити трикутниками AFE і

НІВ. Тоді відповідно до принципу Діріхле один трикутник має накривати дві вершини, що за попередніми міркуваннями неможливо. Отже наше припущення невірне. Тобто, двома меншими трикутниками не можна одночасно накрити три вершини великого трикутника, а тому і не можна покрити весь трикутник.

Задача 39. У квадраті $ABCD$ знаходяться 5 точок. Доведіть що відстань між будь-якими двома з них не перевищує $\frac{AC}{2}$.

Розв'язання.

На рисунку зображено квадрат $ABCD$ і п'ять точок в ньому: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 . Проведемо через середини сторін квадрата прямі паралельні його сторонам. Отримані прямі розбивають квадрат на чотири менших квадрата. Згідно принципу Діріхле в одному з квадратів буде дві точки (кролики – точки, а клітки квадратики). Оскільки прямі проведені через середини сторін, то відстань між двома точками, які розміщуються в одному квадратику, не перевищує довжини його діагоналі $\frac{AC}{2}$.

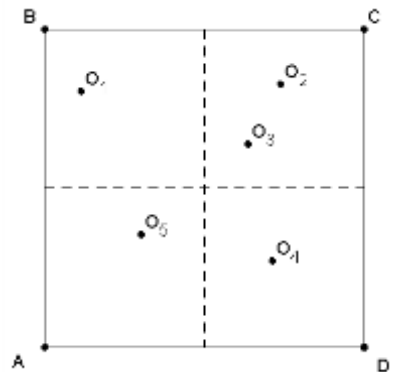


Рисунок 4.36.

Задача 40. У середині рівностороннього трикутника зі стороною 1 лежать 5 точок. Довести, що знайдуться дві точки з п'яти, відстань між якими менше 0,5.

Розв'язання.

Ділимо рівносторонній трикутник зі стороною 1 на чотири рівносторонніх трикутника зі стороною 0,5.

На рисунку зображено рівносторонній трикутник $\triangle ABC$, який розбито на менші рівносторонні трикутники. За принципом Діріхле в

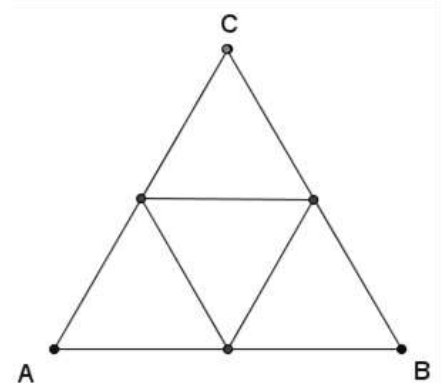


Рисунок 4.37.

одному з цих чотирьох трикутників лежать принаймні дві з даних точок. Відстань між цими двома точками менше 0,5.

Задача 41. Маємо правильний нескоротний дріб. Чому не можна скоротити дріб, який доповнює його до одиниці?

Розв'язання

Припустимо, що чисельник дроби, який доповнює перший дріб до одиниці, має спільний із знаменником множник, відмінний від 1.

Тоді різниця між знаменником і іншим чисельником повинна мати також цей спільний множник з знаменником, а це не відповідає умові, бо ця різниця дорівнює першому чисельнику.

Задача 42. Довести, що не існує такого цілого числа, яке збільшується у 5 разів, переставивши початкову цифру в кінець.

Розв'язання.

Оскільки при збільшенні такого числа в 5 разів кількість його цифр не змінюється, то шукане число повинно починатися з цифри 1. Перемістивши цю цифру в кінець, знайдемо число, яке закінчується цифрою 1. Але таке число не ділиться на 5.

Отже, такого числа не існує.

Задача 43. Довести, що двочлен $3x^4 + 1$ є сумою трьох квадратів.

Розв'язання

Додамо і віднімемо $(2x^3 + 2x^2)$.

$3x^4 + (2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 2x^2) + 1 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) = (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2$, що й треба було довести.

Задача 44. При яких значеннях k розв'язання системи $\begin{cases} kx - 2y = 3; \\ 3x + ky = 4 \end{cases}$ задовольняють умову $x > 0, y < 0$.

Розв'язання.

Розв'яжемо дану систему відносно x і y , знайдемо:

$$x = \frac{3k+8}{k^2+6}; y = \frac{4k-9}{k^2+6}$$

Вираз $k^2 + 6 > 0$ при будь-яких дійсних значеннях k . Отже, x буде додатним, якщо $3k + 8 > 0$, а y буде від'ємним, коли $4k - 9 < 0$.

Таким чином, значення k повинні задовольняти такі умови:

$$k > -\frac{8}{3};$$

$$k < \frac{9}{4}.$$

Тобто, $-\frac{8}{3} < k < \frac{9}{4}$.

Отже, $k = -2; -1; 0; 1; 2$.

Відповідь. $-2; -1; 0; 1; 2$.

Задача 45. Дано квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x_1 і x_2 – корені рівняння. Скласти таке квадратне рівняння, щоб його корені: а) були протилежні до коренів даного рівняння; б) були оберненими до коренів даного рівняння; в) були сумою певного числа n і коренів даного рівняння; г) дорівнювали добутку величини n та коренів даного рівняння.

Розв'язання.

Якщо корені рівняння - x_1 і x_2 , то за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Нехай шукане рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$.

Отже, потрібно визначити коефіцієнти p і q для кожного випадку.

а) Якщо коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ є $(-x_1)$ і $(-x_2)$, то

$$p = -(-(x_1 + x_2)) = -\frac{b}{a},$$

$$q = (-x_1) \cdot (-x_2) = \frac{c}{a}.$$

Отже, шукане рівняння - $x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ або

$$ax^2 - bx + c = 0$$

Відповідь. $ax^2 - bx + c = 0$

б) Якщо коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ є $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$, то:

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{-(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c};$$

$$q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c}$$

Отже, шукане рівняння - $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$ або

$$cx^2 + bx + a = 0$$

Відповідь. $cx^2 + bx + a = 0$.

