

Міністерство освіти і науки України  
Інститут модернізації змісту освіти  
Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського  
Національний педагогічний університет імені  
М. П. Драгоманова  
Вінницька академія неперервної освіти

**I Всеукраїнська дистанційна  
науково-практична конференція**

**«МЕТОДИЧНИЙ ПОШУК ВЧИТЕЛЯ  
МАТЕМАТИКИ»**

**Матеріали конференції**

16 березня 2017 р.

Вінниця, Україна

УДК 373.5.016:51(06)  
ББК 74.262. 21<sub>я</sub>5+22.1<sub>я</sub>5  
М 54

Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця, 2017 – 269 с.

### **Організаційний комітет**

**Коломієць А. М.** – проректор з наукової роботи ВДПУ імені М. Коцюбинського, доктор педагогічних наук, професор – **голова оргкомітету.**

**Цвілик С. Д.** – заступник декана факультету математики, фізики та технологій з навчально-методичної та наукової роботи, кандидат педагогічних наук – **заступник голови оргкомітету.**

**Матяш О. І.** – доктор педагогічних наук, завідувач кафедри алгебри і методики навчання математики – **заступник голови оргкомітету.**

**Воєвода А. Л.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук;

**Коношевський О. Л.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук;

**Калашніков І. В.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук.

**Михайленко Л. Ф.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук;

**Наконечна Л. Й.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук;

**Панасенко О. Б.** – доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат фізико-математичних наук.

**Тютюнник Д. О.** – здобувач наукового ступеня кандидата педагогічних наук, кафедра алгебри і методики навчання математики;

**Мерінгер В. В.** – старший лаборант кафедри алгебри і методики навчання математики.

*Відповідальність за автентичність цитат, правильність фактів і посилань несуть автори статей.*

УДК 373.5.016:51(06)  
ББК 74.262. 21<sub>я</sub>5+22.1<sub>я</sub>5

© Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла  
Коцюбинського  
©Автори статей

## ЗМІСТ

### РОЗДІЛ 1. СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

#### 1.1. КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ ..... 9

*Бевз Дар'я Вікторівна*

СИСТЕМА ЗАДАЧ, РОЗВ'ЯЗАННЯ ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ НА МЕТОДІ  
ВИДІЛЕННЯ ПОВНОГО КВАДРАТУ ..... 9

*Бойчук Дмитро Юрійович*

СКЛАДАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З  
ВИКОРИСТАННЯМ НЕРІВНОСТІ КОШІ ..... 13

*Мороз Микола Петрович*

РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ: МЕТОД ЛОКАЛІЗАЦІЇ ..... 17

*Панасенко Олексій Борисович*

ВІДОМІ І НОВІ ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, РОЗВ'ЯЗАННЯ ЯКИХ  
БАЗУЮТЬСЯ НА ІДЕЇ РОЗКЛАДУ НА МНОЖНИКИ..... 21

*Сапсай Богдан Юрійович*

ПРИЙОМИ КОНСТРУЮВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ ТА ЇХ  
ЗАСТОСУВАННЯ У НАВЧАННІ ..... 25

#### 1.2. КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ..... 29

*Кирилюк Владислав Віталійович*

ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КУБІЧНИХ ТЕТРАЕДРІВ ЯК ДЖЕРЕЛО  
НОВИХ ЗАДАЧ ..... 33

*Подчос Тетяна Анатоліївна*

МІСЦЕ І РОЛЬ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ ..... 38

### РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧА ОДНА – СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНІ

#### 2.1. РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ..... 42

*Бондарчук Вікторія Сергіївна*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ  
РІЗНИМИ СПОСОБАМИ ..... 42

*Журавель Вікторія Миколаївна*

ТОТОЖНІСТЬ ОДНА – СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ РІЗНІ..... 48

*Кіріченко Олена Ігорівна*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ НА ПОБУДОВУ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ З  
ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНИХ СЕРЕДОВИЩ..... 52

*Коношевський Олег Леонідович*

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МІЖ СЕРЕДНІМИ  
ВЕЛИЧИНАМИ ..... 54

*Кузьменко Артем Миколайович*

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС  
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ..... 58

*Молчанова Марина Олександрівна*

РІВНЯННЯ З ЦІЛОЮ ЧАСТИНОЮ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ РІЗНІ  
СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ..... 62

*Орлова Анастасія Русланівна*

НЕРІВНІСТЬ НЕСБІТА ТА РІЗНІ СПОСОБИ ЇЇ ДОВЕДЕННЯ..... 66

*Салій-Машира Катерина Олександрівна*

ХМАРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ  
КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ КЛАСІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО  
ПРОФІЛЮ..... 70

## **2.2. РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ**

**ГЕОМЕТРІЇ ..... 74**

*Бойко Вікторія Володимирівна*

УДОСКОНАЛЕННЯ УМОВ ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ  
ПРО ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ..... 74

*Забазнова Анастасія Олегівна*

ДО ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
ЗАДАЧ З ПЛАНІМЕТРІЇ..... 81

*Комарніцька Анна Миколаївна*

УРІЗНОМАНІТНЕННЯ СПОСОБІВ ДОВЕДЕНЬ ТЕОРЕМ В КУРСІ  
ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ ..... 85

*Монько Оксана Юріївна*

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ..... 88

*Руда Ольга Григорівна*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ РІЗНИМИ  
СПОСОБАМИ ..... 92

*Святецька Наталія Василівна*

РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТРИСИ  
ТРИКУТНИКА ..... 95

*Шайтанов Максим Сергійович*

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧИХ  
ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ..... 99

*Шалавінська Вікторія Олександрівна*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ ЯК ЗАСІБ  
УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ УЧНІВ  
З ТЕМИ: «ЧОТИРИКУТНИКИ» ..... 103

*Шведюк Анастасія Миколаївна*

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ  
ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ..... 108

*Шмулян Ярослава Віталіївна*

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ЯК  
ЗАСІБ РОЗВИТКУ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ..... 111

*Ярмолюк Ольга Анатоліївна*

УРОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА  
СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ..... 115

## **РОЗДІЛ 3. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ ЗАДАЧ В МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ**

### **3.1. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ УЧНІВ АЛГЕБРИ..... 119**

*Бачинська Роксолана Степанівна*

ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ НА УРОК АЛГЕБРИ В СТАРШІЙ  
ШКОЛІ ..... 119

*Бойко Ганна Олександрівна*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ПОВСЯКДЕННОГО  
ЖИТТЯ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА» ..... 123

*Боцюра Катерина Юріївна*

СИСТЕМА ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ  
МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІРРАЦІОНАЛЬНІ  
НЕРІВНОСТІ» ..... 125

*Гонгало Наталія Володимирівна*

КОНСТРУЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ  
ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ НАВЧАННЯ ..... 132

*Дученко Ольга Олександрівна*

СТВОРЕННЯ СИСТЕМИ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ФОРМУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ВМІНЬ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ .. 137

|                                                                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Ігнатій В'ячеслав Григорович, Ясінська Яна</i><br>ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ<br>ОСНОВНОЇ ШКОЛИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНСТРУЮВАННЯ<br>ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ ..... | 141 |
| <i>Калашнікова Євгенія Ігорівна, Калашніков Ігор В'ячеславович</i><br>МОДЕЛІ ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФАКТІВ .....                                                        | 145 |
| <i>Катеринюк Галина Дмитрівна</i><br>СИСТЕМА ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ<br>ДЛЯ УЧНІВ СПОРТИВНО-ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ .....                                        | 150 |
| <i>Клітний Сергій Васильович</i><br>КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ .....                                                                                                  | 154 |
| <i>Кривошея Олена Ігорівна</i><br>МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ<br>ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ .....                                                                        | 157 |
| <i>Маслюченко Юлія Анатоліївна</i><br>КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ ПАТРІОТИЧНОГО ЗМІСТУ .....                                                                                               | 161 |
| <i>Мерінгер Василь Вікторович</i><br>МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ДІАГНОСТИКИ ЗАЛИШКОВИХ<br>ЗНАНЬ УЧНІВ З АЛГЕБРИ .....                                                                   | 165 |
| <i>Москалюк Катерина Степанівна</i><br>КОМПЕТЕНТІСНО ОРІЄНТОВАНІ ЗАДАЧІ У НАВЧАННІ УЧНІВ<br>МАТЕМАТИКИ .....                                                                       | 169 |
| <i>Пасіхова Олена Петрівна</i><br>ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ВПРАВ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ ЗНАНЬ УЧНІВ<br>З АЛГЕБРИ У 10 КЛАСІ .....                                                               | 173 |
| <i>Пекна Ірина Олександрівна</i><br>СИСТЕМА ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ<br>КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ .....                                                    | 178 |
| <i>Терепа Алла Василівна</i><br>СИСТЕМА ЗАДАЧ, ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ<br>КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ .....                                                                           | 186 |
| <i>Чукарук Інна Юріївна</i><br>ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСІБ ІНДИВІДУАЛЬНОГО<br>ПІДХОДУ ДО УЧНІВ .....                                                                         | 190 |
| <i>Шищенко Інна Володимирівна</i><br>ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ЯК ОBOB'ЯЗКОВИЙ ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ ЗАДАЧ<br>У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ .....                                    | 196 |

*Шустова Наталія Юріївна*

МІСЦЕ І РОЛЬ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ  
ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ ПЕДАГОГІЧНОГО КОЛЕДЖУ ..... 199

**3.2. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ УЧНІВ  
ГЕОМЕТРІЇ ..... 202**

*Воєвода Аліна Леонідівна*

ПРИЙОМИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОСТІ МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА  
УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ ..... 202

*Кузема Олександр Олександрович*

СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ  
ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕРІВНОСТЯМИ, ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ  
МАТЕМАТИЧНОГО ГУРТКА У СЬОМОМУ КЛАСІ..... 205

*Мартиненко Дмитро Олександрович*

КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ НА РОЗГОРТКИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ  
ЗАСОБАМИ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA..... 208

*Матяш Ольга Іванівна*

ФОРМУВАННЯ ДОБІРОК ЗАДАЧ-ПЕРЛИНОК У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ  
УЧНІВ СТЕРЕОМЕТРІЇ..... 212

*Михайленко Любов Федорівна, Михайленко Дмитро Володимирович*

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ СТУДЕНТІВ ВИКОРИСТОВУВАТИ  
ПРИЙОМИ КОРЕКЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ.... 216

*Наконечна Людмила Йосипівна*

СИСТЕМА ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ СТУДЕНТІВ  
РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ КООРДИНАТНИМ МЕТОДОМ ..... 221

*Панченко Лариса Леонтіївна, Шаповалова Наталія Валентинівна*

СИСТЕМИ ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ ..... 225

*Плюшко Владислав Володимирович*

СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСТАНІ ЯК  
ЗАСІБ РОЗВИТКУ ПРОСТОРОВОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ..... 229

*Стецюк Анастасія Валеріївна*

СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ.. 236

*Тіманова Алла Володимирівна*

СИСТЕМА ЗАДАЧ З ПЛАНІМЕТРІЇ СПРЯМОВАНА НА РОЗВИТОК  
НАВИЧОК УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ДОДАТКОВОЇ  
ПОБУДОВИ..... 241

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Тютюнник Діана Олегівна</i><br>КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ<br>ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ .....           | 245 |
| <i>Чернухо Олена Ігорівна</i><br>ДІАГНОСТИКА РОЗВИНЕНOSTІ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ<br>ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ..... | 250 |
| <i>Науменко Таміла Василівна</i><br>ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ЯК ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У<br>МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ.....   | 254 |
| <i>Каишельян Юлія Олександрівна</i><br>АНАЛІЗ НАВЧАЛЬНО МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ЩОДО<br>КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ ЗАДАЧ .....             | 257 |
| <i>Люба Ангеліна Анатоліївна</i><br>ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ЗАСІБ<br>КОРЕКЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ.....         | 261 |
| <i>Парамзіна Світлана Василівна</i><br>ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ КЛАСІВ З<br>ГУМАНІТАРНИМ ПРОФІЛЕМ НАВЧАННЯ ..... | 266 |



## РОЗДІЛ 1. СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

### 1.1. КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ

---

*Бевз Дар'я Вікторівна*

*Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, студентка 2 курсу*

#### **СИСТЕМА ЗАДАЧ, РОЗВ'ЯЗАННЯ ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ НА МЕТОДИ ВИДІЛЕННЯ ПОВНОГО КВАДРАТУ**

**Актуальність.** Аналізуючи програмний матеріал 7–11 класів (див., наприклад, [1,3]), можна помітити, що метод виділення повного квадрату застосовується при розв'язуванні значної кількості задач (в тому числі й підвищеної складності та нестандартних) як курсу алгебри, так і геометрії. Разом з тим нам невідома у вітчизняній навчально-методичній літературі чітка систематизація задач, які можуть бути розв'язані з допомогою цього методу. Тому *мета статті* полягає у висвітленні широкої добірки задач різного рівня складності, спрямованої на вироблення навичок учнів розв'язувати задачі, використовуючи метод виділення повного квадрату.

**Виклад основного матеріалу.** Найперше знайомство із методом виділення повного квадрату до розв'язування задач підвищеної складності зустрічається у 7 класі після вивчення формул квадрата суми і квадрата різниці виразів. Вже тоді з'являються найперші завдання такого типу, які вважаються завданнями підвищеної складності:

1. Розв'язати рівняння:  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .
2. Розкласти на множники:  $x^2 - 4x - 5$ .
3. При яких значеннях  $x$  та  $y$  дорівнює нулю значення многочлена

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41?$$

4. Довести, що вирази набувають додатних значень для всіх цілих  $n$ :

$$6n^2 - 12n + 15, (n - 3)(n - 7) + 6.$$

5. Знайти найменше значення многочлена:  $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y$ .

Виділення повного квадрату разом із формулою різниці квадратів дозволяє знаходити розклади на множники многочленів різних видів. Окрім розв'язування рівнянь і наведених вище завдань, це може слугувати до появи задач, наприклад, пов'язаних із розкладом числа на прості множники:

6. Довести, що  $n^4 + 4$  при  $n > 1$  – складене (теорема Софі Жермен).

7. Доведіть, що число  $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$  є складеним.

Таким чином, у сьомому класі можна провести заняття, на якому запропонувати вказані вище завдання для вироблення навичок виділення повного квадрату для розв'язування різних задач.

У восьмому класі техніку виділення повного квадрату доцільно відпрацювати при розв'язуванні простих квадратних рівнянь ще до вивчення формул коренів квадратного рівняння. Окрім того, виділення повного квадрату застосовується при розв'язуванні таких задач підвищеного рівня складності.

8. Обчислити:  $\sqrt{139 + 66\sqrt{2}} + \sqrt{139 - 66\sqrt{2}}$ .

9. Знайти суму квадратів коренів рівняння:  $3x^2 - 7x - 18 = 0$ .

10. Довести, що  $n^2 + 8n + 15$  не ділиться на  $n + 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

У дев'ятому класі ціла низка задач на доведення нерівностей розв'язується з допомогою методу виділення повного квадрату:

11. Довести, що нерівність є справедливою для всіх  $a, b, c \in \mathbb{R}$ :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

$$2a^2 + 5b^2 + 20c^2 \geq 4ab + 4bc + 8ca.$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca + a + b + c).$$

12. Довести, що нерівність є справедливою для всіх  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x^4 - 3x^2 - 6x + 13 > 0.$$

13. Довести, що нерівність є справедливою для всіх  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x^4 - 12x + 13 > 0.$$

14. Побудуйте графік функції:  $y = \sqrt{4x+1+4x^2} - \sqrt{4-12x+9x^2}$

15. Знайдіть усі пари дійсних чисел  $(x, y)$ , які задовольняють нерівність

$$\sqrt{x^2 - 6x + 18} \cdot \sqrt{y^2 + 14y + 50} \leq 3.$$

Ідея виділення повного квадрату може слугувати для складання нових задач підвищеного рівня складності – на доведення нерівностей, на розв’язування рівнянь тощо. Для складання таких задач варто відштовхнутись від «простого» рівняння (нерівності) виду  $A^2 + B^2 = (\geq) 0$  і підставити замість  $A$  та  $B$  потрібні вирази. Наприклад, пропонуємо таку задачу:

16. Розв’язати рівняння:  $\frac{4}{3}(\sin x)^2 - \frac{8}{3}\sin x \cos x + 5(\cos x)^2 - \cos x + \frac{1}{4} = 0.$

Для його розв’язання слід помітити, що це рівняння є граничним випадком

такої очевидної нерівності:  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x - 2\cos x\right)^2 + \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

В курсі геометрії виділення повного квадрату широко застосовується для дослідження рівняння кола. Нижче ми пропонуємо задачу олімпіадного характеру, розв’язання якої базується на виділенні повного квадрату для знаходження рівняння кола (її було запропоновано для розв’язання учням 10 класу на районній олімпіаді у 2016 році):

17. Довести, що параболи  $y^2 = 2x$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$  перетинаються у чотирьох точках, які лежать на одному колі. Знайти центр і радіус цього кола.

При розв’язуванні задач підвищеного рівня складності виділення повного квадрату дозволяє давати оцінки виразам, які фігурують в задачі. Наприклад, розглянемо таке завдання.

18. Знайти всі пари  $(x; y)$  дійсних чисел  $x$  та  $y$ , для кожної з яких виконується нерівність  $30y + 3 \geq 25y^2 + 9x^2 + \frac{4}{x^2}.$

Для розв’язання цієї задачі слід переписати нерівність у вигляді

$$30y + 3 - 25y^2 \geq 9x^2 + \frac{4}{x^2}$$

і помітити, що ліва частина останньої нерівності

$$30y + 3 - 25y^2 = 12 - (5y - 3)^2 \leq 12,$$

а права –  $9x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + 12 \geq 12$ . Тоді задана нерівність рівносильна

системі 
$$\begin{cases} 12 - (5y - 3)^2 = 12, \\ \left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + 12 = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержуємо відповідь  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3}{5}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3}{5}\right)$ .

