Всеукраїнська студентська олімпіада для педагогічних університетів 2011–2012 н.р.
Розв'язання завдань першого туру

Задача 1. *Прямі* $y = ax$ *та* $y = bx$ *ділять область* $\left\{(x;\, y) \mid x^2 + 2012y^2 \le 2012,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ *на три рівновеликі частини. Обчисліть* ab.

Розв'язання. Розглянемо лінійне перетворення $x' = \frac{1}{\sqrt{2012}}x$, $y' = y$. При цьому перетворенні еліпс $\frac{x^2}{2012} + y^2 = 1$ відобразиться в коло $x'^2 + y'^2 = 1$, а прямі $y = ax$, $y = bx$ – відповідно в прямі $y' = \sqrt{2012}ax'$, $y' = \sqrt{2012}bx'$, які поділять чверть цього кола на три рівновеликі частини. Тоді кутові коефіцієнти цих прямих рівні відповідно $\frac{1}{\sqrt{3}}$ та $\sqrt{3}$, а значить $\sqrt{2012}a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2012}b = \sqrt{3}$, звідки $ab = \frac{1}{2012}$.

Задача 2. *Довести рівність*

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^b f(x)dx,$$

де $0 < a \ne 1$ *і* $f(x)$ *– парна функція.*

Розв'язання. Враховуючи те, що функція $f(x)$ парна, розіб'ємо відрізок інтегрування навпіл, і в другому інтегралі зробимо заміну x на $-x$:

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^b \frac{f(x)dx}{a^x + 1} + \int_{-b}^{0} \frac{f(x)dx}{a^x + 1} = \int_0^b \frac{f(x)dx}{a^x + 1} + \int_b^0 \frac{f(-x)(-dx)}{a^{-x} + 1} =$$

$$= \int_0^b \frac{f(x)dx}{a^x + 1} + \int_0^b \frac{f(x)dx}{a^{-x} + 1} = \int_0^b \left(\frac{1}{a^x + 1} + \frac{1}{a^{-x} + 1}\right) f(x)dx =$$

$$= \int_0^b \left(\frac{1}{a^x + 1} + \frac{a^x}{a^x + 1}\right) f(x)dx = \int_0^b f(x)dx.$$

Задача 3. *Позначимо* $G_1(x) = th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *і для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *покладемо* $G_{n+1}(x) = G_n'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1) *Знайти перші три функції* $G_2(x)$, $G_3(x)$ *і* $G_4(x)$. *Довести, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *функції* $G_n(x)$ *є алгебраїчними многочленами відносно змінної* $t = th\,x$, $t \in (-1; 1)$.
2) *Довести, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *многочлени* $S_n(t) = G_n(x)$, $t = th\,x$ *є парними для парних* n *і непарними для непарних* n;

3) Довести, що для всіх $n \ge 2$ $G_n(x) \to 0$ *для* $x \to +\infty$.

Розв'язання. 1) $G_1(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ або $G_1(x) = S_1(t) = t$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

Використаємо рекурентну властивість $G_{n+1}(x) = G_n'(x)$, $n = 2, 3, \ldots$ ($S_{n+1}(t) = S_n'(t)$ як складену диференційовану функцію):

$$G_2(x) = G_1'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x; \qquad S_2(t) = 1 - t^2;$$

$$G_3(x) = G_2'(x) = -2\operatorname{th} x\left(1 - \operatorname{th}^2 x\right); \qquad S_3(t) = -2t\left(1 - t^2\right);$$

$$G_4(x) = G_3'(x) = -2\left[\left(1 - \operatorname{th}^2 x\right)^2 - 2\operatorname{th}^2 x\left(1 - \operatorname{th}^2 x\right)\right] =$$

$$= -2\left(1 - \operatorname{th}^2 x\right)\left(-3\operatorname{th}^2 x + 1\right);$$

$$S_4(t) = -2\left(1 - t^2\right)\left(-3t^2 + 1\right).$$

2) Оскільки $G_n(x)$ можна розглядати як многочлен відносно $t = \operatorname{th} x$, то за правилом диференціювання степенів функції $\operatorname{th} x$ матимемо, що при диференціюванні парних степенів дістанемо непарний степінь:

$$\left(\operatorname{th}^{2k} x\right)' = 2k\operatorname{th}^{2k-1} x \cdot \operatorname{th}' x = 2k\operatorname{th}^{2k-1} x\left(1 - \operatorname{th}^2 x\right)$$

(аналогічно для непарних степенів).

3) Оскільки $\operatorname{th} x \to \pm 1$ при $x \to \pm\infty$, то для $n = 2, 3, \ldots$ $G_n(x) \to 0$ для $x \to \infty$.