в) Якщо коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ є $(x_1 + n)$ і $(x_2 + n)$, то:

$$p = -(x_1 + x_2 + 2n) = -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n,$$

$$q = (x_1 + n) \cdot (x_2 + n) = x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2)n + n^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2.$$

Отже, шукане рівняння –

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0 \text{ або}$$

$$ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0$$

Відповідь. $ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0$

г) Якщо коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$ є x_1n і x_2n , то

$$p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a},$$

$$q = n^2x_1 \cdot x_2 = \frac{n^2c}{a}.$$

Отже, шукане рівняння - $x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2c}{a} = 0$ або

$$ax^2 + nbx + n^2c = 0$$

Відповідь. $ax^2 + nbx + n^2c = 0$

Задача 46. Довести, що якщо a , b , c – сторони трикутника, то корені рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ уявні (рівняння коренів не має).

Розв'язання.

Оскільки a, b, c – сторони трикутника, то $a > 0, b > 0, c > 0$. Квадратне рівняння має уявні корені (коренів не має), якщо дискримінант – від’ємне число.

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) \\ &= ((b + c)^2 - a^2)((b - c)^2 - a^2) \\ &= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a). \end{aligned}$$

Оскільки сума двох сторін трикутника більша третьої сторони, то $(b + c + a) > 0, (b + c - a) > 0, (b - c + a) > 0$, а $(b - c - a) < 0$.

Отже, дискримінант – від’ємне число і рівняння має уявні корені (коренів не має).

Задача 47. Є прямокутник (не квадрат), виміри якого виражені цілими числом сантиметрів. Марійка обчислює його площу в см^2 , а Михайлик обчислює його периметр в см. Обидва учні отримали один і той же числовий результат. Вкажіть довжину прямокутника. (Більший з вимірів прямокутника вважатимемо довжиною.)

Розв’язання.

Нехай x і y – сторони прямокутника. За умовою задачі $x \cdot y = 2x + 2y$.

$$x \cdot y - 2x = 2y$$

$$x \cdot (y - 2) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y - 2}$$

x і y – цілі числа, $y > 2$.

Візьмемо $y=3$, тоді $x = 6$.

Відповідь. 3, 6.

Задача 48. Чи можуть числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

Розв’язання.

Нехай $a_k = \sqrt{2}$; $a_m = \sqrt{3}$; $a_p = \sqrt{5}$.

Тоді $a_1 + (k - 1)d = \sqrt{2}$; $a_1 + (m - 1)d = \sqrt{3}$; $a_1 + (p - 1)d = \sqrt{5}$.

Утворимо різниці $a_m - a_k$; $a_p - a_m$;

$$a_1 + (m - 1)d - a_1 + (k - 1)d = (m - k)d = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

$$a_1 + (p - 1)d - a_1 + (m - 1)d = (p - m)d = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

Поділимо друге рівняння на перше

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{p - m}{m - k}$$

Така рівність неможлива, бо зліва стоїть ірраціональне число, а справа раціональне. Отже, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії.

Задача 49. Скільки прямих можна провести між десятьма точками, розташованими так, що ніякі три точки не знаходяться на одній прямій?

Розв'язання.

Кожна пряма визначається двома точками, дві різні прямі визначаються двома парами точок, причому кожна пара відрізняється від другої, принаймні, однією точкою. Тому прямих можна провести стільки, скільки буде різних пар точок, а саме: C_{10}^2 .

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

Відповідь. 45 прямих.

Задача 50. Скільки прямих можна провести між дванадцятьма точками, з яких дванадцять розташовані таким чином, що між ними немає трьох точок, які знаходились би на одній прямій, а всі інші розміщені на одній прямій?

Розв'язання.

$$C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} 66 \text{ (66 прямих через 12 точок)}$$

Вісім точок лежать на одній прямій, тоді прямих буде $66 + 1 = 67$.

Кожну з 12 точок з'єднаємо з кожною з восьми точок; одержимо прямих: $12 \cdot 8 = 96$.

Отже, $67 + 96 = 163$ прямих.

Відповідь. 163 прямих.

Задача 51. Знайти суму $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$, де числа

a_1, a_2, \dots, a_n складають арифметичну прогресію.

Розв'язання.

Нехай d – різниця арифметичної прогресії. Тоді для довільного простого натурального k маємо:

$$\frac{1}{a_{k-1} a_k} = \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \cdot \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right),$$

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n - a_1}{d a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Задача 52. Нехай S_m – сума m перших членів арифметичної прогресії.

Довести, що $S_{3m} = 3 \cdot (S_{2m} - S_m)$.

Доведення.

Позначимо через a_1 перший член арифметичної прогресії, а через d – її різницю. Тоді $S_m = \frac{2a_1 + d(m-1)}{2} \cdot m$, $S_{2m} = \frac{2a_1 + d(2m-1)}{2} \cdot 2m$,

$$S_{3m} = \frac{2a_1 + d(3m-1)}{2} \cdot 3m. \text{ З цього маємо, що } 3(S_{2m} - S_m) = S_{3m}.$$

Задача 53. Відомо, що з арифметичної прогресії $a + d, a + 2d, \dots, a + nd \dots$ ($d \neq 0$) можна виділити послідовність, яка виявиться геометричною прогресією. Довести, що $\frac{a}{d}$ – число раціональне.

Доведення.

Нехай три члени даної послідовності: $a + kd, a + ld, a + md$, де $k < l < m$ – натуральні числа, які складають геометричну прогресію. За властивостями цієї прогресії $(a + ld)^2 = (a + kd)(a + md)$. Позначивши $x = \frac{a}{d}$ і розділивши цю нерівність на d^2 , отримаємо $(x + l)^2 = (x + k)(x + m)$, або $(2l - k - m)x = km - l^2$. З цього випливає, що $2l - k - m \neq 0$, (оскільки коли

$2l - k - m = 0 = km - l^2$, тоді $(k + m)^2 = 4l^2 = 4km, \Rightarrow k = m$, а це неможливо).