**Висновок.** Якщо спробувати систематизувати завдання, які розв'язуються за допомогою виділення повного квадрату, то можна зробити висновок, що розмах завдань досить значний. У статті наведена підбірка різноманітних вправ, які поєднують у собі знання математики, починаючи з 6-го класу (подільність чисел, парність чисел, поняття складеного числа, поняття модуля числа тощо). Ці завдання доречно використовувати на уроках з метою поглиблення знань з математики.

### Література

1. Гальперіна А. Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник завдань для контролю знань. / А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова. – Харків : «Ранок», 2010.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра. Підручник для 7-го класу. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Харків : «Гімназія», 2007.
3. Шунда Н. М. Збірник задач з алгебри для 7-9 класів. / Н. М. Шунда – Київ : «Техніка», 2003.

**Анотація.** Статтю присвячено висвітленню ролі і місця методу виділення повного квадрату при розв'язуванні алгебраїчних задач. Розглянуті завдання різних рівнів складності, включаючи й задачі для підготовки до участі в олімпіадах.

**Ключові слова:** метод виділення повного квадрату

**Summary.** The article is devoted to highlighting the role and place of complete square selection method for solving algebraic problems. The problem of different levels of difficulty, including the task to prepare for participation in competitions.

**Keywords:** method of separating a perfect square.

## **СКЛАДАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕРІВНОСТІ КОШІ**

Доведення нерівностей – традиційна і складна тема шкільного курсу алгебри. Фактично усі задачі на доведення нерівностей є задачами високого рівня складності, вони є традиційними завданнями на математичних олімпіадах.

Спеціальної вітчизняної літератури присвяченої доведенню нерівностей небагато. В посібнику [3] цілий розділ присвячений різним методам доведення нерівностей, зокрема з використанням наслідків нерівності Коші–Буняковського–Шварца. В джерелах [2,3] описуються деякі найбільш поширені методи доведення нерівностей.

Чимало нерівностей можуть бути ефективно доведені з допомогою класичної нерівності Коші. Більше того, нерівність Коші може слугувати потужним інструментом для конструювання нових задач. *Мета* даної роботи – описати алгоритм складання задач на доведення нерівностей за допомогою нерівності Коші і сконструювати нові завдання за описаним алгоритмом.

Добре відомою є нерівність  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , яку називають нерівністю Коші для двох чисел. Зауважимо, що в цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли  $a = b$ .

Узагальнення цієї нерівності на  $n$  додатних чисел називається нерівністю Коші: для будь яких  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  виконується нерівність

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{причому рівність досягається тоді і тільки тоді,}$$

коли  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Із різними способами доведення нерівності Коші можна ознайомитись, наприклад, в статті [1].

Синтетичний метод доведення нерівностей полягає в тому, що за допомогою певних перетворень нерівностей, яку потрібно довести, виводять із деяких відомих (очевидних, або їх ще називають опорних) нерівностей. В ролі таких часто використовують нерівність Коші:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

Логічна схема такого доведення виглядає у вигляді імплікацій  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ , де  $A_1$  – деяка початкова правильна нерівність,  $A_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) – отримані з неї правильні нерівності,  $B$  – нерівність, яку потрібно довести [2].

Наведемо приклади нерівностей, для доведення яких використовується синтетичний метод, у якому першою (опорною) нерівністю є нерівність Коші.

1. Доведіть нерівність  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ .

$$\text{Маємо: } \frac{a^2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = 2a; \quad \frac{b^2}{c} + c \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c^2}} = 2b; \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = 2c.$$

Знайдемо суму цих трьох нерівностей, виконаємо рівносильні перетворення і отримаємо нерівність яку і потрібно було довести.

2. Доведіть нерівність  $\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geq a + b + c$ .

Розглянемо наведені нижче вирази, та застосуємо до них нерівність Коші.

$$\frac{a^4}{b^3} + b + b + b \geq 4\sqrt{\frac{a^4}{b^3}bbb} = 4a, \quad \frac{b^4}{c^3} + c + c + c \geq 4\sqrt{\frac{b^4}{c^3}ccc} = 4b, \\ \frac{c^4}{a^3} + a + a + a \geq 4\sqrt{\frac{c^4}{a^3}aaa} = 4c.$$

Знайдемо суму цих трьох нерівностей, виконаємо рівносильні перетворення і отримаємо нерівність яку і потрібно було довести.

Для складання нових задач на доведення нерівностей застосуємо такий алгоритм:

1) Виберемо значення змінних, при якому буде виконуватися рівність.

2) Утворимо вирази, які набуватимуть однакових значень при тих значеннях змінних, які обрано в п. 1. Складемо нерівності Коші для утворених виразів.

3) Складемо нову нерівність, як наслідок раніше утворених, за допомогою операцій їх додавання або множення.

Проілюструємо цей алгоритм на прикладах.

Приклад 1. Припустимо, що ми хочемо скласти нерівність, у якій рівність наступатиме при  $a = b = 1$ . Запишемо такі очевидні нерівності (наслідки з нерівності Коші):  $a^2 + 1 \geq 2a$ ,  $\frac{1}{b^2} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot 1} = \frac{2}{b}$ .

Важливим тут є те, що умови настання рівності в обох нерівностях однакові – при  $a = b = 1$ . Перемножимо утворені нерівності і дістанемо певний наслідок – правильну нерівність, в якій рівність наступатиме тоді і тільки тоді, коли настає рівність в сконструйованих нерівностях, тобто при  $a = b = 1$ :

$$(a^2 + 1)\left(\frac{1}{b^2} + 1\right) \geq 4\frac{a}{b}.$$

Виконавши певні рівносильні перетворення приходимо до нової нерівності, яку можна запропонувати для доведення учням на математичних змаганнях:

$$\frac{a^2}{b^2} + a^2 + \frac{1}{b^2} + 1 \geq 4\frac{a}{b}.$$

Далі для спрощення ми вказуватимемо в компактній формі кроки нашого алгоритму. Тут і далі ми працюватимемо із змінними, які набувають додатних значень.

Приклад 2.

1)  $a = b = c = 2$ .

$$2) \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2} + \frac{c^3}{2} + \frac{a^2b}{2} + \frac{a^2b}{2} + \frac{b^2c}{2} + \frac{b^2c}{2} + \frac{c^2a}{2} + \frac{c^2a}{2} \geq 9\sqrt[9]{\frac{a^9b^9c^9}{2^9}} = \frac{9}{2}abc.$$

$$3) a^3 + b^3 + c^3 + 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a \geq 9abc.$$

Приклад 3.

$$1) x = 2y = 4z \quad 2) \frac{x+2y}{2} \geq \sqrt{2xy}, \frac{x+4z}{2} \geq \sqrt{4xz}, \frac{2y+4z}{2} \geq \sqrt{8yz}$$

3) Перемножимо утворені нерівності, виконаємо рівносильні перетворення і отримаємо:  $(x+2y)(x+4z)(y+z) \geq 16xyz$

#### Приклад 4.

$$1) a = b = 1. \quad 2) \frac{1}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{4} \geq 1, \frac{1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{4} \geq 1$$

3) Додамо утворені нерівності, виконаємо рівносильні перетворення і одержимо:  $\frac{4}{a^2+1} + \frac{4}{b^2+1} + a^2 + b^2 \geq 6.$

#### Приклад 5.

$$1) x = y = 2. \quad 2) x^2 + y^2 + 2x + 2x + 2y + 2y + 4 + 4 \geq 8\sqrt{2^8 x^4 y^4}.$$

Виконавши спрощення, отримаємо:  $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 \geq 16\sqrt{xy}.$

### **Література**

1. Мавло Д.П. Чи можете ви показати себе краще, ніж Коші? / Д. П. Мавло // У світі математики. – 2004, Т. 10, Вип. 3. – С. 1–14.

2. Швець В. О. Математичний гурток. Старша школа. Нерівності та їх доведення [Текст] / Василь Швець, [Л. В. Заболотня, І. С. Соколовська]. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. – 108, [1] с. : рис., табл. – (Бібліотека "Шкільного світу").

3. Ясінський В.А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В. А. Ясінський, О.Б. Панасенко. – Вінниця : Середняк Т.К., 2015. – 272 с.

**Анотація.** У статті розглянуто тип нерівностей, які можна довести за допомогою нерівності Коші, наведенні приклади їх доведення. Описано алгоритм складання нерівностей, які доводяться синтетичним методом, у якому першою (опорною) нерівністю є нерівність Коші. Складено нерівності за описаним алгоритмом.

**Ключові слова.** Нерівність, нерівність Коші, середнє арифметичне, середнє геометричне, доведення нерівностей, синтетичний метод, складання нерівностей.

**Annotation.** The article presents such type of inequalities that can be proved using Cauchy inequality, their proof examples are mentioned as well. The inequality creation algorithm that is proved by the synthetic method (the basic inequality is Cauchy inequality) is described. Based on the overviewed algorithm the new inequalities have been created.

**Keywords:** inequality, Cauchy inequality, arithmetic mean, geometric mean, the proof of inequalities, synthetic method, creation of inequalities.



## РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ: МЕТОД ЛОКАЛІЗАЦІЇ

Розглянемо рівняння  $P(x, y) = 0$ , де  $P(x, y)$  – деякий вираз від змінних  $x$  та  $y$ . Нехай з рівняння  $P(x, y) = 0$  як наслідок можна отримати рівність  $f(x, y) = F(x, y)$ , де  $f(x, y)$  – деякий вираз, який при цілих значеннях змінних теж набуває лише цілих значень, а  $F(x, y)$  – деякий вираз від змінних  $x$  та  $y$ .

Якщо матиме місце подвійна нерівність  $A \leq F(x, y) \leq B$ , де  $A$  та  $B$  – деякі цілі числа, то як наслідок отримаємо, що  $A \leq f(x, y) \leq B$ . А оскільки  $f(x, y)$  при цілих значеннях змінних може набувати лише цілих значень, то стає можливим перебір за всіма потенційними значеннями виразу  $f(x, y)$ .

Нехай з рівняння  $f(x, y) = C$  можна явно виразити  $y$  через змінну  $x$ :  $y = \lambda_C(x)$ . Тоді для всіх цілих значень  $C \in [A, B]$  виконуємо підстановку  $y = \lambda_C(x)$  в початкове рівняння. Таким чином рівняння з двома невідомими зводиться до сукупності скінченної кількості рівнянь з однією невідомою.

*Приклад застосування методу локалізації.*

Задача 1. (LI Всеукраїнська математична олімпіада, 2011, 10 клас, автор – Д. Мисак). Розв'яжіть у натуральних числах  $(x, y)$  рівняння

$$(x+y)^3 = (x-y-6)^2.$$

Розв'язання. Оскільки числа  $x$  та  $y$  натуральні числа, то дане рівняння рівносильне наступному:  $x+y = \left( \frac{x-y-6}{x+y} \right)^2$ . Очевидно, пари  $(1,1)$ ,  $(1,2)$  та  $(2,1)$  не є розв'язками рівняння. Тому надалі вважатимемо, що  $x, y > 2$ .

Виконаємо очевидні оцінки:

$$4 \leq x+y = \left( \frac{x-y-6}{x+y} \right)^2 \leq \left( \frac{x+y+6}{x+y} \right)^2 = \left( 1 + \frac{6}{x+y} \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{3}{2} \right)^2 = 6,25.$$

Отже,  $x+y$  може набувати лише значень 4, 5 або 6. Маємо три випадки.

$$1) x+y=4 \Rightarrow 4^3 = (x+y-2y-6)^2 = (4-2y-6)^2 = (2y+2)^2 = 4 \cdot (y+1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 16 = (y+1)^2 \Rightarrow y+1=4 \Rightarrow y=3, x=1.$$

2)  $x+y=5 \Rightarrow 5^3 = (x+y-2y-6)^2 = (5-2y-6)^2 = (2y+1)^2$ . Але  $5^3$  не є повним квадратом. Тому в цьому випадку рівняння розв'язків не має.

3)  $x+y=6 \Rightarrow 6^3 = (x+y-2y-6)^2 = (6-2y-6)^2 = (2y)^2$ . Але  $6^3$  не є повним квадратом. Тому в цьому випадку рівняння теж не має розв'язків.

*Відповідь:* (1,3).

В цій задачі нам вдалося локалізувати значення суми  $x+y$  та отримати перебір лише з трьох випадків.

*Зауваження.* Для отримання сильнішої оцінки деякого виразу, інколи доцільно виконати перевірку кількох «перших» значень наборів невідомих, аби потім вважати кожен з них більшою чи меншою за деяке число. В задачі 1 ми одразу перевірили набори (1,1), (1,2) та (2,1), що дозволило нам вважати, що  $x, y > 2$ . Якби ми цього не зробили і вважали, що  $x, y \geq 1$ , то отримали б за аналогічних міркувань оцінку  $2 \leq x+y \leq 16$ . А це спричинило б перебір аж 15 випадків, з яких 14 були б марними.

#### *Задачі для самостійного розв'язування*

Наступні задачі пропонувалися в різні роки на математичних змаганнях школярів. Кожну можна розв'язати методом локалізації, хоча більшість з них має свій авторський розв'язок. Разом з попереднім теоретичним матеріалом, запропонована підбірка задач може слугувати матеріалом для занять на факультативі чи гуртку, а також буде корисна при підготовці школярів до математичних олімпіад різного рівня.

Задача 2 (Соціалістична Федеративна Республіка Югославія, 1974).

Розв'язати рівняння  $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$  в цілих числах.

Задача 3 (15-та Всесоюзна олімпіада, 1981, Алма-Ата). Розв'яжіть рівняння  $x^3 - y^3 = xy + 61$  в натуральних числах.

Задача 4 (Всеросійська олімпіада з математики, 1997, 10 клас, автор – М. Сонкин). Розв'яжіть в цілих числах рівняння  $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$ .

Задача 5 (6-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені І. І. Ляшка, 2011, молодша ліга) Розв'яжіть у цілих числах рівняння  $9m^2 + 3n = n^2 + 8$ .

Задача 6 (XIX Всеукраїнський ТЮМ, Фінальний бій, 2016, автор – М. Мороз) Знайдіть усі такі пари цілих чисел  $x$  і  $y$ , для яких

$$x^3 - 1 = y^3 + y^2 + 5xy + x + \sqrt{5x+1} + \sqrt{3y+1}.$$

Вказівки та відповіді

Задача 2. *Вказівка.* Легко отримати розв'язки  $(0;0)$ ,  $(1;-1)$ ,  $(-1;1)$ . В силу симетричності рівняння припустіть, що  $|x| \leq |y|$ , оцініть згори  $|x|$  та отримайте, що інших розв'язків рівняння не має.

Задача 3. *Вказівка:* оцініть значення різниці  $x - y$ . *Відповідь:*  $(5;6)$ .

Задача 4. *Вказівка:* оцініть модуль  $|x - y|$ . *Відповідь:*  $(\pm 1;0)$ ,  $(\pm 4;3)$ ,  $(\pm 4;5)$ .

Задача 5. *Вказівка:* оцініть згори та знизу значення виразу  $n - 3m$ . *Відповідь:*  $m = \pm 2$ ,  $n = -4$  або  $n = 7$ .

Задача 6. *Вказівка:* Оцініть згори та знизу значення різниці  $x - y$ . *Відповідь:*  $(3;1)$ ,  $(7;5)$ .

### Література

1. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – (Б-ка мат. кружка; вып. 18). – 288с.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦНМО, 2007. — 472 с.
3. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И.

Ф. и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416с.

4. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010/11 навч. рік : навч.-метод посіб. / А. В. Анікушин, А. Є. Данилова, Г. В. Крюкова та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. – Х.: Гімназія, 2013. – 368с.: іл.

5. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011/12 навч. рік : навч.-метод посіб. / А. В. Анікушин, А. Є. Данилова, Г. В. Крюкова та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. – Х.: Гімназія, 2013. – 416с.: іл.

6. Мороз М. П. Рівняння в цілих числах: метод локалізації (за матеріалами XIX Всеукраїнського турніру юних математиків) // Математика в рідній школі. – 2017. - №2 (184). – С.26-29.

**Анотація.** У даній доповіді йдеться про один з методів розв'язування рівнянь в цілих числах – метод локалізації: коротко описується суть цього методу, наводиться приклад розв'язання задачі та пропонується підбірка задач з різних математичних змагань на застосування даного методу. Цей матеріал може бути корисним при підготовці учнів до різних математичних змагань.

**Ключові слова:** рівняння в цілих числах, метод локалізації, математичні змагання.

**Annotation.** In this article we consider one of the methods of solving equations in integers - the localization method. We shortly told about this method, gave a solution of problem and proposed a digest of problems taken from mathematical olympiads. This material will be useful in training students for different mathematical competitions.

**Keywords:** equations in integers, localization method, mathematical competitions.

## ВІДОМІ І НОВІ ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, РОЗВ'ЯЗАННЯ ЯКИХ БАЗУЮТЬСЯ НА ІДЕЇ РОЗКЛАДУ НА МНОЖНИКИ

Задачі з елементарної теорії чисел – невід'ємний атрибут кожної математичної олімпіади. Зазвичай умови таких задач сформульовані в термінах кільця цілих чисел та їх розв'язання не передбачає до переходу у більш широкі множини – поля раціональних та дійсних чисел.

Одним з центральних фактів, що використовується при розв'язуванні задач з теорії чисел, є основна теорема арифметики, яка стверджує єдиність розкладу натурального числа, більшого за 1, на прості множники з точністю до перестановки множників. Загалом ідея розкладу числа на прості множники є однією з центральних до розв'язування задач з теорії чисел. Її усвідомлення може слугувати інструментом як до розв'язування задач, так і до конструювання нових задач.