Задача 4. *Нехай* A *і* B *– такі квадратні матриці другого порядку з цілими елементами, що матриці* A, $A + B$, $A - B$, $A + 2B$, $A - 2B$ *оборотні, причому обернені до них матриці також з цілими елементами. Довести, що матриця* $C = A + 2012B$ *має обернену, причому матриця* C^{-1} *з цілими коефіцієнтами.*

Розв'язання. Якщо матриці M та M^{-1} з цілими елементами, то $\det M = \pm 1$, оскільки $\det M \cdot \det M^{-1} = 1$ і $\det M \in \mathbb{Z}$, $\det M^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо функцію $f(x) = \det(A + xB)$. Очевидно, що $f(x)$ є многочленом, степеня не вище 2. Крім цього, $f(x)$ в п'яти точках -2, -1, 0, 1, 2 набуває значень або -1, або 1. Це можливо лише якщо $f(x) \equiv 1$ або $f(x) \equiv -1$. Тому $\det(A + 2012B) = \pm 1$, тобто матриця C є оборотною і матриця C^{-1} з цілими елементами.

Задача 5. *Довести, що ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

де $a_1 > 1$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$ *збіжний і знайти його суму.*

Розв'язання. Послідовність (a_n) зростаюча, причому $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$. Перепишемо рівність $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$ у вигляді

$$a_{n+1}-1=a_n\left(a_n-1\right),$$

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n\left(a_n-1\right)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n},$$

звідки $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$ знаходимо: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-1}$.

Задача 6. *Знайти мінімальне і максимальне значення функції* $u=2x^2+12xy+y^2$ *на множині* $K=\left\{\left(x;\,y\right)\mid x^2+4y^2=25\right\}$.

Розв'язання. Оскільки множина K є обмеженою і замкненою підмножиною $\mathbb{R}^2$, то K – компактна множина. В силу теореми Вейєрштрасса неперервна на компакті функція u досягає на ньому свого найменшого і найбільшого значення.

Зробимо заміну

$$\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=\dfrac{5}{2}\sin t. \end{cases}$$

Тоді дістанемо функцію

$$F\left(t\right)=u\left(5\cos t,\,\frac{5}{2}\sin t\right)=50\cos^2 t+150\cos t\sin t+\frac{25}{4}\sin^2 t,$$

визначену на відрізку $\left[0;\,2\pi\right]$. Знайдемо екстремальні значення цієї функції. Маємо:

$$F'\left(t\right)=-50\sin 2t+150\cos 2t+\frac{25}{4}\sin 2t=0,$$

звідки

$$tg\,2t=\frac{24}{7}.$$

А оскільки

$$tg\,2t=\frac{2tg\,t}{1-tg^2t}=\frac{24}{7},$$

то

$$\left[\begin{array}{l} tg\,t=\dfrac{3}{4}, \\ tg\,t=-\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} tg\, t = \dfrac{3}{8}, \\ \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Враховуючи рівність $x^2 + 4y^2 = 25$, отримуємо чотири точки $\left(4; \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-4; -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$. Обчислимо значення функції в цих точках:

$$u\left(\pm 4; \pm\frac{3}{2}\right) = 32 + 72 + \frac{9}{4} = \frac{425}{4},$$

$$u(\pm 3; \mp 2) = 18 - 72 + 4 = -50,$$

і на кінцях відрізка:

$$F(0) = F(2\pi) = 50.$$

Таким чином,

$$\min_{(x;\, y) \in K} u(x; y) = \min_{t \in [0;\, 2\pi]} F(t) = -50,$$

$$\max_{(x;\, y) \in K} u(x; y) = \max_{t \in [0;\, 2\pi]} F(t) = \frac{425}{4}.$$

Всеукраїнська студентська олімпіада для педагогічних університетів 2011–2012 н.р. Розв'язання завдань другого туру

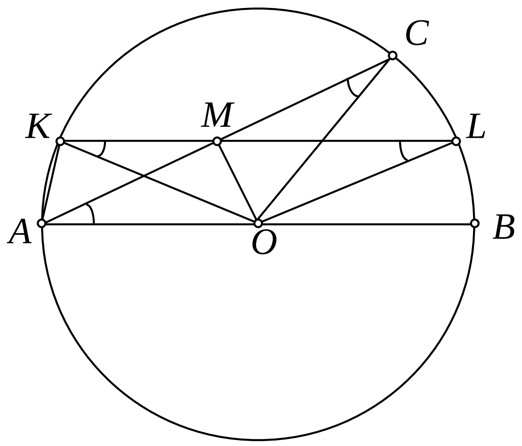
Задача 1. *Довести, що рівняння* $20^x + 12^x = 2012^x$ *має єдиний додатний дійсний корінь, менший одиниці.*

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне рівнянню $\left(\frac{20}{2012}\right)^x + \left(\frac{12}{2012}\right)^x - 1 = 0$.