Отже, $x = \frac{(km - l^2)}{(2l - k - m)}$, де k, l, m – натуральні числа. Таким чином $x = \frac{a}{d}$ це

раціональне число.

Задача 54. Сума всіх членів арифметичної прогресії a_1, a_2, \dots, a_k , $k \geq 92$ дорівнює 1992. Яких значень може набувати сума $a_{19} + a_{92}$ залежно від числа k ?

Розв'язання.

Позначимо різницю арифметичної прогресії через d , а суму $a_{19} + a_{92}$ через b . Скориставшись відомими формулами суми n перших членів арифметичної прогресії та загального члена, отримаємо

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k = \frac{a_1 + a_1 + (k-1)d}{2} k = 1992, \quad a_1 + 18d + a_1 + 91d = b.$$

Тепер переформулюємо задачу таким чином: для яких значень b

$$\text{система } \begin{cases} \frac{2a_1 + (k-1)d}{2} k = 1992, \\ 2a_1 + 109d = b \end{cases}$$

Відносно невідомих a_1 і d має розв'язок? Отриману систему запишемо так:

$$\begin{cases} 2a_1 + (k-1)d = \frac{2 \cdot 1992}{k}, \\ (110 - k)d = b - \frac{2 \cdot 1992}{k}. \end{cases}$$

Очевидно, що у випадку $k \neq 110$ остання система має розв'язок для будь-яких значень b . Якщо $k = 110$, то розв'язок існує за умови

$$\left(b - \frac{2 \cdot 1992}{110} \right) = 0, \text{ тобто лише для } b = \frac{1992}{55}.$$

Задача 55. Дано зростаючу послідовність натуральних чисел s_1, s_2, s_3, \dots . К таку, що кожна з двох послідовностей s_{s_1}, s_{s_2}, \dots і $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$ є

арифметичною прогресією. Доведіть, що послідовність s_{s_1}, s_{s_2}, \dots теж є арифметичною прогресією.

Доведення.

Позначимо через D різницю прогресії s_{s_1}, s_{s_2}, \dots також визначимо послідовність $d_n = s_{n+1} - s_n$. Потрібно показати, що послідовність (d_n) є стаціонарною, тобто уся складається з однакових натуральних чисел. Покажемо, що (d_n) обмежена. Очевидно, що $d_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Для обмеженості зверху для довільного натурального n маємо такі нерівності: $d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D$. З обмеженості послідовності визначимо $m = \min_n d_n, M = \max_n d_n$. Потрібно показати, що вони рівні. Припустимо, що $m < M$, і виберемо такий індекс n , що $m = d_n$, тоді $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+m-1} \leq mM$, (1) при цьому рівність настає, тоді і тільки тоді, коли усі доданки суми рівні M . Якщо тепер вибрати n таким, що $M = d_n$, то одержимо аналогічно, що $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+M} - s_{s_n} \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+M-1} \geq mM$, (2) у цьому випадку рівність можлива лише за умови, що усі доданки рівні m . Таким чином остаточно маємо, що $D = mM$ і при цьому виконуються умови: якщо $m = d_n$, то $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_n+M-1} = M$, якщо ж $M = d_n$, то $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_n+M-1} = m$. З умови $d_n = m \Rightarrow d_{s_n} = M$. Оскільки $s_n \geq s_1 + (n-1) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, більше того, $s_n > n$, якщо $d_n = n$, бо інакше $m = d_n = d_{s_n} = M$, що суперечить припущенню. Аналогічно, з умови $d_n = M$ випливає $d_{s_n} = m, s_n > n$. Таким чином ми маємо зростаючу послідовність n_1, n_2, \dots таку, що $d_{s_{n_1}} = M, d_{s_{n_2}} = m, \dots$. Оскільки послідовність d_{s_1}, d_{s_2}, \dots це послідовність попарно різних s_{s_1+1}, \dots та s_{s_1}, \dots , тобто вона також є арифметичною прогресією, тому $M = m$.

Задача 56. Знайти на множині дійсних чисел функцію $f(x)$, яка задовольняє співвідношення

$$2f(x) + f(1-x) = x^2$$

Розв'язання.

Зафіксуємо змінну x , тоді функціональне рівняння стане лінійним рівнянням з двома невідомими.

Введемо заміну $t = 1 - x$, тоді $2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2$

Отримаємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-t) = t^2 \\ 2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2 \end{cases}$$

Знаходимо функцію: $f(x) = \frac{1}{3}(t^2 + 2t - 1)$

Отже, виконавши перевірку, робимо висновок, що функція $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$ є розв'язком даного функціонально рівняння.

Відповідь. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$

Задача 57. Знайти функцію, яка задовольняє співвідношення

$$f(x) + f(x+5) = 10x + 11$$

Розв'язання.

Розпочнемо конструювати розв'язок у вигляді лінійної функції $f(x) = ax + b$, де $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Підставимо в аргумент шуканої функції $x + 5$

$$f(x+5) = a(x+5) + b = ax + 5a + b$$

Додамо праві частини отриманих рівностей, щоб отримати ліву частину початкового рівняння:

$$ax + b + ax + 5a + b = 10x + 11,$$

$$2ax + 5a + 2b = 10x + 11.$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x та вільні члени, отримаємо два рівняння

$$2a = 10 \text{ та } 5a + 2b = 11.$$

З першого та другого рівняння знайдемо значення коефіцієнту $a = 5$, підставивши його у друге рівняння отримаємо $b = -7$. Легко переконатися, що отримана $f(x) = 5x - 7$ задовольняє дане рівняння.

Отже, один з усіх можливих розв'язків даного функціонального рівняння буде функція $f(x) = 5x - 7$.

Відповідь. $f(x) = 5x - 7$.

Задача 58. Знайдіть усі трійки (a, b, c) ($a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$) дійсних чисел, для яких параболи $y = ax^2 + bx + c$ і $y = bx^2 + cx + a$ мають спільну вершину.

Розв'язання.