Наприклад, для того, щоб довести, що задане число не є простим, достатньо навести приклад нетривіального дільника цього числа.

Розглянемо це на деяких прикладах.

**Задача 1.** Доведіть, що числа виду  $m^4 + 4$ , де  $m \neq 1$  – натуральне, є складеними.

Цю задачу ще називають *теоремою Софі Жермен* [3, с.26]. Її розв'язання базується на таких перетвореннях:

$$m^4 + 4 = m^4 + 4 + 4m^2 - 4m^2 = (m^2 + 2)^2 - (2m)^2 = (m^2 - 2m + 2)(m^2 + 2m + 2)$$

.

Ця ідея може лежати в основі низки задач з теорії чисел, а їх формулювання може базуватись на задачах типу «розкласти многочлен на множники» із будь-якого задачника із алгебри.

**Задача 2.** Знайдіть усі прості числа, які можна подати у вигляді  $m^{10} + m^5 + 1$

**Задача 3.** Андрійко перемножив чотири послідовних парних числа, до результату додав 15 і проголосив, що одержана відповідь є простим числом. Доведіть, що Андрійко помилився.

Ключем до розв'язання цих задач можуть бути формули розкладу на множники многочленів:

$$m^{10} + m^5 + 1 = (m^2 + m + 1)(m^4 + m + 1)(m^4 + m^3 + 1),$$
$$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 15 = (x-2)(x+2)(x^2-6).$$

Разом з тим, задачу 3 можна розв'язати, довівши, що одержане число завжди кратне 3.

Іноді для обґрунтування складеності числа не обов'язково вміти розкласти на множники: достатньо просто знати, що таке розвинення є. Тоді задача полягатиме в обґрунтуванні того, що кожний з двох множників більше 1. Наприклад, многочлен з цілими коефіцієнтами степеня більше 1, який має цілий корінь, може бути розкладений на множники.

**Задача 4 [2, с. 22].** Знайти усі прості числа, які подаються у вигляді  $(3+n)^4 - 256n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Розв'язання.* Нескладно помітити, що  $n=1$  – корінь многочлена  $P(n) = (3+n)^4 - 256n$ , тому  $P(n) = (n-1)Q(n)$ , де  $Q(n)$  – многочлен з цілими коефіцієнтами.

При цьому  $P(1)=0$ ,  $P(2)=113$ ,  $P(3)=6^4 - 256 \cdot 3$  – ділиться на 6, а при  $n \geq 4$  маємо:  $P(n) > n(3+n)^3 - 256n > n$ , тобто  $Q(n) > 1$ .

*Відповідь.* 113.

Розв'язування низки рівнянь в цілих числах базуються на ідеї подання рівняння у вигляді  $A \cdot B = C$ , де  $C$  – або просте число, або має у певному розумінні «малу» кількість дільників. Так, зокрема, розв'язуються такі відомі з підручників та математичних олімпіад діофантові рівняння:  $x + y = xy$ ,

$x^2 - y^2 = 2017$ ,  $x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$  та багато інших. Цю ідею можна покласти в основу конструювання нових діофантових рівнянь, підставляючи замість  $A$ ,  $B$ ,  $C$  вдало підібрані вирази.

Вказана ідея простежується і при розв'язуванні складніших рівнянь, але повне розв'язання таких задач нерідко вимагає додаткових міркувань, наприклад тих, які пов'язані з можливими остачами при діленні на певне число. Наприклад, наступні два діофантові рівняння розв'язуються, зокрема, з допомогою вказаної ідеї.

**Задача 5 [1].** Розв'язати рівняння в цілих числах:  $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$ .

**Задача 6.** Знайти усі пари цілих чисел  $(a, b)$ , для яких число  $7^a + 9^b$  є квадратом цілого числа.

Першим кроком в розв'язанні запропонованих задач є подання їх у вигляді  $(n-1)(n+1) = 3 \cdot 2^m$  та  $(k-3^b)(k+3^b) = 7^a$ . Подальші міркування базуватимуться на розгляді різних випадків того, якими можуть бути множники в лівих частинах цих рівнянь.

Джерелом до складання нових задач може послужити формула розкладу на множники  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ . (1)

**Задача 7.** Знайдіть усі пари цілих чисел  $(x, y)$ , які задовольняють рівняння

$$x^3 + y^3 + 1000 = 30xy.$$

*Ідея розв'язання.* Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$x^3 + y^3 + 10^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 10 = 0,$$

$$(x + y + 10)(x^2 + y^2 + 10^2 - xy - 10x - 10y) = 0,$$

$$(x + y + 10) \left( \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x - 10)^2 + \frac{1}{2}(y - 10)^2 \right) = 0.$$

*Відповідь.*  $\{(x, -10 - x) : x \in \mathbb{Z}\}, (10, 10)$ .

Цю задачу можна модифікувати і сформулювати дещо по іншому.

**Задача 8.** Скільки існує пар  $(x, y)$  натуральних чисел, для яких виконується рівність  $x^3 + y^3 + 30xy = 1000$ ?

*Відповідь.* 12.

З формули (1) легко отримати наслідок, що якщо сума трьох чисел дорівнює нулю, то сума їхніх кубів дорівнює потроєному добутку цих чисел. Це спостереження може слугувати джерелом для деяких нових задач.

**Задача 9 [4].** Скільки розв'язків у цілих числах має рівняння

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30?$$

*Розв'язання.* Оскільки  $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ , то

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x). \text{ Маємо:}$$

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 10.$$

Оскільки  $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 = (-1) \cdot (-2) \cdot 5 = (-1) \cdot 2 \cdot (-5) = 1 \cdot (-2) \cdot (-5)$ , то число 10 не може бути подано у вигляді добутку трьох чисел, сума яких дорівнює 0.

### Література

1. Сарана О.А. Математичні олімпіади : просте і складне поруч / О.А. Сарана. – К. : Вид-во АСК., 2004. – 344 с.
2. Шаповалов А.В. Как готовиться к математическим боям. 400 задач Турниров имени А. П. Савина / А.В. Шаповалов, Л.Э. Медников. – М. : МЦНМО, 2014. – 254 с.
3. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв'язування / В.А. Ясінський. – К. : Шк. світ, 2011. – 128 с.
4. Ясінський В.А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В.А. Ясінський, О.Б. Панасенко. – Вінниця : Середняк Т.К., 2015. – 272 с.

***Анотація.** У статті розглянуто деякі підходи до конструювання і розв'язування задач з теорії чисел, які базуються на ідеї розкладу многочленів на множники.*

***Ключові слова:** теорія чисел, олімпіадні задачі з математики.*

***Summary.** In this paper we discuss some approaches to creating and solving problems in number theory, which based on the idea of factorizing a polynomial.*

***Keywords:** number theory, math olympiad problems.*



## **ПРИЙОМИ КОНСТРУЮВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У НАВЧАННІ**

**Вступ.** Нині вивчення теми «Комбінаторика» є важливою складовою у підготовці майбутніх фахівців різних галузей. В шкільній програмі з математики для вивчення вказаної теми виділено небагато годин. Ускладнює досягнення мети навчання нестандартність більшості комбінаторних задач, які потребують використання більш творчого способу мислення. Тому в багатьох учнів, особливо старших класів, в яких сформовано здебільшого алгоритмічний спосіб мислення, виникають труднощі в процесі розв'язування задач із комбінаторики.

Одним із підходів вирішення вказаної проблеми є формування в учнів спеціальних прийомів комбінаторної діяльності за допомогою організації навчання із формулами комбінаторики. Усі комбінаторні задачі можна умовно поділити на групи:

1. Впорядкований вибір декількох елементів з однієї множини:
  - а) з повторенням;
  - б) без повторення.
2. Перестановки:
  - а) різних елементів;
  - б) елементів, серед яких є й однакові.
3. Невпорядкований вибір декількох елементів з однієї множини:
  - а) з повторенням;
  - б) без повторення.
4. Розбиття елементів на групи:
  - а) якщо елементи різні, а порядок груп несуттєвий;
  - б) якщо елементи різні, а порядок груп суттєвий;
  - в) якщо елементи однакові, а порядок груп несуттєвий;

г) якщо елементи однакові, а порядок груп суттєвий.[1, с.56]

Цей підхід є досить зручним для розв'язування типових комбінаторних задач шкільного курсу математики, але він не є ефективним під час розв'язування задач підвищеної складності, не кажучи вже про завдання математичних олімпіад. Ще одним недоліком вказаного підходу є те, що для його ефективного використання необхідно сформулювати хороші практичні вміння, тобто розв'язати велику кількість задач із перелічених груп. Це потребує навчального часу, якого може не вистачити навіть, якщо врахувати гурткову роботу. Приклади вдалої системи комбінаторних вправ для позакласної роботи можна побачити в роботах [3], [5].

В цій статті буде йти мова про інший підхід у навчанні комбінаторики - за допомогою «задач-конструкторів». Тобто, вчитель має запропонувати задачі, кожна з яких має властивість: її можна розбити на декілька інших простіших комбінаторних задач. Цей підхід у навчанні розв'язування комбінаторних задач дає можливість охопити велику частину навчального матеріалу, має дослідницький характер, здатний розвивати творче і логічне мислення учнів.

**Мета даної статті.** Показати приклади конструювання комбінаторних задач та застосування задач «конструкторів» у процесі забезпечення умов для розвитку нестандартного мислення учнів.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо задачу:

*Відомо, що у футбольному матчі було забито  $n$  голів. Скажіть скільки існує «сценаріїв» розвитку подій цього матчу? (Під сценарієм розуміється послідовність забитих голів).*

Якщо учні не зможуть розв'язати вказану задачу, можна їм спочатку запропонувати розв'язати іншу, спрощену, задачу для конкретного значення  $n$  (наприклад  $n=5$ ). Способи підрахунку можуть бути абсолютно різні, що дає учням простір для різних міркувань і сприяє розвитку їхнього мислення.

В процесі розгляду випадків можна звернути увагу учнів на таку цікаву закономірність: рахунок 5:0 - 1 сценарій або  $C_5^0$ , 1:4 - 5 сценаріїв або  $C_5^1$ , 2:3 -

$10 = C_5^2$ . Ще можна помітити, що  $32 = 2^5$ . Тому результат можна записати у такому вигляді:  $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$ , що являє собою властивість біноміальних коефіцієнтів.

Отже, для  $n$  голів ми будемо мати  $2^n$  сценаріїв розвитку подій, що і є шуканим розв'язком для задачі.

«Задачі-конструктори» можна використовувати не тільки з метою спрощування, а й з метою ускладнення ситуації для досягнення навчальних цілей. Розглянемо ще одну задачу:

*Скільки всього можливих сценаріїв розвитку подій баскетбольного матчу з рахунком 8:13, якщо очки нараховувались тільки по 2 і по 3 за одне попадання у кошик?*

Дану задачу можна розв'язати використовуючи результати дослідження попередньої задачі. Для цього спочатку потрібно розв'язати рівняння для цілих невід'ємних значень:

$$2x + 3y = 8 \quad (1), \quad 2x + 3y = 13 \quad (2)$$

Отримаємо такі пари чисел (4;0), (1;2) для (1) і (2;3), (5;1) для (2). Цим ми перейшли від кількості зароблених очок до забитих у кошик м'ячів. Наприклад, (4;0) і (2;3) означає, що перша команда набрала 8 очок закинувши у кошик 2 м'ячі по 2 очки, а друга команда набрала 13 очок - 2 м'ячі по 2 очки і 3 м'ячі по 3 очки. Отже, перша команда закинула в кошик 4 м'ячі, а друга - 5. Перша команда змогла це зробити  $C_9^4$  способами, друга  $C_5^2 C_3^3 = C_5^2$ . Розмірковуючи аналогічно для випадків (4;0) і (5;1), (1;2) і (2;3), (1;2) і (5;1) маємо:

$$C_9^4 C_5^2 + C_{10}^4 C_6^5 + C_8^1 C_7^2 C_5^2 + C_9^1 C_8^2 C_6^5 = 5712$$

Відповідь. 5712 сценаріїв.

**Висновки.** Розглянуті у статті задачі призначенні для учнів з різними рівнями навчальних досягнень, оскільки їх можна як завгодно ускладнювати або спрощувати, а тому є корисними для всіх учнів, які вивчають комбінаторику. Конструювання подібних задач допомагає в організації диференційованого навчання, адже всі учні в цьому разі можуть розв'язувати

одні ті ж задачі, але з різним рівнем складності і тим самим глибше і ширше розуміти навчальний матеріал. Також такі види задач зручно використовувати у підготовці уроку однієї задачі.

### **Література**

1. Бродський Я. С. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі / Я. С. Бродський, О. С. Павлов. - Х.: Вид. група «Основа», 2008. - 207 с.
2. Виленкин Н. М. Комбинаторика / Н. М. Виленкин. - М., 1969 г. – 323 с.
3. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Интеберг, Д. В. Фомин. - Киров.: «АСА», 1994. - 272 с.
4. Істер О. С. Комбінаторика, біном Ньютона і теорія ймовірностей у школі / О. С. Істер: Навчальний посібник. 4-е вид. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. - 196 с.
5. Крижановский А. Ф. Математические кружки. 5-7 классы. / А. Ф. Крижановский. - М.:ИЛЕКСА, 2016. - 320 с.

**Анотація.** У статті сконструйовані та проаналізовані задачі із комбінаторики для учнів із різними рівнями навчальних досягнень. Розглянуті у статті комбінаторні задачі охоплюють велику частину навчального матеріалу, мають дослідницький характер, здатні розвивати творче і логічне мислення учнів.

**Ключові слова:** комбінаторне мислення, математична модель, конструювання задач.

**Summary.** The article is designed and analyzed the problem of combinatorics for students with different levels of educational achievement. Considered in article combinatorial problem covering most of the training material, are exploratory, creative and able to develop logical thinking of students.

**Keywords:** combinatorial thinking, mathematical model, design problems.

## 1.2. КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

---

*Артемчук Олена Романівна, Мороз Микола Петрович*  
*Національний педагогічний університет*  
*імені М. П. Драгоманова, студенти 3 курсу*

### КУБІЧНИЙ ТЕТРАЕДР ЯК ПРИВІД ДЛЯ ПОШУКІВ

*З повагою та вдячністю до*  
*Ісаака Аркадійовича Кушніра*

Для учнів та вчителів під час вивчення ключових тем як алгебри, так і геометрії, надзвичайно цінними є підбірки аналогічних, проте, різних за змістом та складністю задач, які допомагають оволодіти основними навичками. У стереометрії такою системою задач є “Атлас кубічних пірамід” Ісаака Аркадійовича Кушніра. Вперше “Атлас...” з’явився на сторінках журналів “У світі математики” та “Математика в школах України” в 2011 році, а в 2012 році він вийшов у повному обсязі учбовим посібником у видавництві МЦНМО.

“Атлас кубічних пірамід” є унікальною добіркою близько 50 повністю розібраних та проілюстрованих задач, розв’язання яких не тільки допомагає легко та цікаво засвоїти базовий матеріал стереометрії, а й дозволяє “підтримувати форму” протягом всього вивчення курсу геометрії в старших класах.

**Суть задач.** Розглядається куб, на якому зафіксовано наступні точки: вершини куба, середини його ребер, центри симетрії граней, а також центр самого куба. Серед цих точок обираються довільні чотири, які будуть вершинами новоутвореного тетраедра. У цьому тетраедрі необхідно провести чотири висоти та визначити, куди потрапляють їхні основи.

В кожному кубічному тетраедрі є як “прості” висоти, так і досить “складні”. Серед них одна чи дві будуються очевидно (це можуть бути ребра тетраедра або ребра базисного куба), а для побудови інших потрібно застосовувати теоретичні відомості та виконувати додаткові побудови.

Для розв'язання задачі знадобляться ознаки паралельності прямої та площини, паралельності двох площин, перпендикулярності прямої та площини, перпендикулярності двох площин, властивості прямокутного тетраедра тощо. При цьому, часто доведеться виконувати додаткові побудови як в площинах граней тетраедра, так і в просторі.

Ефективним прийомом розв'язання задачі є побудова прямокутного тетраедра на базі даного. Прямокутним тетраедром називається такий тетраедр, в якого при одній з вершин всі три плоских кута є прямими. При цьому, новий тетраедр будується таким чином, щоб з даним він мав спільну вершину, з якої проводиться висота, й спільну площину основи, на яку ця висота опускається. Теоретичною базою цього прийому є той факт, що у прямокутному тетраедрі основа висоти, яка опущена з вершини, при якій всі плоскі кути прямі, є ортоцентром протилежної грані.

Розглянемо один тетраедр, який не тільки корисний для розвитку просторової уяви, а й дасть поштовх для дослідження цікавої геометричної ситуації.

Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Розглянемо тетраедр  $B_1 TCD$ , де точка  $T$  – середина ребра  $CC_1$ . Побудуємо його висоти:

1. Із вершини  $D$  на грань  $B_1 TC$  висотою є ребро  $DC$ , оскільки пряма  $DC$  перпендикулярна до площини  $BB_1 C_1 C$ , в якій лежить грань  $B_1 CT$ .

2. Із вершини  $B_1$  на грань  $DTC$  висотою є відрізок  $B_1 C_1$ , оскільки пряма  $B_1 C_1$  перпендикулярна до площини  $DCC_1 D_1$ , в якій лежить грань  $DTC$ .

3. Із вершини  $T$  на грань  $B_1 DC$  висотою є відрізок  $TK$ , де точка  $K$  – основа перпендикуляра, опущеного з точки  $T$  на пряму  $B_1 C$ . Оскільки грані  $B_1 CT$  та  $B_1 CD$  перпендикулярні, то висота, проведена з точки  $T$  на площину  $B_1 CD$  лежатиме в площині  $B_1 CT$ , а її основа належатиме лінії перетину цих двох площин – прямій  $B_1 C$ .