Функція $f(x) = \left(\frac{20}{2012}\right)^x + \left(\frac{12}{2012}\right)^x - 1$ є монотонно спадною на $(-\infty;+\infty)$, а тому останнє рівняння має не більше одного кореня. Крім цього, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) < 0$, $f(x)$ – неперервна на R, тому єдиний корінь належить $(0;1)$.

Задача 2. *Дано коло* ω *радіуса* r *і його діаметр* AB. *Хорди* AC $(C \neq B)$ *і* KL *перетинаються в точці* M *, причому* $AC = KL$ *і* $KL \parallel AB$. *Довести, що* $AM = r$.

Розв'язання.



Трикутники AOC і KOL рівнобедрені і рівні за трьома сторонами. Тому $\angle OAC = \angle OKM = \angle ACO = \angle KLO$. Тоді точки A, K, M, O належать одному колу, а оскільки $KM \parallel AO$, то $AKMO$ – рівнобедрена трапеція. Далі, трикутники AMO і OAK рівні і рівнобедрені ($OK = OA$ як радіуси кола), що і доводить $AM = AO$.

Задача 3. *Дано многочлен* $P(x) = 2012x^3 - 2011x^2 - x + 2$.

а) Довести, що $P(x)$ *має три різні дійсні корені* x_1, x_2, x_3.

б) Обчисліть значення виразу $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3$.

Розв'язання.

а) Маємо: $P(-1) = -4020$, $P(0) = 2$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2012 \cdot \frac{1}{8} - 2011 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 < 0$, $P(1) = 2$. Оскільки $P(x)$ – неперервна функція і на кінцях відрізків $[-1,0]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ набуває значень різних знаків, то всередині кожного з цих відрізків існує корінь многочлена $P(x)$.

б) Використовуючи тотожності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ і $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha) = \alpha$, знаходимо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2+\operatorname{arctg}x_3\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_3\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_3\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_2\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_2\right)}+x_3}{1-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_2\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_2\right)}x_3}=\frac{\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}+x_3}{1-\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)}.$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=-\dfrac{2}{2012}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\dfrac{1}{2012}, \\ x_1+x_2+x_3=\dfrac{2011}{2012}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2+\operatorname{arctg}x_3\right)=\frac{\dfrac{2011}{2012}+\dfrac{2}{2012}}{1-\left(-\dfrac{1}{2012}\right)}=1.$$

Нарешті оскільки $\left|\operatorname{arctg}x_1\right|<\dfrac{\pi}{4}$, $\left|\operatorname{arctg}x_2\right|<\dfrac{\pi}{4}$, $\left|\operatorname{arctg}x_3\right|<\dfrac{\pi}{4}$ (як ми показали вище, x_1, x_2, $x_3\in\left(-1;1\right)$), то $-\dfrac{3\pi}{4}<\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2+\operatorname{arctg}x_3<\dfrac{3\pi}{4}$, а за цієї умови рівність $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2+\operatorname{arctg}x_3\right)=1$ можлива лише при

$$\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2+\operatorname{arctg}x_3=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 4. *Знайдіть усі прості числа* $p<q<r$ *такі, що числа* $3p+5q$ *і* $\left(r-p\right)\left(r-q\right)\left(q-p\right)+1$ *задають одне і те ж саме просте число.*

Розв'язання. Нехай p, q, r – прості числа, для яких виконується умова задачі. Якщо $p>2$, то усі числа p, q, r – непарні, а тому число $3p+5q$ – парне, а число $\left(r-p\right)\left(r-q\right)\left(q-p\right)+1$ – непарне. Тому, при $p>2$, числа $3p+5q$ і $\left(r-p\right)\left(r-q\right)\left(q-p\right)+1$ не задають одне і те ж саме просте число. Отже, $p=2$. Тоді за умовою виконується рівність:

$$\left(r-2\right)\left(r-q\right)\left(q-2\right)+1=6+5q.$$

Оскільки $p<q<r$, то $r-2>q-2$ і $r-q\geq 2$. Тому, $6+5q>2\left(q-2\right)^2+1$. Остання нерівність рівносильна нерівності: $q\left(13-2q\right)>3$. Звідки $q=3$ або $q=5$.

Якщо $q=3$, то $3p+5q=6+15=21$ – не є простим числом.

Якщо $q=5$, то $\left(r-2\right)\left(r-5\right)\cdot 3+1=6+5\cdot 5$, тобто $\left(r-2\right)\left(r-5\right)=5\cdot 2$. Звідки $r=7$.