Обидві параболи проходять через точку $N(1; a + b + c)$. Нехай точка $A(x_0; y_0)$ – спільна вершина парабол, тоді заміна $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ зсуває вершини парабол в точку O' – початок координат, тобто ми отримуємо параболи $y' = ax'^2$ і $y' = bx'^2$, які проходять через спільну точку $N(1 - x_0; a + b + c - y_0)$. Якщо виконується умова $a \neq b$ ці параболи мають одну спільну точку O' , тобто $N' = O'$. Це означає, що точка N є вершиною початкових парабол.

Звідси $-\frac{b}{2a} = -\frac{c}{2b} = 1$ і $c - \frac{b^2}{4a} = a - \frac{c^2}{4b}$, тобто $b = -2a, c = 4a, c = 4a$.

Відповідь. $a = d, b = -2d, c = 4d, d \neq 0$

Задача 59. Графік функції $y = f(x)$ симетричний графіку функції $y = x^2$ відносно точки з координатами $(1; 1)$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = x^2$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння графіка функції $y = f(x)$. Нехай точка $P(p; p^2)$ – довільна точка параболи $y = x^2$, а $Q(q; f(q))$ – точка графіка $y = f(x)$, яка

симетрична точці P відносно точки з координатами $(1;1)$. Тоді за формулами для знаходження координат середин відрізка, матимемо:

$$\frac{p+q}{2}=1, \quad \frac{p^2+f(q)}{2}=1. \text{ Виключаючи з цієї системи рівностей } p,$$

знаходимо, що $f(q) = -q^2 + 4q - 2$. Отже, рівняння симетричного графіка буде мати вигляд: $y = -x^2 + 4x - 2$. Далі, нам потрібно розв'язати рівняння

$$x^2 = f(x), \text{ яке еквівалентне таким рівнянням: } x^2 = -x^2 + 4x - 2,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x = 1.$$

Відповідь. 1

Задача 60. Довести, що з будь-яких десяти двозначних чисел можна вибрати дві різні групи чисел так, щоб суми чисел в обох групах були однаковими.

Розв'язання.

Підрахуємо спочатку число різних груп, які можна утворити з десяти чисел. Оскільки кожне число може або належати, або не належати до однієї групи, то, згідно з основним принципом комбінаторики, число всіх можливих груп, які утворюються з 10 чисел, дорівнює 2^{10} . При цьому враховуємо й групу, яка не містить жодного числа. Сума чисел у кожній з цих груп менша, ніж $99 \cdot 10 = 990$, тобто різних сум не більше як 990. Відповідно до принципу Діріхле, є дві групи, суми чисел в яких однакові.

Задача 61. У школі навчається 962 учні. Довести, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали.

Розв'язання.

Зауважимо, що з двох букв можна утворити $2 \cdot 2 = 4$ різних пар ініціалів. (Якщо це, наприклад, букви А і Б, то матимемо: А.А., А.Б., Б.А., Б.Б.). В українському алфавіті 31 буква, що може входити до складу ініціалів. Тому всього можна утворити $31 \cdot 31 = 961$ різних пар ініціалів. Візьмемо 961 ящик і кожному з них нанесемо пару ініціалів. Напишемо для кожного учня його ініціали на картці і кожна картку покладемо у той ящик, на якому

написано таку саму пару ініціалів. Оскільки розкладаємо 962 картки в 961 ящик, то, відповідно до принципу Діріхле, принаймні в одному ящику буде не менше від однієї картки

Задача 62. Дано 12 цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати 2, різниця яких кратна 11.

Доведення.

Звернемо увагу учнів на те, що як тільки мова заходить про кратність, слід проаналізувати питання про остачі від ділення в даному випадку на 11. Таких остач може бути 11: 0, 1, 2, 3, ..., 10.

В якому ж випадку різниця кратна 11? Коли остача $r=0$. А це можливо лише тоді, коли зменшуване і від'ємник при діленні на 11 мають однакову остачу. Тобто задача звелася до того, щоб довести, що у двох із 12 цілих чисел є однакова остача при діленні на 11. За принципом Діріхле (для учнів це вже стає очевидним) дійсно, з 12 цілих чисел знайдеться хоча б 2 таких, що остачі r за модулем 11 будуть рівні. Тоді різниця цих чисел при діленні на 11 дасть остачу 0 за модулем 11, що і означає кратність 11.

Задача 63. Дано 12 цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на 11.

Розв'язання.

Прийmemo за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 11. Їх є усього 11. За «кроликів» прийmemo остачі від ділення даних чисел на 11. Їх є усього 12. Розміщуючи «кроликів» у «клітки» аналогічно до попередніх задач, за принципом Діріхле отримаємо, що знайдуться два «кролики» в одній із «кліток». А це означає, що знайдеться два числа, які дають однакові остачі від ділення на 11. Зрозуміло, що різниця цих чисел буде ділитися на 11.

Задача 64. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро.

Розв'язання.

Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Прийmemo за «клітки» кольори, а за «кроликів» — грані, що перетинаються в цій вершині. Їх є усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій міститься два «кролики». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

Задача 65. На шаховій дошці розміром 8×8 клітинок розставлено 31 фішку. Довести, що знайдеться вільна від фішок фігура, яка складається з трьох клітинок, зображена на малюнку.

Розв'язання.

Для того щоб не було вільної від фішок фігури, складеної з трьох клітинок, у будь-якому квадраті розміром 2×2 має розміститися не менше двох фішок. Оскільки можна покрити всю дошку 16-ма квадратами розміром 2×2 , що не перекриваються, то всього фігур має бути не менше від 32, а у нас є 31. Отже, за сформульованим принципом знайдеться квадрат розміром 2×2 , в якому є лише одна фігура. У ньому і міститься вільна від фішок фігура, що складається з трьох клітинок.

Задача 66. Гра починається з числа 7. За один хід дозволяється додати до наявного числа довільне, менше від нього натуральне число. Грають двоє, роблячи ходи позачергово. Виграє той, хто дістане число 1997. У котрого з гравців є виграшна стратегія.

Розв'язання.