4. Для побудови висоти, проведеної з вершини  $C$ , необхідно на базі даного тетраедра побудувати прямокутний. Це можна зробити двома способами.

*I спосіб.* Розглянемо тетраедр  $CDTE$ , де  $E$  – точка перетину прямих  $B_1T$  та  $BC$  (рис. 1). В ньому при вершині  $C$  всі плоскі кути є прямими, а тому він є прямокутним. Зрозуміло, що грань  $DTE$  лежить в тій самій площині, що й грань  $B_1DT$  в даному тетраедрі, а тому ці тетраедри мають одну й ту ж висоту. Але тетраедр  $CDTE$  є прямокутним, а тому основа висоти, проведеної з вершини  $C$  на грань  $DTE$  потрапляє в ортоцентр трикутника  $DTE$ .

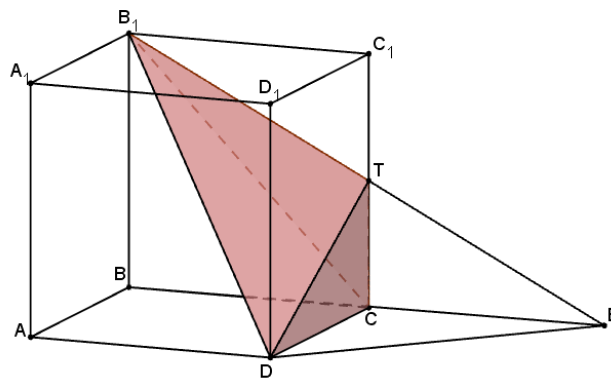


Рис. 1. Ілюстрація до I способу побудови висоти

*II спосіб.* Розглянемо тетраедр  $CDB_1F$  (рис.2), де  $F$  – точка перетину прямої  $B_1T$  з прямою, що симетрична прямій  $B_1C$  відносно прямої  $C_1C$ . Нескладно побачити, що кут  $B_1CF$  – прямий.

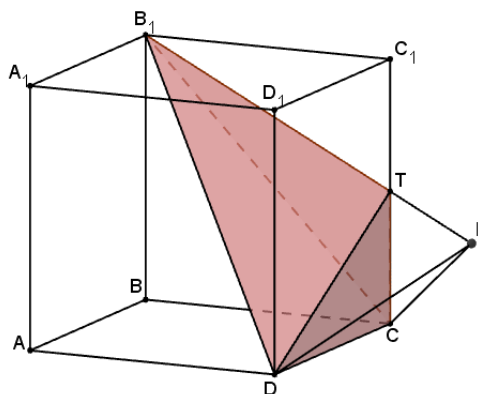


Рис. 2. Ілюстрація до II способу побудови висоти

Оскільки при вершині  $C$  всі три плоскі кути є прямими, то основа висоти, проведеної з точки  $C$  на грань  $DB_1F$  потрапляє в ортоцентр трикутника  $DB_1F$ .

**Несподівана ситуація:** було побудовано різні трикутники в площині

$B_1DT$ , для кожного з яких основа висоти тетраедра  $B_1TCD$ , проведена з точки  $C$ , є їхнім ортоцентром. При цьому вони мають спільну вершину  $C$ , протилежні їй сторони лежать на одній прямій, а в об'єднанні ці трикутники утворюють прямокутний трикутник  $B_1DE$ .

Уважне споглядання цієї конструкції підводить нас до наступного узагальнюючого запитання.

На гіпотенузі  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  обрали точки  $K$  та  $N$ . Які умови мають виконуватися, щоб ортоцентр  $H_{BCK}$  трикутника  $BCK$  співпадав з ортоцентром  $H_{ACN}$  трикутника  $ACN$ ? Виявляється, має місце

**Теорема.** Нехай дано  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . На гіпотенузі  $AB$  обрали точки  $K$  та  $N$ . Тоді ортоцентр  $H_{BCK}$  трикутника  $BCK$  співпадає з ортоцентром  $H_{ACN}$  трикутника  $ACN$  тоді і лише тоді, коли  $\frac{BN}{AK} = \tan^2 A$ .

Почалися ці пошуки саме з двох способів проведення висоти з вершини  $C$  в кубічному тетраедрі  $B_1TCD$ . Вкотре маємо нагоду впевнитися, що ніколи не завадить розв'язати задачу кількома способами. Результат неодмінно порадує, а може й здивує.

Дана теорема була віднайдена та запропонована авторами даної доповіді в якості задачі на XIX Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М. Й. Ядренка. Над її доведенням пропонуємо подумати читачам самостійно. Для цього варто буде пригадати кілька властивостей ортоцентра.

#### Література

1. Кушнір И. А. Атлас кубических пирамид. Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2012. – 72 с.

**Анотація.** В даній доповіді наводиться опис оригінальної концепції збірника стереометричних задач “Атлас кубічних пірамід” відомого вітчизняного педагога І. А. Кушніра. Наводиться приклад одного з кубічних тетраедрів, який породжує геометричну ситуацію, дослідження якої було предметом задачі XIX ТЮМу.

**Ключові слова:** кубічний тетраедр, прямокутний тетраедр, ортоцентр, Атлас кубічних пірамід.

**Annotation.** In this article we introduced original conception of digest of stereometric problems calls “The Atlas of cubical pyramids”, written by well-known Ukrainian educator Isaac Kushnir. We gave an example of one of the cubical tetrahedron, which led to geometrical situation, which was proposed to solve as a problem on XIX The Over-Ukrainian Tournament of Young Mathematicians.

**Keywords:** cubical tetrahedron, rectangular tetrahedron, orthocenter, “The Atlas of cubical pyramids”.



## ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КУБІЧНИХ ТЕТРАЕДРІВ ЯК ДЖЕРЕЛО НОВИХ ЗАДАЧ

Вивчення властивостей специфічних типів многогранників – це той тип дослідницьких задач, якими учитель може захопити учнів при навчанні стереометрії. Найпростішим многогранником є тетраедр. В літературі виділяють чимало типів тетраедрів, зокрема правильний, ортоцентричний, рівногранний, прямокутний, каркасний та ін. [3] Аналізуючи джерела [1,2], ми виявили такий досить широкий для дослідження об'єкт, як «кубічний тетраедр». *Мета даної роботи* – створити широкий спектр різнорівневих задач, пов'язаних із властивостями кубічних тетраедрів, розкрити схему розв'язування кубічних тетраедрів, проілюструвати її на одному прикладі.

Розглянемо куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 1).

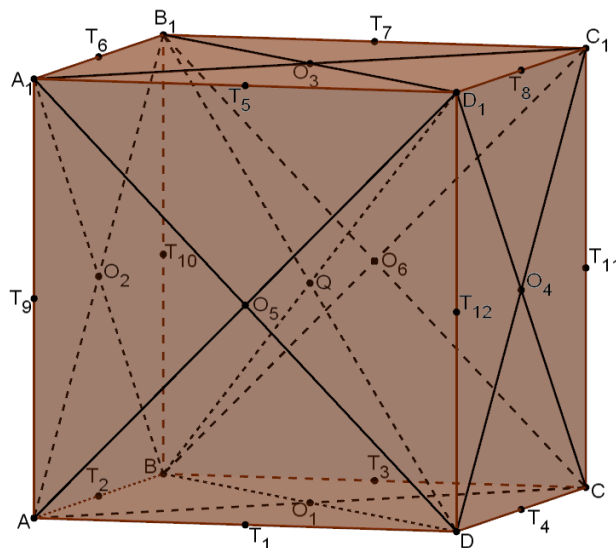
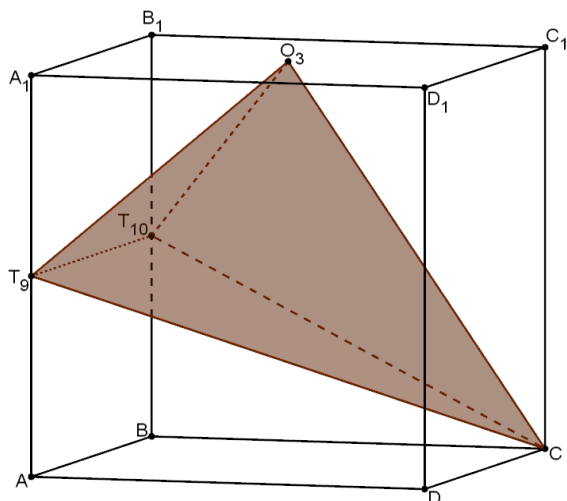


Рис. 1

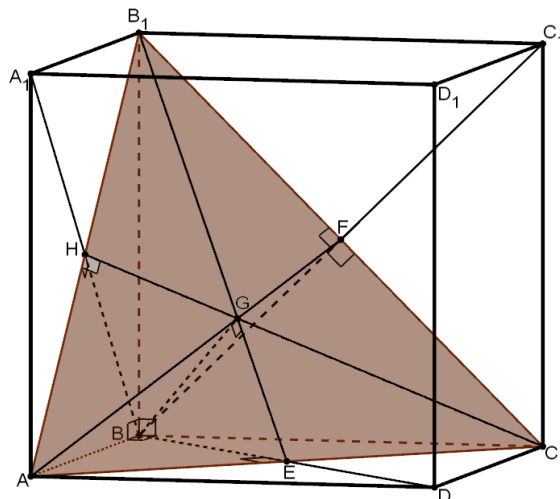
*Серединами* куба називатимемо середини його ребер  $(T_1, T_2, \dots, T_{12})$ , центри симетрії граней куба  $(O_1, O_2, \dots, O_6)$  і центр симетрії куба  $(Q)$ , як показано на рис. 1.

Означення. Тетраедр, вершинами якого є середини куба або самі його вершини називається **кубічним тетраедром**. Наприклад, на *рис. 2* зображено кубічний тетраедр  $O_3CT_9T_{10}$ .

*Рис. 2*



*Рис. 3*



Розв'язати кубічний тетраедр означає наступне: знаючи довжину ребра куба, знайти довжини *ребер* і *висот* цього тетраедра, *плоскі кути при вершинах*, *відстані* та *кути між мимобіжними ребрами* та *двогранні кути при ребрах*, *повну площу його поверхні* та *об'єм*.

1. *Довжини його ребер.* Зазвичай довжини ребер знаходяться за допомогою побудови проєкцій на грані куба, використовуючи теорему Піфагора для відповідних прямокутних трикутників.
2. *Довжини його висот.* Знаходження довжин кожної з чотирьох висот, опущених з вершин тетраедра на протилежні його грані виконується трішки важче, так як у деяких випадках проблеми виникають уже при їх побудові (буває досить важко знаходити основу висоти).
3. *Плоскі кути при вершинах.* Будь-який плоский кут при вершині тетраедра обов'язково обчислюється за теоремою косинусів з трикутної грані, площині якої він належить.
4. *Відстані між мимобіжними ребрами.* Побудувавши спільні перпендикуляри для кожної пари мимобіжних ребер, потрібно знайти їх довжини. Це завдання належить до класу найбільш складних.

5. *Кути між мимобіжними ребрами.* Для знаходження цих величин нам треба шляхом паралельного перенесення перетнути у певній, зручній для нас площині, дві прямих, яким належать ці ребра і знайти кут уже між прямими, які перетинаються.
6. *Двогранні кути при ребрах.* Двогранний кут – це частина простору, обмежена двома гранями тетраедра, що мають спільне ребро. Перерізом двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра є кут. Цей кут і буде шуканим.
7. *Повну площу його поверхні та об'єм.* Повна площа поверхні тетраедра – це сума площ чотирьох трикутників, які є його гранями. Знаючи довжини всіх ребер тетраедра ми можемо знайти площу кожної з граней, навіть, за формулою Герона. Зрозуміло, що об'єм теж завжди можна обчислити, використовуючи, обчислені вище, величини.

Розглянемо, наприклад, простий тетраедр  $B_1ABC$  (рис. 3) з вершинами у чотирьох вершинах куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  та розв'яжемо його. Нехай  $a$  – ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тоді:

I. Ребра тетраедра:  $AB = BC = BB_1 = a$ ,  $AC = AB_1 = B_1C = a\sqrt{2}$ .

II. Висоти тетраедра:

а) З вершини  $B_1$  на грань  $(ABC)$ :  $BB_1 \perp (ABC)$ .  $BB_1 = a$  – висота з  $B_1$ .

б) З вершини  $A$  на грань  $(BB_1C)$ :  $AB \perp (BB_1C)$ .  $AB = a$  – висота з  $A$ .

в) З вершини  $B$  на грань  $(AB_1C)$ : За теоремою про медіани з  $\triangle AB_1C$ :

$$B_1G : GE = 2 : 1 \Leftrightarrow B_1E : B_1G = 3 : 2. \quad (1)$$

За теоремою Піфагора з  $\triangle BB_1E$ :  $B_1E = \sqrt{BB_1^2 + BE^2}$ , так як  $BE = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , то:

$$B_1E = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ З рівності (1): } B_1G = \frac{2B_1E}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

За теоремою Піфагора з  $\triangle BB_1G$ :  $BG = \sqrt{BB_1^2 - B_1G^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

2) З вершини **C** на грань (**ABB<sub>1</sub>**):  $BC \perp (ABB_1)$ . Тому  $BC = a$  – висота.

III. Плоскі кути при вершинах тетраедра:

а) При вершині **B<sub>1</sub>**:  $\angle AB_1B = 45^\circ$ ,  $\angle BB_1C = 45^\circ$ ,  $\angle AB_1C = 60^\circ$ .

б) При вершині **A**:  $\angle B_1AB = 45^\circ$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $\angle B_1AC = 60^\circ$ .

в) При вершині **B**:  $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle ABC = 90^\circ$ .

г) При вершині **C**:  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $\angle BCB_1 = 45^\circ$ ,  $\angle ACB_1 = 60^\circ$ .

IV. Відстані між мимобіжними ребрами тетраедра:

а) між **AB** та **B<sub>1</sub>C**: З вершини **B** тетраедра проведемо  $BC_1 \perp B_1C$ , де  $BC_1 \cap B_1C = F$ . Тобто  $BF \perp B_1C$ . Очевидно, що  $BF \perp AB$ , бо  $AB \perp (BB_1C)$ , а  $BF \in (BB_1C)$ . Тому  $BF$  – шуканий спільний перпендикуляр.  $BF = \frac{BC_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

б) між **BC** та **AB<sub>1</sub>**:  $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Доведення аналогічне, випадку а).

в) між **AC** та **B<sub>1</sub>B**:  $BE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Доведення аналогічне, випадку а).

V. Кути між мимобіжними ребрами тетраедра:

а) кут **α** між **AB** та **B<sub>1</sub>C**:  $AB \perp (BB_1C_1) \Rightarrow AB \perp B_1C$ , тобто  $\alpha = 90^\circ$ .

б) кут **β** між **BC** та **AB<sub>1</sub>**:  $BC \perp (AA_1B_1) \Rightarrow BC \perp AB_1$ , тобто  $\beta = 90^\circ$ .

в) кут **γ** між **AC** та **B<sub>1</sub>B**:  $B_1B \perp (ABC) \Rightarrow B_1B \perp AC$ , тобто  $\gamma = 90^\circ$ .

VI. Двогранні кути тетраедра:

а)  $\varphi_1$  при ребрі **AB**:  $B_1B \perp AB$  і  $BC \perp AB$ . Звідки  $\varphi_1 = \angle B_1BC = 90^\circ$ .

б)  $\varphi_2$  при ребрі **BC**:  $B_1B \perp BC$  і  $AB \perp BC$ . Звідки  $\varphi_2 = \angle ABB_1 = 90^\circ$ .

в)  $\varphi_3$  при ребрі **AC**: Так як  $ABCD$  – квадрат, то точка **E** ділить його діагоналі навпіл. Тобто  $AE = EC$ . Відрізок  $B_1E$  тоді буде медіаною трикутника  $AB_1C$ , а оскільки цей трикутник рівносторонній, то і його висотою. Отже,  $B_1E \perp AC$ . Звідки  $\varphi_3 = \angle B_1EB$ . З  $\square BB_1E$ :  $\cos \angle B_1EB = \frac{BE}{B_1E}$ .

$$BE = \frac{a\sqrt{2}}{2}, B_1E = \sqrt{AB_1^2 - AE^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Тому маємо:  $\cos \angle B_1EB = \frac{BE}{B_1E} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Отже,  $\varphi_3 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

з)  $\varphi_4$  при ребрі  $B_1B$ :  $AB \perp B_1B$  і  $BC \perp B_1B$ . Звідки  $\varphi_4 = \angle ABC = 90^\circ$ .

д)  $\varphi_5$  при ребрі  $AB_1$ :  $\varphi_5 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Доведення аналогічне, випадку в).

е)  $\varphi_6$  при ребрі  $B_1C$ :  $\varphi_6 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Доведення аналогічне, випадку в).

VII. Площа повної поверхні та об'єм тетраедра: Площа поверхні:

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AB_1B} + S_{\triangle BB_1C} + S_{\triangle AB_1C} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} B_1E \cdot AC = \frac{3a^2}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Об'єм: } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot B_1B = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

### Література

1. Атлас кубічних пірамід / І. А. Кушнір // Бібліотека журналу «Математика в школах України» - Харків: «Основа», 2013. – Вип. 3 (123). – С. 5-9, 70-75.
2. Атлас кубічних пірамід / І. А. Кушнір // У світі математики. – Київ: «ТВіМС», 2011. – Т. 17, Вип. 4. – С. 9-20.
3. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2010. – С.108–143.

**Анотація.** Стаття присвячена вивченню властивостей кубічного тетраедру. Було розглянуто особливості побудови кубічних тетраедрів, пояснено алгоритм розв'язування кубічних тетраедрів та наведено приклад.

**Ключові слова:** тетраедр, кубічний тетраедр.

**Annotation.** This article is devoted to the study of such concepts as «cubic tetrahedron». During the investigation was be considered the features of construction cubic tetrahedrons and explained algorithm of their solution.

