МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Всеукраїнська олімпіада з математики серед педагогічних університетів

І тур

Задача 1. Прямі $y = ax$ та $y = bx$ ділять область

$$\left\{(x;\, y) \mid x^2 + 2012y^2 \le 2012,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$$

на три рівновеликі частини. Обчисліть значення ab.

Задача 2. Довести рівність

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_{0}^{b} f(x)dx,$$

де $0 < a \ne 1$ і $f(x)$ – парна функція.

Задача 3. Позначимо $G_1(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$ покладемо $G_{n+1}(x) = G_n'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

1) Знайти функції $G_2(x)$, $G_3(x)$ і $G_4(x)$. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ функції $G_n(x)$ є алгебраїчними многочленами відносно змінної $t = \operatorname{th} x$, $t \in (-1; 1)$.
2) Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ многочлени $S_n(t) = G_n(x)$, $t = \operatorname{th} x$ є парними функціями для парних n і непарними для непарних n.
3) Довести, що для всіх $n \ge 2$ $G_n(x) \to 0$ для $x \to +\infty$.

Задача 4. Нехай A і B – такі квадратні матриці другого порядку з цілими елементами, що матриці A, $A+B$, $A-B$, $A+2B$, $A-2B$ невироджені, причому обернені до них матриці також з цілими елементами. Довести, що матриця $C = A + 2012B$ має обернену, причому матриця C^{-1} з цілими елементами.

Задача 5. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

де $a_1 > 1$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$ збіжний і знайти його суму.

Задача 6. Знайти мінімальне і максимальне значення функції $u = 2x^2 + 12xy + y^2$ на множині $K = \left\{(x;\, y) \mid x^2 + 4y^2 = 25\right\}$.

Голова журі проф. Працьовитий М.В.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Всеукраїнська олімпіада з математики серед педагогічних університетів

ІІ тур

Задача 1. Довести, що рівняння $20^x + 12^x = 2012^x$ має єдиний додатний дійсний корінь, менший одиниці.

Задача 2. Дано коло ω радіуса r і його діаметр AB. Хорди AC ($C \neq B$) і KL перетинаються в точці M, причому $AC = KL$ і $KL \| AB$. Довести, що $AM = r$.

Задача 3. Дано многочлен $P(x) = 2012x^3 - 2011x^2 - x + 2$.

а) Довести, що $P(x)$ має три різні дійсні корені x_1, x_2, x_3.

б) Доведіть, що $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 4. Знайдіть усі прості числа $p < q < r$ такі, що числа $3p + 5q$ і $(r-p)(r-q)(q-p)+1$ задають одне і те ж саме просте число.

Задача 5. Відомо, що x та y – цілі невід’ємні числа, причому $x + y \leq 2012$. Знайдіть кількість різних чисел виду $2010x + 2011y$. Відповідь обґрунтуйте.

Задача 6. Відомо, що a і b – дійсні числа і рівняння

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

має дійсний корінь. Доведіть, що $a^2 + b^2 \geq 8$.

Голова журі проф. Працьовитий М.В.