Проаналізуємо задачу з кінця. 1997 – виграшна позиція. Із позицій 999-1996 її можна досягнути за один хід. Тому всі ці позиції програшні. Із позиції 998 всі ходи ведуть у програшну позицію, тому 998 – виграшна позиція. Аналогічно встановлюємо: позиції 500-997 – програшні, 499 – виграшна, 250-498 – програшні, 249 – виграшна, 125-248 – програшні, 124 – виграшна, 63-123 – програшні, 62 – виграшна, 32-61 – програшні, 31 – виграшна, 16-30 – програшні, 15 – виграшна, 8-14 – програшні, і, нарешті, 7 – виграшна

позиція. Отже, перемогу здобуде другий гравець, якщо своїми ходами послідовно займатиме такі виграшні позиції: 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1997.

Задача 67. У квадраті зі стороною 1 позначили 101 точку, причому будь-які три з них не лежать на одні прямі. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в цих точках площа якого не більша $\frac{1}{100}$.

Розв'язання.

Розіб'ємо квадрат на 50 рівних прямокутників, провівши 5 горизонтальних ліній і 10 вертикальних. За принципом Діріхле знайдеться прямокутник у який попаде щонайменше три точки, які утворять трикутник, тому що за умовою сказано, що будь-які три точки не лежать на одній прямій. Розглянемо варіант найбільшого трикутника, його площа буде дорівнювати половині площі прямокутника, тобто $\frac{1}{100}$, що задовольняє вимогу задачі. В інших випадках площа трикутника буде меншою $\frac{1}{100}$.

Задача 68. Не бачивши написаних на гранях куба чисел від 1 до 6, Ігор стверджує, що у цього куба є як мінімум дві пари сусідніх граней на яких написані сусідні числа. Чи правий Ігор?

Розв'язання.

Серед чисел 1 – 6 є п'ять пар сусідніх (1;2), (2;3), (3;4), (4;5), (5;6). Числа кожної пари можуть бути написані по одному, або на двох сусідніх гранях куба, або на двох протилежних гранях. У куба є три пари протилежних граней, матимемо: клітки - це пари граней куба, їх 3, а кролики – пари чисел, їх 5. Відповідно до принципу Діріхле принаймні у двох клітках сидить по два кролика, тобто мінімум дві пари чисел займуть дві сусідні пари граней куба. Що і підтверджує правоту Ігоря.

Задача 69. Знайдіть найменше значення виразу:

$$\sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+9}$$

Розв'язання.

Даний приклад можна розв'язувати за допомогою похідної, але найбільш простим є наступне розв'язання. Достатньо поглянути на рисунки:

Нехай $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $d_2 = \sqrt{(x-3)^2 + 9}$,
 $d_3 = \sqrt{(x-9)^2 + 4}$, точка $O(0;0)$ – початок
 координат (рис. 4.38). Початковий виразом є
 сума відстаней між трьома точками $A(x; y)$,
 $B(x+3; 3)$, $C(12; 5)$. Дійсно:

$$|OA| = \sqrt{(X-0)^2 + (Y-0)^2} = d_1;$$

$$|AB| = \sqrt{(x+3-x)^2 + (3-y)^2} = d_2;$$

$$|OA| = \sqrt{(2-(x-3))^2 + (5-3)^2} = d_3.$$

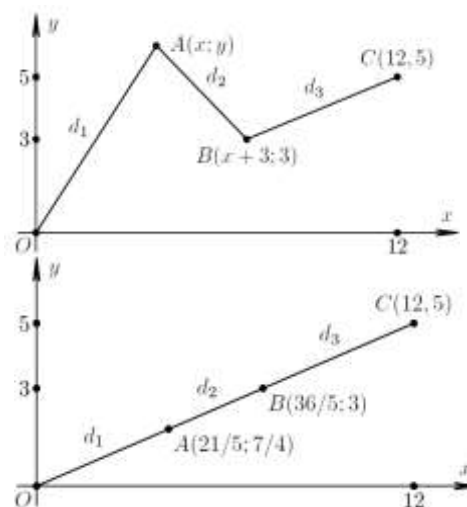


Рисунок 4.38.

Отже, найменше значення суми відстаней d_1, d_2, d_3 досягатиметься, якщо точки A і B опиняться на одному відрізку, що сполучає точки O і C (рис. 3).

Перевіримо, чи таке розташування точок можливе. Рівняння прямої, що проходить через точки O і C має вигляд: $\frac{x}{12} = \frac{y}{5}$, але, оскільки дана пряма повинна проходити через точку $B(x+3; 3)$, приходимо до системи:

$$\begin{cases} \frac{x}{12} = \frac{y}{5}; \\ \frac{x+3}{12} = \frac{3}{5}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{4}; \\ x = \frac{21}{5}. \end{cases}$$

Таким чином, доведено, що розташування, коли всі точки знаходяться на одній прямій, можливе. Отже, найменше значення виразу $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Відповідь: 13.

Задача 70. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме — істинним чи хибним.

(а) Число 357 кратно 7.

(б) Для будь-яких дійсних чисел x і y виконується нерівність $x^2 + y^2 \geq 0$.

- (в) Чи існує ціле число, більше за 2 і менше від $\log_2 9$?
- (г) $7 < 7$.
- (д) $7 \leq 7$.
- (е) $2 \times 2 = 4$.
- (є) Існує опуклий багатокутник з чотирма гострими кутами.
- (ж) Не існує найбільшого простого числа.
- (з) Чи існує найменше просте число?
- (и) Рівняння $x^3 - 7x - 6 = 0$ має принаймні один дійсний корінь.
- (і) Бісектриса трикутника ділить його площу на рівновеликі частини.
- (й) Будь-яке число кратне 6 є кратним 2.
- (к) Відношення перпендикулярності прямих — антирефлексивне.
- (л) Справджується нерівність $x < 2$.
- (м) Нерівність $3 < 2$ хибна.
- (н) Нерівність $2 < 3$ хибна.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**Наукові праці, в яких опубліковані основні
наукові результати дисертації***Статті у наукових фахових виданнях України*

1. Бачинська Р. С. Аналіз вітчизняної теорії та практики формування математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2017. Випуск 49. С. 12 – 15.
2. Бачинська Р. С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: Зб. наук. пр. 2018. Випуск 51. С. 29–33.
3. Мілян Р. С. Порівняльний аналіз дефініцій «критичне мислення» та «логічне мислення». *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Зб. наук. пр. 2019. Випуск 54. С. 121 – 125.