**Keywords:** tetrahedron, cubic tetrahedron.

## **МІСЦЕ І РОЛЬ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ**

Важлива умова вдосконалення викладання математики за Державним стандартом базової та повної загальної освіти – посилення її практичної і прикладної спрямованості вивчення як теоретичного матеріалу, так і особливо системи задач.

Важливу роль у вирішенні даної проблеми та підвищенні ефективності шкільної математичної освіти відіграє вироблення в учнів практичних умінь і навичок, зокрема геометричного характеру. Практичне спрямування шкільного курсу геометрії передбачає формування в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення як самої геометрії, так і інших дисциплін, а також в повсякденному житті.

Одним із ефективних засобів реалізації практичної спрямованості на уроках геометрії є розв'язування практичних задач. Використання практичних завдань на уроках математики допомагає вирішити такі дидактичні цілі [2]:

- мотивація сприйняття нових математичних понять;
- ілюстрація навчального матеріалу;
- закріплення і поглиблення знань з предмета;
- формування практичних умінь і навичок.

Пропонуючи розв'язати задачі практичного характеру, вчитель повинен показати учням, що математичні знання, скільки б вони не були абстрактними, своїм корінням входять у практичну діяльність.

Використання задач практичного змісту на уроках геометрії має бути досить продуманим. Практичні задачі, як і будь-які навчальні завдання, добираються відповідно до дидактичної мети уроку, формуються в доступній формі, чітко і стисло. Дані і шукані величини мають відповідати реальним кількісним відношенням. Математичний зміст їх визначається програмою і

підручником, а практична цінність – тією інформацією про виробничу діяльність людей, що її дістають учні, розв'язуючи ці задачі [3].

Так, наприклад, під час вивчення у 7 класі теми «Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса кута» з метою закріплення теоретичних знань, варто запропонувати учням виконати наступне практичне завдання: *«Накресліть трикутник:*

- 1) *гострокутний;*
- 2) *прямокутний;*
- 3) *тупокутний.*

*Проведіть із кожної вершини трикутника висоту» [4].*

З метою формування практичних умінь і навичок використання набутих теоретичних знань, варто пропонувати учням для розв'язування задачі, які зустрічаються їм в повсякденному житті. Наприклад, у 8 класі під час вивчення теми «Многокутники та їх площі» доцільно, наприклад, розглянути практичну задачу: *«Визначте, скільки рулонів шпалер потрібно придбати, щоб обклеїти ними вашу кімнату. Довжина рулону 10 м, ширина: а) 0,5 м; б) 1 м.» [1].*

Під час вивчення теореми Піфагора вартою уваги є задача: *«Діаметр колоди дорівнює 12 см. Чи можна з цієї колоди витесати квадратний брус із ребром: а) 10 см; б) 8 см? (рис. 1)».*

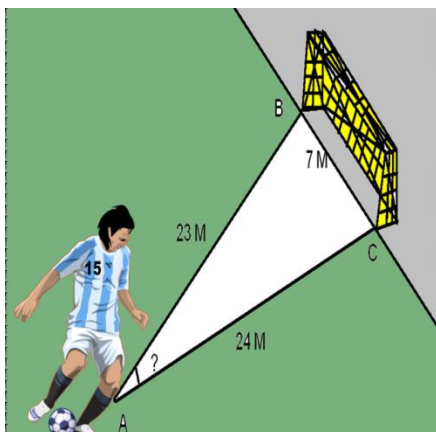
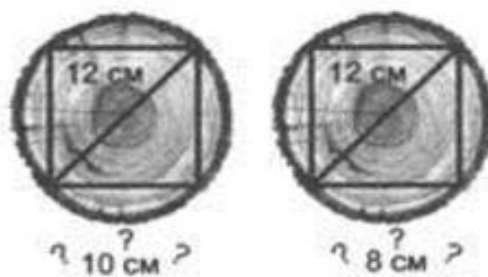


Рис. 1

У 9 класі під час вивчення теми «Розв'язування трикутників» можна запропонувати наступну задачу: *«Футбольний м'яч знаходиться в точці А футбольного поля на*

відстані 23м і 24м від точок В та С відповідно. Футболіст направив м'яч у ворота. Знайдіть кут влучання м'яча у ворота, якщо ширина воріт 7м.»

Розв'язуючи такі задачі, учні не тільки засвоюють найважливіші математичні поняття, опановують математичну символіку і т. д., але й відчують взаємозв'язок теорії з практикою, усвідомлюють значущість і необхідність вивчення теми, набувають навичок у розв'язанні проблемних ситуацій, що виникають у повсякденному житті. У процесі розв'язання таких задач в учнів розвивається логічне мислення, уява і уявлення, обчислювальні вміння і навички, а також наполегливість, увага, зосередженість.

Деякі задачі практичного змісту варто пропонувати учням для виконання вдома. Наприклад: *«Виріжте з цупкого паперу довільну трапецію і розріжте її на три частини так, щоб із них можна було скласти прямокутник і показати, що площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту»* [1].

Крім того, серед практичних задач слід виділити задачі без числових даних або задачі-запитання. У таких задачах чітко сформульовано запитання, але умова їх не повна, даних часто не вистачає або і зовсім немає. Наприклад: *«Як знайти діаметр дерева?»*, *«Як виміряти кут нахилу даху?»*, *«Знайти товщину аркуша паперу вашого підручника з математики»*, *«Як знайти об'єм сірника?»* тощо. Такі питання часто виникають у практичній діяльності людей і корисно знати, які дані потрібні для їх розв'язування, як їх визначити. До задач без числових даних можна віднести і задачі на побудову, і геометричні задачі на екстремуми *«Як з металевої пластинки, що має форму трикутника, вирізати квадрат найбільшої площі?»*, *«Як за допомогою лінійки побудувати кут  $60^\circ$ ?»*. Під час розв'язування таких задач учні проявляють кмітливість, у них розвиваються практичні вміння застосовувати набуті знання [5].

Отже, практичні задачі в процесі навчання математики сприяють кращому осмисленню теоретичного матеріалу, його запам'ятанню, активізації мислення та творчості думки учнів.



## Література

1. Бевз В.Г. Геометрія : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів 8 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 272 с.
2. Бондаренко Т. Практичні роботи на уроках математики. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://klass.ho.ua/index.php?job=100029>
3. Король Я.А. Формування практичних умінь і навичок на уроках математики / Я. А. Король. – Тернопіль: «Навчальна книга – Богдан», 2000. – 136 с.
4. Мерзляк А.Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2015. – 224 с.
5. Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: [http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja\\_zhittevikh\\_vmin\\_ta\\_navichok\\_uchniv\\_na\\_urokakh\\_matematiki\\_shljakhom\\_vikoristannja\\_prikladnikh\\_zadach/1-1-0-1](http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urokakh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1)

**Анотація.** В статті висвітлено доцільність розв'язування практичних задач на уроках геометрії. Наведено конкретні приклади практичних задач, розв'язування яких варте уваги.

**Ключові слова:** практична спрямованість, геометрія, практичні задачі.

**Abstract.** In the article the expediency of solving practical problems in geometry lessons. An specific examples of practical problems, solving them worthwhile.

**Keywords:** practical orientation, geometry, practical problem.

## РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧА ОДНА – СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗАННЯ РІЗНІ

### 2.1. РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ

---

***Бондарчук Вікторія Сергіївна***

*Вінницький державний педагогічний університет  
імені. Михайла Коцюбинського, студентка 4 курсу*

#### **РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ**

**Вступ.** Текстові задачі відіграють важливу роль у курсі алгебри основної школи. Вони є дидактичним засобом навчання, виховання та розвитку школярів; а також складають специфічний розділ програми, зміст якого учні мають засвоїти.

**Метою статті є** розглянути деякі методичні особливості розв’язування задач на сумісну роботу, продемонструвати різні способи їх розв’язування.

**Виклад основного матеріалу.** Формування вміння учнів розв’язувати текстові задачі базується на системі математичних знань, виробленні вмінь і навичок математичного моделювання, обчислення, розвитку прийомів розумової діяльності (планування, пошук раціональних шляхів, критичність тощо).

Методисти умовно ділять текстові задачі на декілька типів. Лук’янова С.М. серед них виділяє такі основні, кожний з яких має певні загальні підходи у розв’язанні: задачі на сумісну роботу, задачі на сплави та суміші, задачі на рух. [2]

Існує думка серед методистів (В.А. Ярощук, А.Ф. Єсаулов, З.І. Калмикова, Н.О. Менчинська), що не слід типізувати текстові задачі та нав’язувати учням конкретну методику розв’язування задач того чи іншого типу. Так, кожен учень має право обирати той метод розв’язання, який він краще розуміє. Основним завданням вчителя є вказати шляхи, загальні підходи, надати учневі базові знання, прийоми, одним словом, - те, з чого той обиратиме.

Задачі на сумісну роботу мають свою специфіку розв'язання та зустрічаються в курсі математики з 6-го по 9-й клас. Починаючи з курсу математики 6 класу, після вивчення дій із звичайними дробами, знайомимо учнів з найпростішими задачами цього типу. У 7 класі подібні задачі зустрічаються серед задач на повторення. Простежується динаміка ускладнення задач на сумісну роботу у 8-му класі, для розв'язування яких використовують квадратні рівняння. У курсі алгебри 9-го класу подібні задачі розв'язуються за допомогою систем рівнянь. [1]

Задачі на сумісну роботу, як правило, мають таке формулювання: «Деяку роботу, об'єм якої може бути не вказано і не є шуканим (наприклад, друк рукопису, заповнення резервуара, обробка поля тощо) виконує декілька осіб або механізмів, що працюють рівномірно (тобто з постійною для кожного продуктивністю)».

В цих задачах об'єм всієї роботи, яку треба виконати, умовно приймається за одиницю. Час  $t$ , що необхідний для виконання всієї роботи, та  $v$  – продуктивність праці (швидкість), тобто кількість роботи, виконана за одиницю часу, пов'язані співвідношенням:  $v = \frac{1}{t}$ .

При розв'язуванні подібних задач іноді доцільно умову розписувати у вигляді таблиці:

Таблиця 1

|    | $t_{\text{окреми}}$ | $V_{\text{окрема}}$ | $V_{\text{сумісна}}$                             | $t_{\text{сумісн}}$  |
|----|---------------------|---------------------|--------------------------------------------------|----------------------|
| I  | $x$                 | $\frac{1}{x}$       | $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x \pm y}{xy}$ | $\frac{xy}{x \pm y}$ |
| II | $y$                 | $\frac{1}{y}$       |                                                  |                      |

*Пояснення:* У виконанні певної роботи беруть участь два об'єкти: I-й та II-й. Якщо I-й об'єкт виконує всю роботу за  $x$  годин (хвилин, секунд тощо) то за 1

годину він виконає  $\frac{1}{x}$  роботи – це є швидкість роботи І-го об'єкта. Аналогічно,

якщо ІІ-й виконує всю роботу за  $y$  годин, то його швидкість –  $\frac{1}{y}$  роб/год.

Алгоритм знаходження сумісної швидкості роботи двох об'єктів:

- додати їхні окремі швидкості, якщо об'єкти допомагають один одному виконувати роботу;
- відняти, якщо заважають.

Для знаходження часу, за який два об'єкти впораються з роботою разом ( $t_{\text{сумісний}}$ ) необхідно об'єм виконаної роботи  $V$  поділити на їхню сумісну

швидкість  $v_{\text{сумісна}}$ . Якщо  $v=1$ , то  $1 \div \frac{x \pm y}{xy} = \frac{xy}{x \pm y}$ .

Зручність використання таблиці 1 полягає у тому, що в ході розв'язання тієї чи іншої задачі її можна застосовувати і повністю, і частково, заповнювати зліва направо, справа наліво, з обох кінців до середини в залежності від умови.

Однією із класичних задач даного типу вважається задача про басейн, що наповнюється або спустошується через дві труби. Саме з неї і варто починати знайомство школярів з цим типом задач. Головне – розуміння учнями процесу, що відбувається у задачі. Тому слід провести з учнями евристичну бесіду для розуміння динаміки процесу наповнення резервуара, коли працюють дві труби:

- а) обидві труби наповнюють басейн водою;
- б) одна – наповнює, через другу – спустошується.

Для кращого засвоєння задач типу знаходження сумісної роботи слід проілюструвати їх за допомогою наочності: малюнками, що зображають обговорюваний процес, слайдами відповідної тематичної презентації тощо.

Розглянемо задачі на спільну роботу, які зустрічаються в курсі математики 6 класу. У розв'язанні цих задач велику роль відіграють такі величини: частина всієї роботи, яку виконує робітник (бригада, машина) за одиницю часу; час, який було витрачено на роботу; частина роботи, яку було виконано.

Задача №1. Одна бригада може виконати певну роботу за 10 днів, друга — за 15 днів. За скільки днів обидві бригади, працюючи разом, виконають цю роботу? [3]

### Розв'язання

#### *1-й спосіб*

Перша бригада виконує роботу за 10 днів, тобто за 1 день вона виконує  $\frac{1}{10}$  роботи. Друга бригада виконує за 1 день  $\frac{1}{15}$  роботи. Це означає, що, працюючи разом, обидві бригади виконають  $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$  частину усієї роботи.  $1 \div \frac{1}{6} = 6$  (днів) — за такий час буде виконана вся робота.

Відповідь: вся робота буде виконана за 6 днів.

Зверніть увагу: оскільки ми розглядаємо частини роботи, немає сенсу говорити, що всю роботу приймаємо за 1.

Цю ж задачу ми можемо розв'язати за допомогою рівняння. Для розв'язування задач цим способом зручно користуватися таблицями. Але це є не обов'язковим.

#### *2-й спосіб*

Перша бригада виконує роботу за 10 днів, тобто за 1 день вона виконує  $\frac{1}{10}$  роботи. Друга бригада виконує за 1 день  $\frac{1}{15}$  роботи. Це означає, що, працюючи разом, обидві бригади виконають всю роботу за  $x$  днів:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{30},$$

Звідси маємо:  $5x = 30$ ,

$$x = 6.$$

6 днів необхідно двом бригадам, щоб впоратись з роботою.

Відповідь: 6 днів.

Задача №2. Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 годин, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 години їхньої спільної роботи

ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 години більше, ніж другій? [4]

### Розв'язання

#### 1-й спосіб

Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за  $\tilde{0}$  годин, тоді другій для цього потрібно  $(x - 4)$  годин. За 1 годину перша бригада ремонтує  $\frac{1}{x}$  частину дороги, а друга -  $\frac{1}{x-4}$  частину дороги. Перша бригада працювала 9 годин і відремонтувала  $\frac{9}{x}$  дороги, а друга бригада працювала 2 години і відремонтувала відповідно  $\frac{2}{x-4}$  дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то складемо рівняння:  $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$ .

Отримане рівняння має два корені – 12 і 3.

Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за  $3-4=-1$  (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 годин, а друга – за 8 годин.

Відповідь: 12 год, 8 год.

Покажемо ще один спосіб розв'язання задач на сумісну роботу на прикладі. Розв'яжемо задачу №2 за допомогою системи рівнянь.

#### 2-й спосіб

Позначимо час виконання роботи першою бригадою через  $x$  год, а другою – через  $y$  год.

Оскільки в умові сказано, що першій бригаді, щоб відремонтувати дорогу цього потрібно на 4 години більше, ніж другій, то:  $x - y = 4$ .

Це перше рівняння системи.

Перша бригада працювала 9 годин і відремонтувала  $\frac{9}{x}$  дороги, а друга бригада працювала 2 години і відремонтувала відповідно  $\frac{2}{y}$  дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то складемо рівняння:  $\frac{9}{x} + \frac{2}{y} = 1$ .

Розв'язавши систему рівнянь: 
$$\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{9}{x} + \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

отримаємо дві пари коренів – (8;12) і (3; -1). Друга пара коренів не задовольняє умову задачі, оскільки час виконання роботи не може бути від'ємним.

Отже, перша бригада виконала роботу за 12 год, а друга за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год.

**Висновок.** Для формування вмінь учнів розв'язувати задачі на сумісну роботу різними способами, важливо організовувати роботу таким чином, щоб домогтися поступового, покрокового розуміння учнями суті задач на сумісну роботу, зв'язку між такими величинами як об'єм роботи, час (окремий, сумісний) та швидкість виконання роботи (окрема, сумісна).

#### Література:

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977. – 376 с.
2. Лук'янова С.М. Типізація текстових задач в курсі математики 5-6 класів // Наукові записки: Збірник наукових статей НПУ імені М.П.Драгоманова / Укл. П.В.Дмитренко, Л.Л.Макаренко. – К.:НПУ, 2002. – Випуск 47. – С.134 – 138.
3. Мерзляк А.Г. Збірник задач з математики для 5-6 класів. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. -Харків, Гімназія, 2000. – 224 с.: іл..
4. Мерзляк А.Г. Алгебра. Підручник для 8 класу. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. – Харків, Гімназія, 2016. – 272 с.

***Анотація.** Розглянуто деякі методичні особливості вивчення методів і способів розв'язування задач на сумісну роботу в курсі алгебри основної школи.*

***Ключові слова:** текстові задачі, задачі на сумісну роботу, спосіб, алгоритм.*

## **ТОТОЖНІСТЬ ОДНА – СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ РІЗНІ**

Тотожні перетворення виразів являють собою одну із головних ліній шкільного курсу математики. На їх основі в учнів формується уява про аналітичні методи математики.

Моторіна В.Г. зазначає, що метою вивчення тотожних перетворень в середній школі є навчання учнів спрощувати вирази; доводити тотожності; зводити рівняння і нерівності до простішого вигляду; використовувати при розв’язуванні задач (і геометричних також) аналітичним методом.