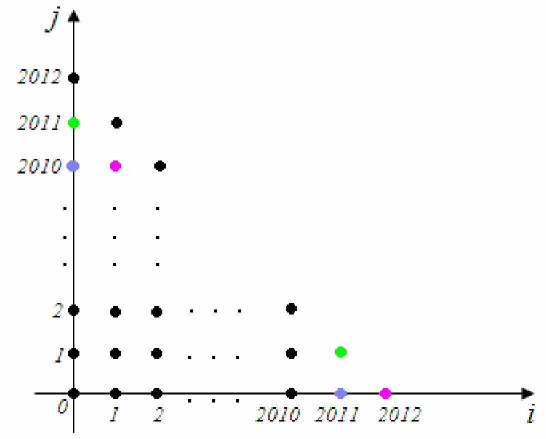
Безпосередня перевірка показує, що трійка простих чисел $p=2$, $q=5$, $r=7$ є шуканою.

Відповідь. $(p,q,r)=(2,5,7)$.

Задача 5. *Знайдіть кількість цілих невід'ємних чисел виду* $2010i+2011j$*, де* i *та* j *– цілі невід'ємні числа, для яких* $i+j\le 2012$.

Розв'язання. Нехай S – множина усіх точок $(i;j)$ координатної площини, де i та j – цілі невід'ємні числа, для яких $i+j\le 2012$. Усі її точки зображені на малюнку.

Розглянемо функцію $f:S\to\mathbb{N}_0$, де $\mathbb{N}_0$ – множина цілих невід'ємних чисел, для



якої

$$f(i;j)=2010i+2011j.$$

Нам треба знайти кількість різних значень цієї функції. Якби усі значення нашої функції були різними, то їх кількість дорівнювала б кількості елементів множини S, тобто була б рівною:

$$2013+2012+\ldots+2+1=\frac{(2013+1)\cdot 2013}{2}=2013\cdot 1007.$$

Якщо серед усіх значень нашої функції деякі з них будуть рівними, то загальна кількість різних значень нашої функції буде меншою, ніж знайдене вище значення. Тому для знаходження кількості усіх різних значень нашої функції потрібно знайти точки із S, для яких значення нашої функції будуть однаковими.

Якщо дві різні точки $(i;j)$ та $(i';j')$ із множини S такі, що

$$2010i+2011j=2010i'+2011j',$$

то

$$2010(i-i')=2011(j'-j).$$

Так як 2010 та 2011 – взаємно прості, то

$$\begin{cases} i-i'=2011l, \\ j'-j=2010l, \end{cases}$$

для деякого цілого l. Оскільки $-2012\le i-i'\le 2012$ і $-2012\le j'-j\le 2012$, то l може дорівнювати -1, 0 або 1.

Якщо $l=0$, то одержуємо, що точки $(i;j)$ та $(i';j')$ співпадають, що неможливо за припущенням.

Якщо $l=-1$, тоді $i'=i+2011$, а $j'=j-2010$. Оскільки $i'+j'\le 2012$ і $i+j\le 2012$, то $0\le i\le 1$ та $2010\le j\le 2012$. Тому, якщо $(i;j)=(0;2010)$, то

$(i';j')=(2011;0)$; якщо $(i;j)=(0;2011)$, то $(i';j')=(2011;1)$; якщо $(i;j)=(1;2010)$, то $(i';j')=(2012;0)$. Таким чином,

$$f(0;2010)=f(2011;0)=2010\cdot 2011,$$
$$f(0;2011)=f(2011;1)=2011\cdot 2011,$$
$$f(1,2010)=f(2012;0)=2010\cdot 2012.$$

Випадок $l=1$ дає такі ж самі шість точок (вони зображені іншим кольором на малюнку). Таким чином, шукана кількість різних значень буде на 3 меншою від знайденого вище значення, тобто буде рівною $2013\cdot 1007-3=2027088$.

Відповідь. 2027088.

Задача 6. *Відомо, що рівняння*

$$x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$$

має дійсний корінь. Доведіть, що $a^2+b^2\ge 8$.

Розв'язання. Нехай $x=\lambda$ – дійсний корінь даного рівняння, тоді

$$\lambda^4+a\lambda^3+2\lambda^2+b\lambda+1=0,\qquad \lambda\ne 0.$$

Маємо: $\left(\lambda^2+1\right)^2=(-\lambda)^3a+(-\lambda)b\le\sqrt{\lambda^6+\lambda^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ (тут ми використали нерівність Коші–Буняковського), тобто

$$a^2+b^2\ge\frac{\left(\lambda^2+1\right)^4}{\lambda^2\left(\lambda^4+1\right)}\ge 8.$$

Справді, нерівність $\dfrac{\left(\lambda^2+1\right)^4}{\lambda^2\left(\lambda^4+1\right)}\ge 8$ рівносильна нерівності

$$\lambda^8+4\lambda^6+6\lambda^4+4\lambda^2+1\ge 8\lambda^6+8\lambda^2,$$

яка, в свою чергу, рівносильна нерівності $\left(\lambda^2-1\right)^4\ge 0$.