Статті в зарубіжних наукових періодичних виданнях

4. BACHYNSKA R. Criteria and indicators of pupils' logical competence formation. *Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale: Materialele Conferintei Stiintifice Internationale, Chisinau, Moldova, 9-10 Noiembrie 2017*. P. 250 – 252.
5. Мілян Р. С. Аналіз результатів закордонних досліджень щодо формування логічної компетентності учнів у процесі навчання

математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, VIII (95), Issue: 239, 2020 Nov. P. 33 – 37.

6. Milian R. Pupils` mathematical competence components formation in the conditions of distance learning. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IX (99), Issue: 252, 2021 May. P. 21 – 25.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

7. Бачинська Р. С. Математична компетентність учнів: ключова чи предметна?. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017), м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р, С. 48 – 49.
8. Бачинська Р. С. Сучасні проблеми впровадження компетентнісного підходу у навчанні учнів математики. Матеріали V Всеукраїнської конференції молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень», м. Вінниця, 21-22 листопада 2017 р. С. 238– 240.
9. Бачинська Р. С. Логічна складова математичної компетентності учнів базової школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 30 травня – 1 червня 2018 р. С. 194–196.
10. Бачинська Р. С. Проблемне навчання як технологія формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасна освіта в контексті нової української школи*: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Чернівці, 11 -12 жовтня 2018 р. С. 38 – 41.
11. Бачинська Р. С. Типологія завдань для розвитку логічної компетентності учнів на уроках математики. *Методичний пошук*

- вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 18 жовтня 2018 р. С. 137–140.
12. Мілян Р. С. Geogebra як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 5 квітня, 2019. С. 138 – 140.
 13. Мілян Р. С. Добірка задач для формування логічної компетентності учнів на уроках геометрії. *Методичний пошук вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами III Всеукр. наук.-практ. конф., м. Вінниця, 25 квітня 2019 р. С. 142 – 150.
 14. Мілян Р. С. Формування логічного складника математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*. Матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Тернопіль, 12–13 листопада, 2020). С. 136 – 139.
 15. Матяш О.І. Мілян Р. С. Вчимося мислити логічно. Навчально-методичний посібник для учнів. Тернопіль: Вектор, 2020. 106 с.
 16. Матяш О.І. Мілян Р. С. Навчаємо мислити логічно. Методичні рекомендації для вчителів. Тернопіль: Вектор, 2020. 104 с.
 17. Мілян Р. С. Мова вчителя як засіб формування логічного мислення учнів. Матеріали IX Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси, 9-10 квітня 2021 р. С. 75-76.
 18. Мілян Р. С. Віртуальні дошки як інструмент формування математичної компетентності учнів в умовах дистанційного навчання. *Тези доповідей Дистанційної Всеукраїнської наукової конференції з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і*

методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань», 15–16 квітня 2021 р., Київ, Україна [електронне видання]. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. С. 111 – 113.

19. Мілян Р. С. Логічний складник геометричної компетентності учнів основної школи. *Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика: тези доповідей II міжнародної конференції (23–25 березня, м. Харків, Україна). Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. С.130-131.*

**Наукові праці, які додатково відображають
наукові результати дисертації**

20. Бачинська Р. С. Місце і роль історичних задач на уроках математики в школі. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики : зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 26-27 листопада 2015 р., м. Вінниця, 2015. С. 227–229.

**ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ
ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

Міжнародні конференції:

1. Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2017), м. Черкаси (26-28 жовтня 2017);
2. Conferinței Stiintifice Internationale «Evaluarea in sistemul educational: deziderate actuale», Chisinau, Moldova (9-10 Noiembrie 2017);
3. Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики», м. Вінниця (30 травня – 1 червня 2018 р.);
4. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», м. Тернопіль (5 квітня 2019 р.);
5. Pedagogy and Psychology in the age of globalization – 2020, 8th of November 2020, Budapest, Hungary (Педагогіка та психологія в епоху глобалізації – 2020), м.Будапешт, Угорщина (8 листопада 2020 р.);
6. VI Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи», м. Тернопіль (12–13 листопада 2020 р.);
7. International Conference «Problems of Teaching Mathematics in Educational Institutions: Theory, Methods, Practice». м. Харків (23-25 березня 2021 р.);
8. IX Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси (9-10 квітня 2021 р.).

Всеукраїнські конференції:

9. V Всеукраїнська конференція молодих учених і студентів «Актуальні проблеми сучасної науки і наукових досліджень», м. Вінниця (21-22 листопада 2017 р.);

10. Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю «Сучасна освіта в контексті нової української школи», м. Чернівці (11 -12 жовтня 2018 р.);
11. II Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики», м. Вінниця (18 жовтня 2018 р.);
12. III Всеукраїнська науково-практична конференція «Методичний пошук вчителя математики», м. Вінниця (25 квітня 2019 р.);
13. Крайовий форум «Освіта – енергія майбутнього. Дистанційна освіта – сучасний формат» (секція «Сучасні формули успіху онлайн освіти. Математика та методика її навчання», м. Тернопіль (18 жовтня 2020р.);
14. Дистанційна Всеукраїнська наукова конференція з міжнародною участю «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань», м. Київ (15–16 квітня 2021 р.).