Тотожне перетворення виразу – заміна цього виразу іншим, тотожно рівним йому. Перетворення будь-якого раціонального виразу можна звести до додавання, віднімання, множення та ділення раціональних дробів. Суму, різницю, добуток і частку раціональних дробів завжди можна подати у вигляді раціонального дробу. [1, с.29]

**Метою** статті є показати як за допомогою тотожних перетворень раціональних виразів можна довести тотожності різними способами.

Довести тотожність — означає встановити, що при всіх допустимих значеннях змінних його ліва і права частини являють собою тотожно рівні вирази.

Тотожності можна доводити різними способами:

- 1) виконати перетворення лівої частини і привести до правої частини;
- 2) виконати перетворення правої частини і привести до лівої частини;
- 3) окремо виконати праву і ліву частини і отримати і в першому, і в другому випадку один і той самий вираз;
- 4) скласти різницю лівої і правої частин і в результаті її перетворень отримати нуль. [1, с.30; 2, с.6]



Який спосіб вибрати - залежить від конкретного виду тотожності. Так як всі тотожності різні, до кожної з них потрібний індивідуальний підхід. Звісно, певні тотожності можна доводити одразу кількома способами, але наша задача знайти найзручніший, той спосіб, який буде найлегшим у застосуванні і який максимально скоротить час доведення.

Розглянемо приклад доведення тотожності різними способами:

Доведіть, що коли  $a + b + c = 0$ , то  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ . [3, с. 8]

Позначимо:  $a + b + c = 0$  (1),  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  (2).

Такий вид алгебраїчних виразів називають умовними тотожностями.

Умовна тотожність – алгебраїчна рівність, права і ліва частини якої тотожно рівні за умови виконання деякого співвідношення (можливо, не одного, а кількох). [2, с. 7]

I спосіб. З рівності (1) виразимо  $c$ :  $c = -a - b$ .

Перетворимо ліву частину рівності (2), так, щоб отримати праву:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + (-a - b)^3 = (a + b)(a^2 - ab - b^2) - (a + b)^3 \\ &= (a + b)(a^2 - ab - b^2 - (a + b)^2) = \\ &= (a + b)(a^2 - ab - b^2 - a^2 - 2ab - b^2) = (a + b)(-3ab) = \\ &= (-a - b)(3ab) \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $-a - b = c$ :  $(-a - b)(3ab) = 3abc$ . Що і потрібно було довести.

II спосіб. Спочатку піднесемо ліву частину рівності (1) до кубу:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)(a + b + c)^2 = \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = \\ &= a^3 + b^2a + c^2a + 2a^2b + 2abc + 2a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 \\ &\quad + 2b^2c + 2abc + a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + 2bc^2 + 2ac^2 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc) \end{aligned}$$

Отже,  $a^3 + b^3 + c^3 = -3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc)$  (3)

Далі з рівності (1) виразимо  $a, b, c$ :  $a = -b - c$ ,  $b = -a - c$ ,  $c = -a - b$ .

Перетворимо праву частину рівності (2), так, щоб отримати ліву:

$$3abc = 3(-b - c)(-a - c)(-a - b) = -3(b + c)(a + c)(a + b) = -3(bc + ab + c^2 + ac)(a + b) = -3(abc + a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + abc) = -3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc).$$

Отримали праву частину рівності (3).

Отже,  $3abc = a^3 + b^3 + c^3$ . Що і потрібно було довести.

III спосіб. Будемо паралельно перетворювати обидві частини рівності (2).

З рівності (1) виразимо  $c$ :  $c = -a - b$  та підставимо це значення:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + (-a - b)^3 &= 3ab(-a - b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab - b^2) - (a + b)^3 \\ &= -3a^2b - 3ab^2 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab - b^2 - (a + b)^2) \\ &= -3a^2b - 3ab^2 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab - b^2 - a^2 - 2ab - b^2) \\ &= -3a^2b - 3ab^2 \Leftrightarrow (a + b)(-3ab) = -3a^2b - 3ab^2. \\ &\Leftrightarrow -3a^2b - 3ab^2 = -3a^2b - 3ab^2 \end{aligned}$$

Отримали однакові вирази зліва і зправа, отже  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ . Що і потрібно було довести.

IV спосіб. Розглянемо різницю лівої і правої частини рівності  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  та з рівності (1) виразимо  $c$ :  $c = -a - b$ .

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + (-a - b)^3 - 3ab(-a - b) &= a^3 + b^3 - (a + b)^3 + 3ab(a + b) = \\ &= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3) + 3a^2b + 3ab^2 = \\ &= a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3b^2a - b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = 0 \end{aligned}$$

Різниця дорівнює нулю, отже  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ . Що і потрібно було довести.

У чомусь ці види доведень схожі, деś вони відрізняються. На якийсь потрібно витрати більше часу і сил, для якогось достатньо зробити кілька перетворень. Вибір способу доведення в першу чергу залежить від самого прикладу, але ви маєте обрати той варіант, який є для вас найзручнішим. Розв'язування задач різними способами сприяє розвитку творчого та аналітичного мислення учнів, дослідницьких навичок та пізнавального інтересу.

## Література

1. Істер О.С. Алгебра: Підруч. для 7 кл загальноосвіт. навч. закл. / Істер О.С. - К.:Освіта, 2007. - 223с.
2. Ізюмченко Л. В. Вирази та тотожні перетворення: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів. / Л. В. Ізюмченко, Л.І.Лутченко, В.В.Нічишина, Р.Я. Ріжняк / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 22с.
3. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. / Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. 3-е изд., перераб. и доп. - М.: АБФ, 1995.— 352 с.
4. Моторіна В.Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку. Навч. посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. / Моторіна В.Г. - Х.: фірма "РЦНІТ", 1998 - 160с.

**Анотація.** У даній статті наведено способи тотожних перетворень раціональних виразів та розглянуто доведення тотожностей різними способами.

**Ключові слова.** Тотожне перетворення виразу, раціональний вираз, доведення тотожності, тотожність, алгебраїчний вираз, умовна тотожність.

**Abstract.** This article describes how to identical transformations of rational expressions and considered proof of identities in different ways.

**Keywords.** Identity transformation expression, rational expression, proving identity, identity, algebraic expressions, conditional identity.

***Кіріченко Олена Ігорівна***

*Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
студентка магістратури*

## **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ НА ПОБУДОВУ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНИХ СЕРЕДОВИЩ**

Поняття функції – одне з основних математичних понять, у формуванні якого важливу роль відіграє наочність. Встановлення взаємозв'язків між властивостями функцій у аналітичній формі та їх геометричним представленням є необхідною умовою усвідомлення учнями цього поняття. Проте розв'язування завдань на побудову графіків функцій займає багато часу на уроці. Вирішенню цієї проблеми сприяє використання ІКТ під час вивчення теми, особливо на етапах перевірки домашнього завдання, актуалізації опорних знань чи підведення підсумків уроку. Також використання на уроках математики ІКТ дозволяє підвищити інтерес до теми, продовжити процес формування інформатичної культури, збільшити обсяг матеріалу, що вивчається, зробити більш продуктивною роботу вчителя та учня тощо.

У власній діяльності вчителя математики використовуємо середовище Microsoft Excel для розв'язування завдань на побудову графіків функцій. Наприклад, у 9 класі на уроці алгебри пропонуємо учням завдання «Дослідити та побудувати графік функції  $y = -x^2 + 3$ ». У ході бесіди аналізуємо кроки розв'язання завдання, обговорюємо, які геометричні перетворення слід виконати для побудови графіка функції. Середовище Microsoft Excel дає можливість покроково побудувати графіки функцій (рис. 1). Оскільки в MS Excel відсутня функція автоматичної побудови графіка, то слід визначити координати точок, за якими відбувається побудова графіка. Недоліки використання даного програмного забезпечення: відсутність автоматичної побудови. Переваги використання Microsoft Excel: покрокова побудова графіків функцій; наявність інформації щодо побудови: координати точок, обчислення;

кожен графік на діаграмі має свій колір; кожна ключова точка, яка бере участь у побудові графіка, надписана на діаграмі.

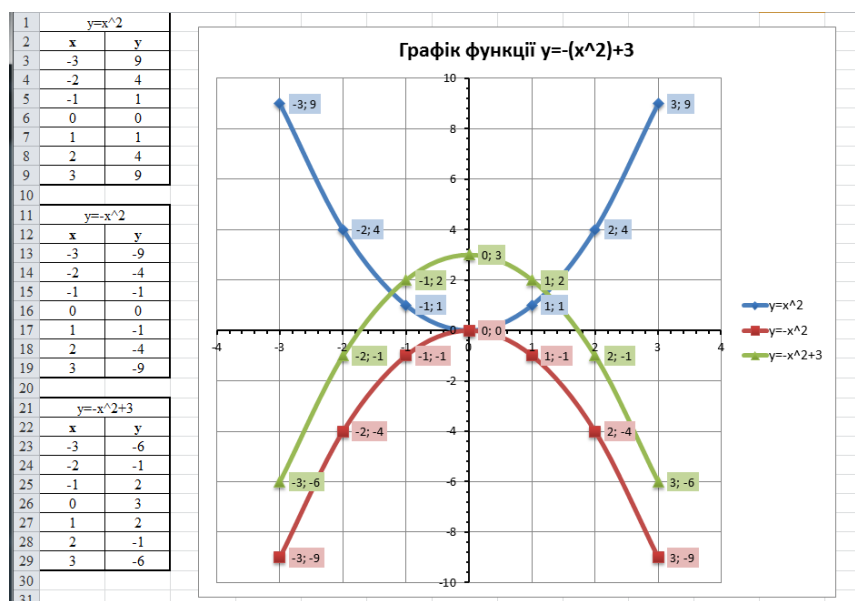


Рис. 1. Розв'язання завдання в середовищі Microsoft Excel

Отже, дана програма дає можливість докладніше показати учням, яким чином будується та покроково перетворюється графік функції, як знаходиться область значень та область визначення, чи є функція спадною або зростаючою. Також чітко видно геометричні перетворення графіків функцій.

**Анотація.** Ця робота присвячена можливості використання в процесі навчання побудови графіків функцій програмного середовища Microsoft Excel.

**Ключові слова:** побудова графіків функцій, програмне середовище, урок математики.

**Abstract.** This work is devoted to possibility of use in learning graphing functions of the software environment Microsoft Excel.

**Keywords:** software environment, math, graphing functions, software environment, a lesson in mathematics.

## **ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МІЖ СЕРЕДНІМИ ВЕЛИЧИНАМИ**

У процесі навчання математики дуже важливо, щоб учні сприймали математику як цілісну науку, у якій усі розділи взаємопов'язані, адже для глибокого розуміння розв'язання задачі учень повинен з'єднати різні розділи математики. Пошук учнями різних способів розв'язування однієї задачі – один із шляхів реалізації цієї мети, який ще й розвиває математичну творчість учнів. Визначаючи три основні властивості математичної творчості учня (і не тільки обдарованого): генерація ідей, гнучкість, новизна, Сільвер підкреслює, що розв'язання задач різними способами розвиває ці властивості. Він стверджує, що розвиток звички розв'язувати задачу різними способами піднімає математичне мислення на більш високий рівень [1].

Проте, зазвичай, у шкільних підручниках з математики задачі класифіковані за темами відповідно до навчальних програм, і саме тому багато учнів знають до якої теми належить задача і підбирають єдине розв'язання «під тему». Тому вчитель повинен прагнути навчити учнів розв'язувати задачі незалежно від прив'язки до того чи іншого параграфу у підручнику.

Розглянемо, для прикладу, нерівності між середніми величинами:

*Для довільних  $a > 0$  і  $b > 0$  є справедливим такий ланцюжок нерівностей:*

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ці нерівності містяться у підручнику [2], за яким навчаються класи із поглибленим вивченням математики. Там же цей ланцюжок нерівностей доведено відомими учням методами.

Зважаючи на те, що доведення нерівностей вважається задачами підвищеного рівня складності і вивчається переважно у класах з поглибленим

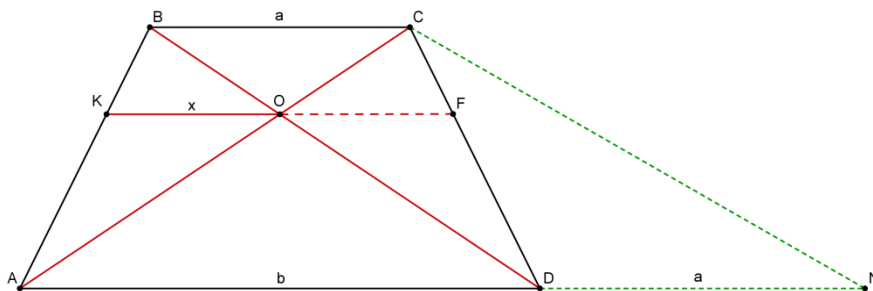
вивченням математики або на заняттях математичного гуртка, ми переконані, що саме у таких випадках доцільно навчати учнів іншим способом розв'язування одних і тих самих задач.

Розглянемо геометричне тлумачення нерівностей між середніми величинами, яке за програмою не розглядається, проте показує зв'язок алгебри із геометрією.

Нехай дано трапецію  $ABCD$  із основами  $BC = a$  і  $AD = b$ . Тоді маємо:

1. За теоремою про середню лінію трапеції відрізок  $MN$ , який паралельний основам і з'єднує середини бічних сторін трапеції, дорівнює *середньому арифметичному* основ:  $MN = \frac{a+b}{2}$ .

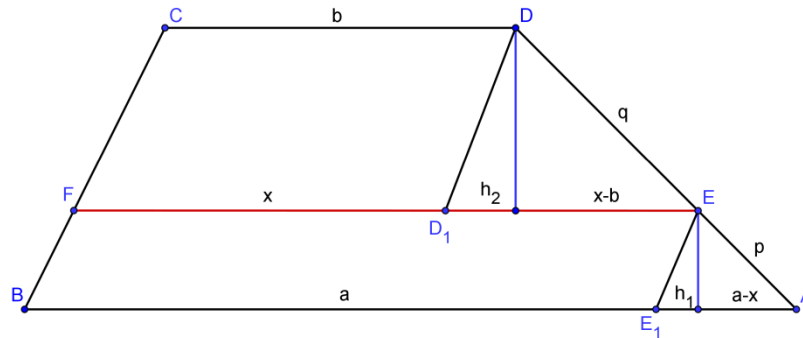
2. Відрізок  $KF$ , що проходить через точку перетину діагоналей паралельно основам, дорівнює *середньому гармонійному* основ  $KF = \frac{2ab}{a+b}$ .



Доведемо дану властивість. Нехай дана рівнобічна трапеція  $ABCD$ , де  $O$  – точка перетину діагоналей. На сторонах  $AB$  і  $CD$  взяті точки  $K, F$  так, що відрізок  $KF$  проходить через точку  $O$  і паралельний основам трапеції. Нехай  $KO = x$ . Виконаємо додаткову побудову: на продовженні сторони  $AD$  відкладемо відрізок  $DN$  так, що  $DN = BC$ . Розглянемо трикутники  $\triangle AOD$  і  $\triangle ACN$ . Вони подібні за двома кутами. Із подібності випливає рівність  $\frac{AO}{AC} = \frac{b}{a+b}$ . Трикутники  $\triangle ABC$  і  $\triangle AKO$  також подібні за двома кутами. Із цього маємо  $\frac{x}{a} = \frac{AO}{AC}$ . Із отриманих рівностей маємо  $\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$ , тобто  $x = \frac{ab}{a+b}$ .

Оскільки трапеція рівнобічна, то  $KO = KF$ , тобто  $KF = \frac{2ab}{a+b}$ .

3. Якщо у трапеції провести відрізок, що розбиває її на дві рівновеликі трапеції, то цей відрізок є *середнім квадратичним* основ:  $EF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .



Позначимо  $AE = p$ ,  $ED = q$ ,  $EF = x$ ,  $h_1$  і  $h_2$  - висоти рівновеликих трапецій.

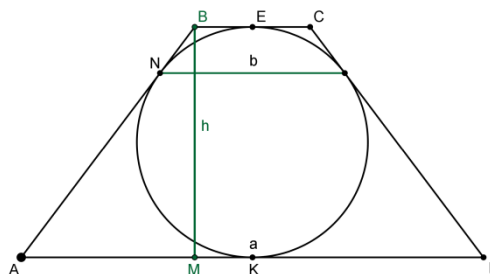
Тоді за формулою  $S_{mp} = \frac{h(a+b)}{2}$  маємо  $\frac{h_1(a+x)}{2} = \frac{h_2(b+x)}{2}$ ; звідки

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{x+b}{x+a}$  (\*). З подібності трикутників  $\triangle AEE_1$  і  $\triangle EDD_1$  випливає, що

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} = \frac{a-x}{x-b}$  (\*\*). Прирівнюючи праві частини рівностей (\*) і (\*\*) маємо:

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{x+b}{x+a}; \text{ звідки } x^2 - b^2 = a^2 + x^2, \text{ або } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

4. Висота рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, є *середнім геометричним* основ  $BM = \sqrt{ab}$ .



Доведемо,

це.

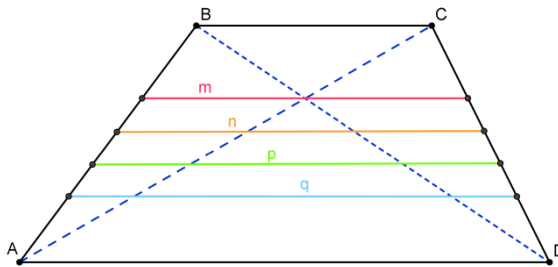
$$AM = \frac{a-b}{2},$$

$AN = AK = \frac{a}{2}$ ;  $BN = BE = \frac{b}{2}$ ;  $AB = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$ . За теоремою Піфагора



$$BM = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}; \text{ тобто } BM = \sqrt{ab}.$$

Таким чином в трапеції середні основ розташовані наступним чином:



де  $m$  – середнє гармонійне основ;  $n$  – середнє геометричне;  $p$  – середнє арифметичне;  $q$  – середнє квадратичне. Варто зауважити, що при довільних значеннях  $a$  і  $b$  послідовність цього розташування не змінюється.