УКРАЇНА
 МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
**ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
 ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ГНАТЮКА**
 вул. М.Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027.
 тел. (0352)43-58-80, факс (0352)43-60-02
 e-mail: info@tntpu.edu.ua, код ЄДРПОУ 02125544



UKRAINE
 MINISTRY OF EDUCATION AND
 SCIENCE OF UKRAINE
**TERNOPIL VOLODYMYR HNATIUK
 NATIONAL PEDAGOGICAL UNIVERSITY**
 2 M. Kryvonosa st., Ternopil, 46027, Ukraine
 tel. +38 0352 43 60 67, fax: +38 0352 43 60 02
 e-mail: info@tntpu.edu.ua

Від "19" 05 2021 р. № 580-33/03 На № _____ від " " 20__ р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
 на здобуття наукового ступеня доктора філософії
Мілян Роксолани Степанівни
 з теми: «Формування логічної складової
 математичної компетентності учнів основної школи»

Довідка видана Роксолані Степанівні Мілян на підтвердження факту впровадження результатів дослідження з проблеми формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи в освітній процес підготовки майбутніх учителів математики у Тернопільському національному педагогічному університеті імені Володимира Гнатюка.

Запропонована автором методика формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи проаналізована у процесі лекційних та практичних занять з методики навчання математики, а також у процесі самостійної навчально-пізнавальної діяльності майбутніх учителів математики, які проходять фахову підготовку за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Навчально-методичні матеріали, розроблені Мілян Р. С., використовувались також під час навчання інших дисциплін методичного спрямування.

Матеріали дисертаційної роботи є актуальними, мають вагоме теоретичне та практичне значення, дістали схвалення серед майбутніх учителів математики та викладачів методики навчання математики.

Результати наукового дослідження Мілян Р. С. обговорено і схвалено на засіданні кафедри математики та методики її навчання, фізико-математичного факультету Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка (протокол № 10 від 29.04.2021).



проф. Буяк Б. Б.



Україна
Тернопільська загальноосвітня школа I-III ступенів № 16
імені Володимира Левицького
Тернопільської міської ради
Тернопільської області

46027 м. Тернопіль, вул. Винниченка, 2 тел. (0352) 43-58-77; 43-60-69

20.05.2021

№ 117

ДОВІДКА
про впровадження результатів дисертаційного
дослідження Мілян Роксолани Степанівни з теми:
**«Формування логічної складової математичної
компетентності учнів основної школи»**

Видана про те, що на базі Тернопільської загальноосвітньої школи I-III ступенів № 16 імені Володимира Левицького проводився педагогічний експеримент вчителями математики на основі методичних рекомендацій Р. С. Мілян.

Корисними для вчителів були методичні вказівки з реалізації методики формування логічної складової математичної компетентності учнів. Учителі математики схвалюють комплекс задач запропонований дослідницею. Аналіз використання запропонованої Р. С. Мілян методики показав, що в учнів зріс рівень сформованості логічної компетентності, загальний рівень математичних знань та умінь. Було відмічено підвищення інтересу до математики як навчального предмету.

Запропонована Р. С. Мілян методика формування логічної складової частини математичної компетентності учнів була впроваджена в процес навчання математики в нашій школі та може бути рекомендована для використання в інших навчальних закладах.

Директор школи



Ruslana Bazunova

Руслана Базунова



УКРАЇНА
 ЧЕРНІВЕЦЬКА МІСЬКА РАДА
 ЧЕРНІВЕЦЬКА ЗАГАЛЬНООСВІТНЯ ШКОЛА I-II СТУПЕНІВ № 19
 вул. Хотинська, 23, м. Чернівці, 58007 тел. (0372) 52-95-21,
 cvznz-19@meta.ua. Код ЄДРПОУ № 21431187

«21» 05 2021 р.
 № 103

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Мілян Роксолани Степанівни з теми: «Формування логічної складової
 математичної компетентності учнів основної школи»

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Мілян Роксолани Степанівни на тему «Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи» апробовані на базі Чернівецької загальноосвітньої школи I-II ступенів № 19.

У навчальному закладі використовувалася авторська методика Р. С. Мілян щодо формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи. Зокрема, використання сконструйованої Р. С. Мілян системи задач сприяло покращенню умов для формування логічного складника математичної компетентності учнів. Вчителі, які долучилися до апробації матеріалів дисертації, схвалюють виокремлені Р. С. Мілян вимоги до систем задач для формування логічної складової математичної компетентності учнів; доцільними виявилися виокремлені методичні аспекти процесу розв'язування задач.

Особливого схвалення заслуговує, за результатами апробації, запропонований авторкою діагностичний інструментарій сформованості логічної складової математичної компетентності учнів. Різного рівня завдання дають змогу методично виважено підходити до визначення рівнів сформованості логічної складової математичної компетентності учнів.

Директор школи



А. Г. Лісовська



**ЧЕРНІВЕЦЬКА МІСЬКА РАДА
УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ
ЧЕРНІВЕЦЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ
ЧЕРНІВЕЦЬКА ЗАГАЛЬНООСВІТНЯ ШКОЛА І-ІІІ СТУПЕНІВ № 37**

58025, М. Чернівці, І.Підкови, 9, тел. 56-03-73,
E-mail: cvznz-37@meta.ua. Код ЄДРПОУ № 21431365

Від 21.05.2021 р. № 01-12/172

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження Мілян Роксолани Степанівни з теми: **«Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи»**

Видана про те, що упродовж 2019-2020 н.р. на базі Чернівцької ЗОШ І-ІІІ ступенів №37 проводився педагогічний експеримент вчителями математики на основі методичних рекомендацій Роксолани Степанівни Мілян, відображених у дисертаційному дослідженні.

Упровадження розробок і рекомендацій, що містяться у дисертаційному дослідженні Р. С. Мілян, дало можливість урізноманітнити процес навчання учнів математики, сприяло поглибленню логічних умінь учнів. Позитивні результати експерименту засвідчили педагогічну ефективність пропонуваного авторкою інструментарію формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи.

Запропонована у дисертаційному дослідженні Р. С. Мілян методика формування логічної складової математичної компетентності учнів може бути рекомендована для використання у школі.