Розв'язування математичних задач різними способами розвиває в учня багато важливих здібностей, у тому числі і вміння передбачувати результат і здібність розумно шукати правильний шлях розв'язання у заплутаній умові задачі. Таким чином, вчитель має навчити учня, щоб він, прочитавши умову задачі і ще не виконуючи ніяких дій, навчився бачити, який спосіб не придатний, а який може бути використаний. Таке вміння виробляється саме у процесі розв'язування однієї задачі різними способами.

### Література

1. Silver, E.A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing / E.A. Silver // ZDM. – 1997. – № 29 (3). – P. 75–80.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2009. – 382 с.

**Анотація:** Наведено геометричне тлумачення нерівностей між середніми величинами на основі трапеції.

**Ключові слова:** нерівності між середніми величинами, різні способи розв'язування однієї задачі, геометричне тлумачення.

**Annotations:** The geometric interpretation inequalities between average values based on the trapeze.

**Keywords:** inequality between the average values, different ways of solving a problem, geometric interpretation.

*Кузьменко Артем Миколайович*  
*Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,*  
*студент магістратури*

## **ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ**

Однією з найскладніших тем шкільного курсу алгебри та початків аналізу є «Тригонометричні рівняння». Учням досить важко обрати правильний спосіб розв'язання того чи іншого тригонометричного рівняння, учні допускають значну кількість помилок, тому важливо виконати ретельний аналіз кожної з них. Для цього доцільно застосовувати такі програмні засоби, як GRAN 1, GRAN 2D, DG, AGrapher, GeoGebra.

У процесі розв'язування тригонометричних рівнянь можуть виконуватись перетворення, що призводять до появи сторонніх коренів чи втрати коренів. У такому разі необхідно виконати відбір коренів тригонометричного рівняння, саме на цьому етапі учні допускають значну кількість помилок.

Наприклад, розглянемо тригонометричне рівняння  $\sin x - \cos x = 1$  [1]. Як показує досвід, учні частіше розв'язують його способом зведення до однієї тригонометричної функції, а не за допомогою формули синуса різниці.

Перепишемо рівняння так:  $\sin x = 1 + \cos x$ .

Оскільки,  $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ , то  $\pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x$ . Піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрата. Маємо:

$$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x,$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0.$$

Отримаємо сукупність:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x + 1 = 0; \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На цьому етапі учні записують відповідь, забуваючи, що треба зробити перевірку, бо можуть з'явитися сторонні корені під час піднесення обох частин рівняння до квадрата.

1. Якщо  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$ , то  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1$ .

2. Якщо  $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ , то  $\sin(\pi + 2\pi n) - \cos(\pi + 2\pi n) = \sin\pi - \cos\pi = 1$

3. Якщо  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ , то  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - -\cos\frac{3\pi}{2} = -1$ . Отже,  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$  – сторонній корінь.

Тому доцільно разом з учням розв'язати дане рівняння за допомогою новітніх програмних засобів.

Для використання програми Microsoft Office Excel побудуємо таблицю даних із двох стовпців для функцій  $y = \sin x$  та  $y = \cos x + 1$  (рис. 1). У клітинках C3 додаємо формулу  $=\text{SIN}(B3)$ , а в клітинку F3 формулу  $=\text{COS}(E3) + 1$ . Після цього використовуємо авто заповнення для діапазону C3:C13 і F3:F13. Додаємо точкову діаграму, будуємо графіки функцій та знаходимо точки перетину графіків.

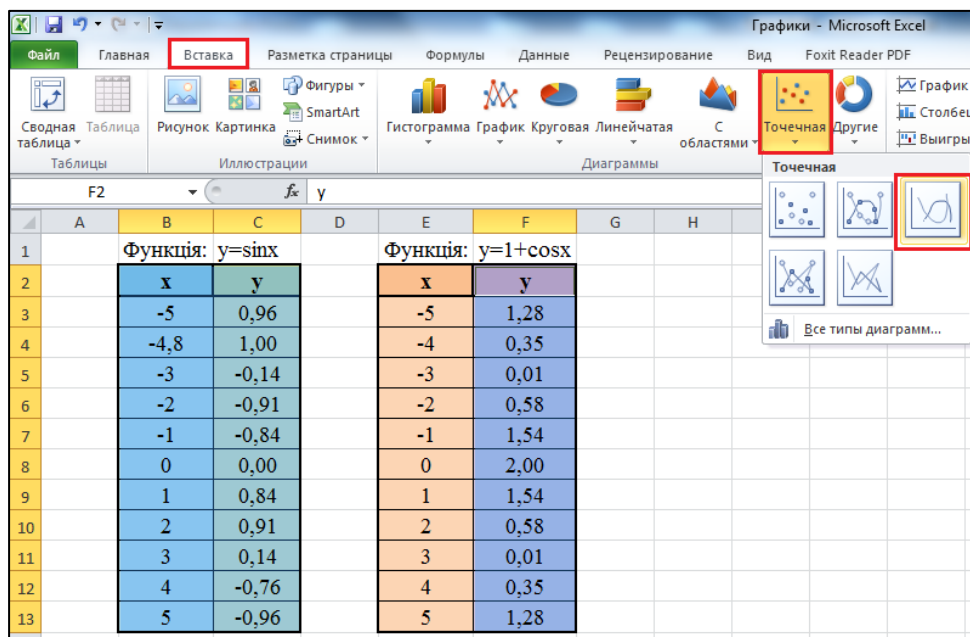


Рис. 1. Вставка точкової діаграми

Для побудови графіків функцій за допомогою програмного забезпечення GeoGebra додаємо у поле «Ввод» функції  $y = \sin x$  та  $y = 1 + \cos x$ . Потім знаходимо точки перетину графіків функцій (рис. 2).

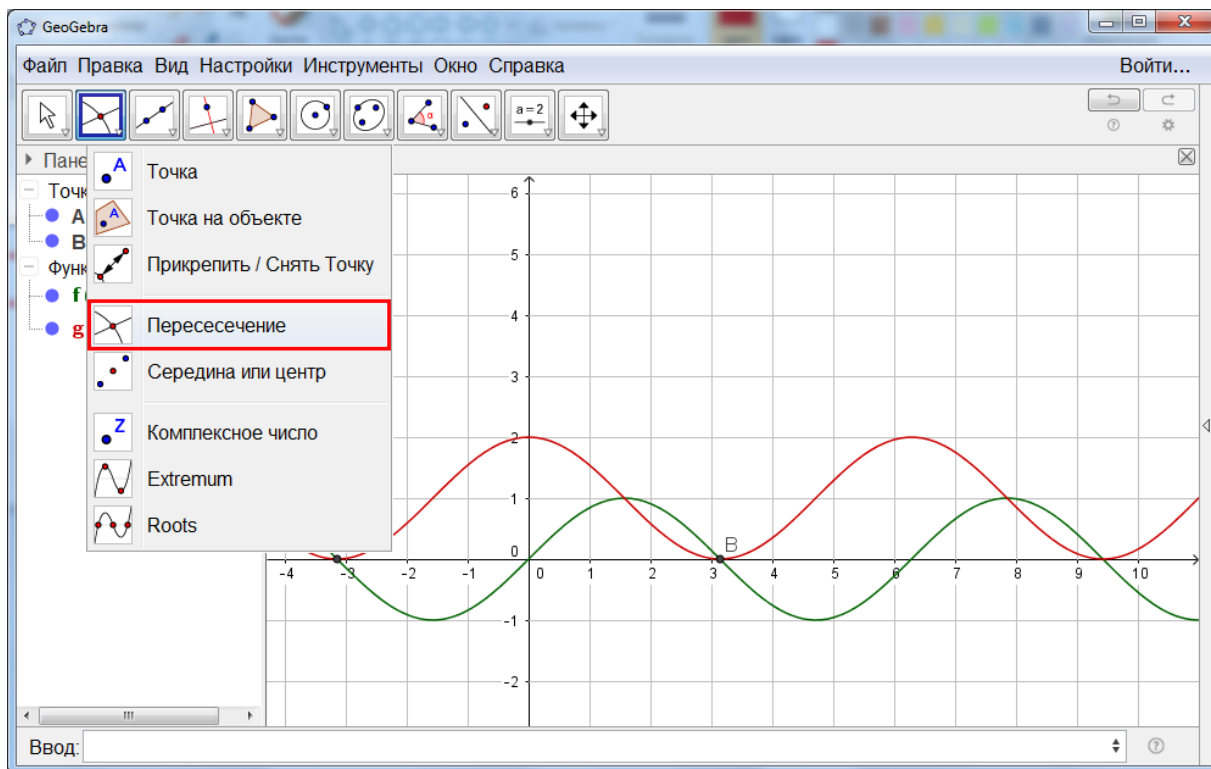


Рис. 2. Точки перетину графіків функцій в GeoGebra

Продемонструємо розв'язання даного тригонометричного рівняння за допомогою програми AGrapher (рис. 3).

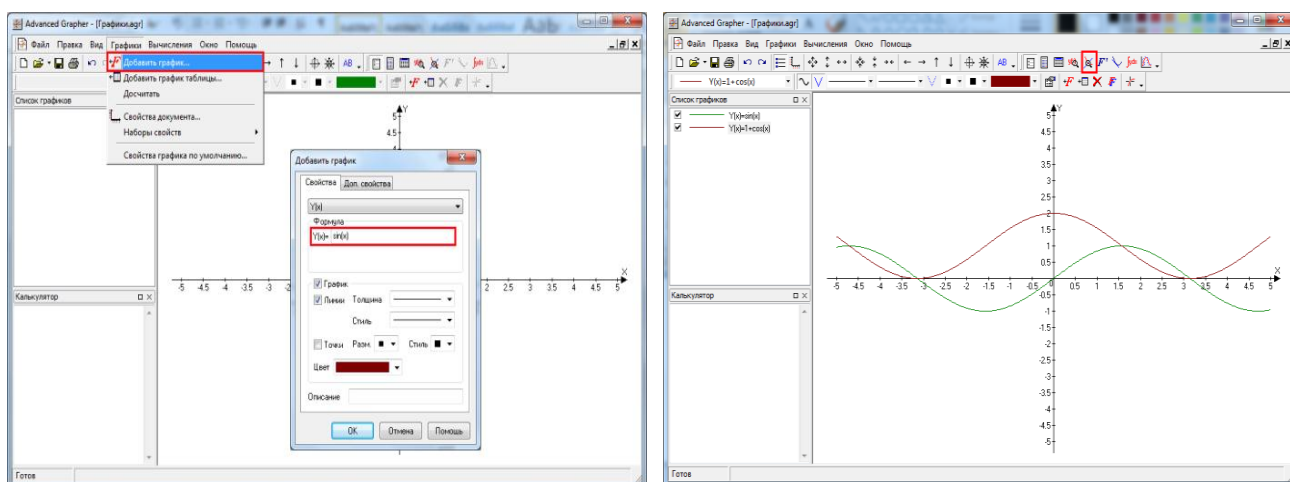


Рис.3. Графіки функцій в AGrapher

За побудованими графіками функцій легко встановити, що на проміжку  $[0; 2\pi]$  вони мають дві точки перетину, тому рівняння має два корені, усі інші

корені відрізняються від знайдених на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тоді учні бачать, що при піднесенні двох частин рівняння до квадрату з'явився сторонній корінь  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , тобто використання програмних засобів дозволяє запобігти помилкам.

Порівнюючи побудову в кожній з програм графіків функцій, слід наголосити, що програма Microsoft Office Excel вимагає виконання більшої кількості кроків, а графіки мають вигляд ескізів.

Таким чином, використання новітніх програмних засобів у процесі навчання учнів розв'язувати тригонометричні рівняння є доцільним. Розглянуті програми допомагають заощадити час, вказати учням на їхні помилки чи запобігти їх утворенню, показати різні способи розв'язання тригонометричних рівнянь.

### Література

1. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підручник для 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків : Світ дитинства, 2004. – 262 с.

**Анотація.** Висвітлено можливості використання програмних засобів Microsoft Office Excel, AGrapher та GeoGebra під час розв'язування тригонометричних рівнянь. Наголошується, що розглянуті програми допомагають заощадити час, вказати учням на їхні помилки чи запобігти їх утворенню, показати різні способи розв'язання тригонометричних рівнянь.

**Ключові слова:** алгебра і початки аналізу, новітні програмні засоби, розв'язування тригонометричних рівнянь.

**Summary.** The article highlights the possibility of using software Microsoft Office Excel, AGrapher and GeoGebra on solving trigonometric equations. It is noted that these programs help to save time, to indicate to the students their mistakes or to prevent their formation, to show different ways of solving trigonometric equations.

**Keywords:** beginning algebra and analysis, the latest software tools, solutions of trigonometric equations.

## **РІВНЯННЯ З ЦІЛОЮ ЧАСТИНОЮ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**

В олімпіадних задачах з математики кожного року зустрічаються завдання з цілою або дробовою частиною числа. Але учні зрозуміють дану тему лише на рівні означень. Тому проблема розв'язування задач, що містять цілу та дробову частину є актуальною.

Нагадаємо означення цілої та дробової частини.

*Означення 1.* Цілою частиною  $[x]$  числа  $x$  називають таке найбільше ціле число, яке не перевищує  $x$ . Тому,  $[-4, ] = -5$ ;  $[4,7] = 4$ .

*Означення 2.* Дробовою частиною  $\{x\}$  називається різниця  $x - [x]$ .

Ціла, дробова частини числа та саме число тісно пов'язані між собою співвідношенням:  $x = [x] + \{x\}$ . Тому,  $\{4,7\} = 4,7 - 4 = 0,7$ ;  
 $\{-4,6\} = -4,6 + 5 = 0,4$ .

Одним із видів рівнянь, що дозволяють розв'язувати їх різними способами є рівняння виду  $f(x) = [g(x)]$ .

Зокрема такі рівняння можна розв'язувати наступним чином:

### *1. Зведення рівняння до мішаної системи*

Перетворюють рівняння в систему

$$\begin{cases} [g(x)] = k \\ k \leq g(x) < k + 1, \text{ з цілим параметром } k. \\ f(x) = k \end{cases}$$

### *2. Спосіб перебору і локалізації*

Для початку замінюємо у (2) цілу частину функції  $g(x)$  її дробовою частиною, дістанемо рівносильне рівняння  $g(x) - f(x) = \{g(x)\}$ . Оскільки  $0 \leq \{g(x)\} < 1$ , то розв'язки рівняння (2) варто шукати лише на множині  $D = \{x, \text{де } x \in D(f) \cap D(g) \text{ і } 0 \leq g(x) - f(x) < 1\}$ . Перебираючи підмножини

цієї множини, де  $k \leq g(x) < k + 1$ , дістанемо рівняння  $f(x) = k, k \in Z$ , до яких можна застосувати відомі способи розв'язання.

### 3. Графічний спосіб

Розв'язками рівняння будуть абциси спільних точок графіків функцій  $y = f(x)$  і  $y = [g(x)]$ . Графічний спосіб розв'язку рівнянь з цілою частиною, визначається точністю розв'язків рівнянь  $f(x) = k$ , де  $k$  – деякі цілі числа. [3, с.91]

Доцільно показати учням усі 3 способи розв'язання такого виду рівнянь. Тому що є деякі рівняння, які зручно розв'язати звівши до системи, або навпаки можна відразу побудувати графік і відразу знайти розв'язок. Але це буває рідко й існує дуже багато рівнянь з цілою та дробовою частинами, які складно розв'язати графічно, тому доцільніше розв'язати одним з перших способів.

Також одночасно і не нав'язується одностайна думка дітям про спосіб розв'язання даного виду рівнянь. Учень самостійно має змогу вибрати для себе зрозуміліший і зручніший спосіб розв'язування.

*Приклад.* Розв'язати рівняння  $2 + 3[x] = 4x$

Розв'язання:

1 спосіб: зведення до мішаної системи. Використовуючи означення цілої частини, складемо систему

$$\begin{cases} [x] = k, k \in Z; \\ k \leq x < k + 1; \\ 2 + 3k = 4x. \end{cases}$$

$$4x = 2 + 3k, \quad x = \frac{2+3k}{4}; \quad \text{за властивістю цілої частини} \quad k \leq \frac{2+3k}{4} < k + 1:$$

$$\begin{cases} k \leq 2, \\ k > -2, \end{cases} \quad k \in Z; \quad k = -1, 0, 1, 2.$$

Далі підставляємо відповідні значення  $k$  і знаходимо  $x$ .

$$k = -1: x = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}; \quad k = 0: x = \frac{2+0}{4} = \frac{1}{2}; \quad k = 1: x = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4};$$

$$k = 2: x = \frac{2+6}{4} = 2.$$

Відповідь:  $x = -0,25; 0,5; 1,25; 2$ .

2 спосіб: спосіб локалізації. Перетворимо рівняння

$3[x] = 4x - 2$ . За властивістю цілої та дробової частини  $[x] = x - \{x\}$ .  $3x - 3\{x\} = 4x - 2$ ,  $-3\{x\} = x - 2$ ,  $\{x\} = \frac{2-x}{3}$ . Тоді за властивістю дробової частини  $0 \leq \frac{2-x}{3} < 1$ . Розв'язуючи подвійну нерівність отримаємо, що  $-1 < x \leq 2$ . Розв'язуємо його на кожному з проміжків, де ціла частина приймає одне й те саме значення:

$$x \in (-1; 0), [x] = -1 \Leftrightarrow 4x = -1, x = -\frac{1}{4}; x \in [0; 1), [x] = 0 \Leftrightarrow 4x = 2, x = \frac{1}{2};$$

$$x \in [1; 2), [x] = 1 \Leftrightarrow 4x = 5, x = \frac{5}{4}; x = 2, [x] = 2 \Leftrightarrow 4x = 8, x = 2.$$

Відповідь:  $x = -0,25; 0,5; 1,25; 2$ .