Довідка видана для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Директор
Чернівцької ЗОШ І-ІІІ ступенів № 37



Л. І. Оробець



Чернівецька міська рада
Управління освіти

Чернівецька загальноосвітня школа I-III ступенів № 38
вул. Яна Налепки, 3, м. Чернівці, 58025, тел. (0372) 560-180, 560-550,
E-mail: cvznz-38@meta.ua. Код ЄДРПОУ № 21431371

Від 21.05.2021 р. № 01-13/165

ДОВІДКА

*про впровадження результатів дисертаційного дослідження
на здобуття наукового ступеня доктора філософії
Мілян Роксолани Степанівни з теми: «Формування логічної складової
математичної компетентності учнів основної школи»*

Видана про те, що Мілян Роксолана Степанівна в Чернівецькій загальноосвітній школі I-III ступенів № 38 презентувала результати дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня доктора філософії на тему «Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи».

Апробовуючи згадане дослідження, учителі математики використовували у своїй роботі авторські задач Р. С. Мілян та діагностичний інструментарій для формування логічного складника математичної компетентності учнів.

Методичний інструментарій формування логічної складової математичної компетентності, запропонований у дослідженні, стане в нагоді при підготовці до навчальних занять учителями-початківцями й досвідченими учителями математики.

Запропонована методика формування логічної складової математичної компетентності є практично цінною і може використовуватися в школах з метою підвищення якості математичної освіти.

Директор школи



Ж.В.Горевич



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
 імені Михайла Коцюбинського

вул. Острозького, 32, м. Вінниця, 21001, Україна, тел. (0432) 616-620, факс (0432) 612-812, E-mail: info@vsvpu.edu.ua код ЄДРПОУ 02125094

24.05.2021р. № 06/21

на № _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня доктора філософії **Мілян Роксолани Степанівни** з теми: **«Формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи»**

Результати наукового дослідження Мілян Роксолани Степанівни з теми «Формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи» впроваджувалися в освітній процес підготовки майбутніх учителів математики у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського.

Аналіз запропонованої дисертанткою поетапної методики формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи було здійснено у процесі організації різних форм і видів навчально-пізнавальної діяльності майбутніх учителів математики. Дослідниця була відповідальною за підготовку до випуску тематичного збірника наукових праць студентів «Методичний пошук» на тему «Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики».

Матеріали дисертаційної роботи є актуальними, мають вагомe теоретичне та практичне значення для розв'язання актуальної проблеми формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи. Запропонований Р.С. Мілян інструментарій формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи позитивно оцінений майбутніми учителями математики та викладачами методики навчання математики.

Проректор з наукової роботи



А.М. Коломісць



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
Комунальний заклад вищої освіти
«Вінницький гуманітарно-
педагогічний коледж»
вул. Нагірна, 13, м. Вінниця, 21019,
тел. (0432) 55-68-99, тел. (0432) 55-68-92
e-mail: vgpk@ua.fm, vgpk_nav@ua.fm
Код ЄДРПОУ 05486450

MINISTRY OF EDUCATION AND
SCIENCE OF UKRAINE
VINNYTSIA REGIONAL COUNCIL
Communal Higher Education
Institution "Vinnytsia Humanities
Pedagogical College"
Nagirna St. 13, Vinnytsia, 21019,
Tel. (0432) 55-68-99, (0432) 55-68-92
e-mail: vgpk@ua.fm, vgpk_nav@ua.fm
USREOU 05486450

«21» травня 2021 р. № 86/21-03-28-03

На № _____ від «___» _____ 20__ р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Мілян Роксолани Степанівни
з теми: «Формування логічного складника
математичної компетентності учнів основної школи»
в практиці роботи Обласного наукового ліцею-інтернату
Комунального закладу вищої освіти
«Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж».

Цією довідкою засвідчується, що впродовж 2019-2021 навчальних років результати дисертаційного дослідження Мілян Р. С. на тему «Формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи» апробовані у процесі навчання учнів 8-9 класів вчителем математики Обласного наукового ліцею-інтернату Комунального закладу вищої освіти «Вінницький гуманітарно-педагогічний коледж» Катериною Г. Д., яка є доктором філософії за спеціальністю 014 Середня освіта (математика).

Результати педагогічного експерименту підтвердили ефективність методики формування логічної компетентності. Вагомою є практична значущість розробленого навчально-діагностичного інструментарію. Розроблена та апробована авторська методика формування логічного складника математичної компетентності учнів основної школи підвищила рівень логічного розвитку учнів у процесі навчання математики.

Вважаємо доцільним використовувати результати дослідження Р. С. Мілян вчителями математики в педагогічній практиці. Результати даного дисертаційного дослідження мають важливу методичну цінність.



В. о. директора коледжу

К. Ф. Войцехівський

Наталя Цюбурук
(0432)55-68-99

**Тернопільська спеціалізована школа I-III ступенів № 3
з поглибленим вивченням іноземних мов
Тернопільської міської ради Тернопільської області**

вул. Грушевського, 3, м. Тернопіль, 46001, тел. 52-13-17, 52-68-50, 52-38-92,
e-mail: centrschool3@ukr.net Код ЄДРПОУ 14040173

26.05.2021

№ 02-09/123

ДОВІДКА

**про впровадження результатів дисертаційного
дослідження Мілян Роксолани Степанівни з теми:
«Формування логічної складової математичної
компетентності учнів основної школи»**

Видана про те, що на базі Тернопільської спеціалізованої школи I-III ступенів № 3 з поглибленим вивченням іноземних мов на основі методичних рекомендацій Р. С. Мілян проведено педагогічний експеримент.

Дослідницею ґрунтовно розкриті теоретичні аспекти логічної складової математичної компетентності учнів основної школи та запропонована модель формування логічної складової математичної компетентності учнів в основній школі, що було визнано корисним для вчителів, які здійснювали апробацію матеріалів дослідження.

Впровадження розробок і рекомендацій дисертаційного дослідження Р. С. Мілян дало змогу урізноманітнити методи та засоби організації навчально-пізнавальної діяльності учнів у процесі навчання математики, сприяло покращенню умов розвитку їхнього логічного мислення.

Результати впровадження підтверджують, що висновки дослідження Мілян Роксолани Степанівни мають практичну значущість, їх використання сприяє підвищенню рівня логічної компетентності учнів основної школи.

Директор школи



Руслана ПЕТРОКУШИН