3 спосіб: графічний. Розв'яжемо рівняння відносно цілої частини змінної  $[x] = \frac{4x-2}{3}$  і побудуємо графіки функцій  $y = [x]$  і  $y = \frac{4x-2}{3}$ . Ці графіки мають 4 спільні точки  $A(x_1; -1), B(x_2; 0), C(x_3; 1), D(x_4; 2)$ . Оскільки вони розміщені на прямій, то їхні координати справджують її рівняння:

$$-1 = \frac{4x_1 - 2}{3}, 0 = \frac{4x_2 - 2}{3}, 1 = \frac{4x_3 - 2}{3}, 2 = \frac{4x_4 - 2}{3}.$$

Звідси знаходимо абсиси  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , які і будуть розв'язками рівняння.

Відповідь:  $x_1 = -0,25, x_2 = 0,5, x_3 = 1,25, x_4 = 2$ .

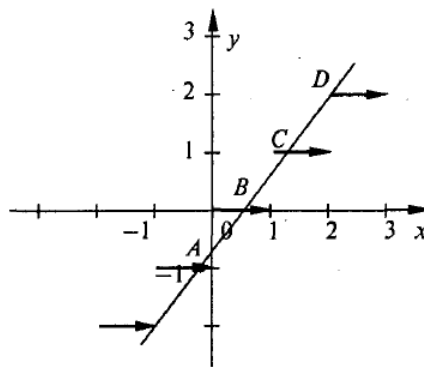


Рис.1. Графік відповідного рівняння

Отже, як бачимо, що рівняння з цілою частиною не зовсім прості для самостійного усвідомлення. Виходячи з цього, доцільно з даної теми створити



гурток, де учні разом з учителем зможуть досконало розібрати дану тему. І в майбутньому у дітей на математичних конкурсах і олімпіадах не будуть виникати проблеми з даним видом завдань.

При розв'язанні рівнянь з цілою та дробовою частинами в учнів розвивається кмітливість, ініціативність, вміння комбінувати та розмірковувати. Також під час розв'язування даного виду рівнянь учні вчаться зіставляти відомі і невідомі факти, узагальнювати отримані розв'язки, робити певні умовиводи.

### Література

1. Апостолова Г. В. Ціла та дробова частина числа. / І. Панкратова, Л. Фінкельштейн – М.: Кадр, 2001. – 245 с.
2. Виноградов І. М. Основи теорії чисел : В 6 ч. – М.: Москва, 1952. – 179 с.
3. Вороний О. М. Готуємося до олімпіад з математики. — К.: Основа, 2008. — 255 с.
4. Шунда Н. М. Розв'язування рівнянь, пов'язаних з функціями: ціла і дробова частини дійсного числа. — К.: Техніка, 2001. — 124 с.: іл.

**Анотація.** Розглянуто різні способи розв'язування рівнянь виду  $[f(x)] = g(x)$ , де  $f$  і  $g$  – елементарні функції з наведенням методичних коментарів до конкретного прикладу.

**Ключові слова:** ціла частина, дробова частина, функція, рівняння.

**Abstract.** There are considered the methods for solving equations of the form  $[f(x)] = g(x)$ , where  $f$  and  $g$  are elementary functions and given the didactic coments for example such eqitation in this article.

**Keywords:** the whole part, fraction, function, the equation.

## **НЕРІВНІСТЬ НЕСБІТА ТА РІЗНІ СПОСОБИ ЇЇ ДОВЕДЕННЯ**

Доведення нерівностей вважається одним із найскладніших розділів шкільної математики. Робота над цією темою формує в учнів евристичне мислення, навички аналізу і математичну інтуїцію. Завдання на доведення нерівностей традиційно зустрічаються на математичних змаганнях різних рівнів, проте у школі ця тема вивчається лише у 9 класі з поглибленим вивченням математики.

Так у підручнику [1] до уваги учнів пропонуються такі основні методи доведення нерівностей: метод різниці (за означенням); метод спрощення нерівності; метод, у якому застосовуються міркування «від супротивного»; метод застосування очевидної нерівності; метод застосування раніше доведеної нерівності (у тому числі так звані класичні нерівності: нерівність Коші, нерівність Коші-Буняковського-Шварца, нерівності між середніми величинами тощо).

Із наведених прикладів, що стосуються цієї теми зупинимося на прикладі 5 [1, с. 22]. До речі, у світі математики цю задачу називають нерівність Несбіта (А.М. Nesbitt), на честь математика, який опублікував цю задачу у 1903 р. в журналі Education Times vol. 3 під №15114.

*Приклад 5.* Для будь-яких дійсних невід'ємних чисел  $a, b, c$  довести нерівність:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .

*Доведення:* Введемо позначення:  $b+c=2x$ ,  $c+a=2y$ ,  $a+b=2z$ .  
Звідси  $a+b+c=x+y+z$ ,  $a=y+z-x$ ,  $b=x+z-y$ ,  $c=x+y-z$ .

Маємо:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{z} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

У доведенні використана відома нерівність про суму двох додатних взаємно обернених величин.

Д. Пойа говорив, що краще розв'язати одну задачу кількома способами, ніж багато одним. Ми також дотримуємося такої думки, тим паче, що розв'язування задач різними способами залучає учнів до пошукової діяльності, створюючи умови для розвитку їх мислення. Тому запропонуємо ще кілька доведень нерівності Несбіта, з якими можна знайомити школярів на математичних гуртках або у процесі підготовки до математичних змагань.

*Доведення методом різниці («за означенням»).*

Суть цього способу полягає в наступному: якщо  $a \geq b$ , то  $a - b \geq 0$ .

Отже, перенесемо усе в ліву частину та зведемо до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} &= \frac{2a(c+a)(a+b) + 2b(b+c)(a+b) + 2c(b+c)(c+a) - 3(b+c)(c+a)(a+b)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{2a(a^2 + ab + ac + bc) + 2b(ab + b^2 + ac + bc) + 2c(bc + ab + c^2 + ac) - 3(a+b)(bc + c^2 + ac + ab)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{2a^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2abc + 2b^2a + 2b^3 + 2abc + 2b^2c + 2c^2b + 2abc + 2c^3 + 2ac^2 -}{2(b+c)(c+a)(a+b)} \\ &\quad - \frac{3abc - 3ac^2 - 3a^2c - 3a^2b - 3b^2c - 3bc^2 - 3abc - 3ab^2}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{2a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 2b^3 - b^2c + 2c^3 - ac^2 - bc^2}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{a^3 - a^2b - b^2a + b^3 + a^3 - a^2c - ac^2 + c^3 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{a^2(a-b) - b^2(a-b) + a^2(a-c) - c^2(a-c) + b^2(b-c) - c^2(b-c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\ &= \frac{(a-b)(a-b)(a+b) + (a-c)(a-c)(a+c) + (b-c)(b-c)(b+c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{(a-b)(a-b)(a+b)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(a-c)(a-c)(a+c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} + \frac{(b-c)(b-c)(b+c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)} = \\
& = \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} + \frac{(a-c)^2}{2(a+b)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{2(a+b)(c+a)} \geq 0
\end{aligned}$$

Очевидно, що останній вираз невід'ємний, тому нерівність доведена.

Доведення методом застосування раніше доведеної нерівності, зокрема нерівності Коші-Буняковського-Шварца.

Додавши 3, перетворимо ліву частину нерівності:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 = \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = \\
& = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} = (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).
\end{aligned}$$

До останнього виразу застосуємо нерівність Коші-Буняковського-Шварца:

$$\begin{aligned}
& (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = \frac{1}{2} ((b+c) + (c+a) + (a+b)) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \\
& \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \sqrt{c+a} \cdot \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \sqrt{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1+1+1)^2 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Доведення синтетичним методом (поєднання кількох відомих методів).

Після тотожних перетворень нерівність матиме вигляд:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + ac^2 + bc^2$$

$$\text{або } 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a). \quad (1)$$

Доведемо останню нерівність. Нехай маємо  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ,

$c(a^2 + b^2) \geq 2abc$ , аналогічно,  $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$  і  $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$ .

Додавши почленно останні три нерівності, отримаємо  $c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) \geq 6abc$  або  $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$ .

Таким чином, ліва частина нерівності доведена. Далі, маємо  $2ab \leq a^2 + b^2$ , або  $ab \leq a^2 + b^2 - ab$ . Помножимо останню нерівність на вираз  $(a+b)$ . Отримаємо:

$$ab(a+b) \leq a^3 + b^3; \quad (2)$$

$$bc(b+c) \leq b^3 + c^3; \quad (3)$$

$$ca(c+a) \leq c^3 + a^3. \quad (4)$$

Додавши нерівності (2), (3), (4), маємо

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Отже, необхідна нерівність доведена.

Зауважимо, що рівність у нерівності **(1)** досягається при  $a=b=c$ .

Вище ми розглянули декілька способів доведення нерівності Несбіта, проте існують й інші. Вважаємо, що цим способам доведення нерівності й тим, які тут не розглянуті варто навчати учнів. Адже розв'язування задач різними способами допомагає учням структурувати дані, з'ясовувати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати і перетворювати її. Все це створює умови для формування математичної компетентності учня, яка дає можливість адекватного застосування математики при вирішенні буденних життєвих проблем.

### Література

1. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2009. – 382 с.
2. Нерівність Несбіта. Матеріал з Вікіпедії - вільної енциклопедії. [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C\\_%D0%9D%D0%B5%D1%81%D0%B1%D1%96%D1%82%D0%B0](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%9D%D0%B5%D1%81%D0%B1%D1%96%D1%82%D0%B0)

**Анотація.** У тезах розглянута нерівність Несбіта та різні способи її доведення.

**Ключові слова:** нерівність Несбіта, нерівність Коші-Буняковського-Шварца.

**Annotations.** The abstract examined inequality Nesbitt's and different ways of proof.

**Keywords:** Nesbitt's inequality, Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz inequality.

*Салій-Машира Катерина Олександрівна*  
*Бердянський державний педагогічний університет,*  
*студентка магістратури*

## **ХМАРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ КЛАСІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ**

У сучасному суспільстві ключова роль належить учителю, якому довірено всебічний розвиток учня. Професійна діяльність учителя стає складнішою: впроваджуються нові педагогічні технології, з'являються нові види діяльності, що у свою чергу вимагає системного розвитку ІК-компетентності всіх суб'єктів навчання. В останні роки педагоги все частіше звертаються до послуг мережі Інтернет із метою використання ІКТ для співпраці та організації корпоративної роботи, а стрімкий розвиток хмарних сервісів став провідною тенденцією в розв'язанні проблем навчальної мобільності всіх учасників навчально-виховного процесу.

Проблеми розвитку інформатизації освіти та можливості використання хмарних сервісів у навчальних закладах розкривають Т.Л. Архіпова, В. Ю. Биков, Ю.В. Грицук, О. Г. Кузьминська, О. І. Матяш, А. П. Москальова, Г. О. Проценко, А. М. Стрюк, Н. Скейтлер, В. А. Темненко, В. К. Толстих та ін. Однак питання використання хмарних сервісів для удосконалення організації навчально-виховного процесу загальноосвітніх навчальних закладів є відносно новим, актуальним і розкрито не повною мірою.

Саме тому метою дослідження є визначити можливості і перспективи використання "хмарних технологій" у навчальному процесі математики профільної школи.

В останні роки, у зв'язку з підвищенням самоосвіти учнів, все більш доречним стає використання хмарних технологій, в тому числі, й для навчання математики у профільній школі.

Хмарні технології (cloud computing) визначають як динамічно масштабований вільний спосіб доступу до зовнішніх обчислювальних

інформаційних ресурсів у вигляді сервісів, що надаються за допомогою мережі Інтернет [3, с. 236].

Сучасні учні дуже добре володіють Інтернет – ресурсами, вміють знаходити й використовувати пошукові сервіси, широко користуються соціальними мережами, електронною поштою, хмарними сховищами тощо. Саме тому на уроках математики у профільній школі вчителю необхідно використовувати хмарні технології не лише для полегшення роботи учнів, а й для формування та підвищення їх математичних компетентностей. Для цього можна запропонувати розв’язання задач, використовуючи різні методи та способи розв’язання.

Розглянемо, наприклад, розв’язування прикладних задач з використанням інтегралу в 11 класі. На уроці можна запропонувати класичний розв’язок даної задачі, а як самостійну роботу учні можуть розв’язати задачу використовуючи онлайн калькулятори, спеціальні програми (на зразок Photomath) та матеріали, надані вчителем тощо.

Задача. Продуктивність праці робітника протягом дня задається функцією

$z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$  (грош. од./год), де  $t$  – час в годинах від початку роботи,  $0 \leq t \leq 8$ . Знайти функцію  $Q = Q(t)$ , яка показує обсяг продукції (у вартісному виразі) та його величину за робочий день.

Спосіб 1 (аналітичний).

Якщо  $f(t)$  – продуктивність праці в момент  $t$ , то  $Q = \int_0^t f(t) dt$  – обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу  $[0; t]$ .

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^8 z(t) dt = \int_0^8 (-0,00645t^2 + 0,05t + 0,5) dt = \left( -0,00645 \frac{t^3}{3} + 0,05 \frac{t^2}{2} + 0,5t \right) \Big|_0^8 = \\ &= (-0,00215t^3 + 0,025t^2 + 0,5t) \Big|_0^8 = 4,4992 \approx 4,5 \text{ (грош. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь:  $Q \approx 4,5$  (грош. од.)

Спосіб 2 (з використанням комп’ютерної підтримки)

Для більш швидкого обчислення визначеного інтегралу ми можемо використовувати багато комп'ютерних програм. При використанні програм Master Function 2.0 і Solver 1.1 було отримане таке ж значення.

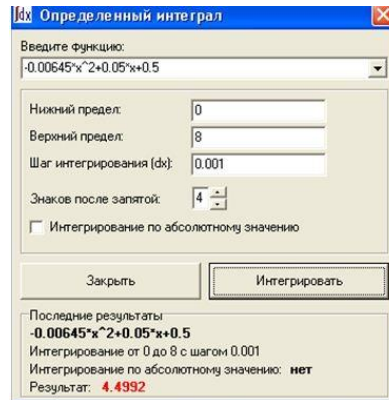


Рис. 1 Використання програми Master Function 2.0 і Solver 1.1

### Спосіб 3 (використання хмарних технологій)

#### Решение определённых интегралов

Введите функцию, для которой необходимо вычислить интеграл

8

∫

(-0,0064x^2+0,05x+0,5d x

0

?

Пример: x^2\*exp(-x)

Найти интеграл

† Введите нижнюю границу интеграла и верхнюю границу интеграла b, подинтегральную функцию f(x) - смотрите пример

1. Интегрируем почленно:

1. Интегрируем почленно:

1. Интеграл от произведения функции на константу есть эта константа на интеграл от данной функции:

$$\int -0.0064x^2 dx = -0.0064 \int x^2 dx$$

1. Интеграл  $x^n$  есть  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Таким образом, результат будет:  $-0.0021333333333333x^3$

1. Интеграл от произведения функции на константу есть эта константа на интеграл от данной функции:

$$\int \frac{x}{20} dx = \frac{1}{20} \int x dx$$

1. Интеграл  $x^n$  есть  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ :

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Таким образом, результат будет:  $\frac{x^2}{40}$

Результат есть:  $-0.0021333333333333x^3 + \frac{x^2}{40}$

1. Интеграл от константы есть эта константа, умноженная на переменную интегрирования:

$$\int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2}$$

Результат есть:  $-0.0021333333333333x^3 + \frac{x^2}{40} + \frac{x}{2}$

2. Теперь упростить:

$$\frac{x}{40} (-0.0853333333333334x^2 + x + 20)$$

3. Добавляем постоянную интегрирования:

$$\frac{x}{40} (-0.0853333333333334x^2 + x + 20) + \text{constant}$$


---

Ответ:

$$\frac{x}{40} (-0.0853333333333334x^2 + x + 20) + \text{constant}$$

Рис. 2 Введення формули та розрахунок заданого інтеграла

Отже, хмарні сервіси можна використовувати не лише для зберігання, передачі та обміну інформацією, але й для самоосвіти учнів, у тому числі й самоперевірки. Також стають можливими дистанційні консультації та колективне обговорення результатів між учнями та учителем. Все це можна втілити в життя завдяки використанню найбільш розповсюдженого хмарного сервісу Google Cloud, який надає такі можливості, як: створення презентацій,



ведення блогу та щоденника, збереження файлів вільного доступу, створення тестів, тощо.

### Література

1. Литвинова С.Г. Хмаро орієнтоване навчальне середовище загальноосвітнього навчального закладу [Електронний ресурс] / С. Г. Литвинова // Scientific Conferences, Cloud Technologies in Education' 2013.– Режим доступу: <http://tmn.ccjournals.eu/index.php/cte/2013/paper/view/1> (дата звернення 06.03.17). – Назва з екрана.
2. Miller M. Cloud Computing: Web-Based Applications That Change the Way You Work and Collaborate Online / Michael Miller. - Que Publishing, 2008. – 312 p.

**Анотація.** В статті обґрунтовано доцільність використання хмарних технологій у процесі формування математичних компетентностей учнів класів фізико-математичного профілю; проілюстровано використання хмарних технологій у процесі розв'язання математичної задачі декількома способами як засобу формування математичних компетентностей учнів.

**Ключові слова:** математична компетентність, хмарні технології.

**Annotation.** In the article the feasibility of using cloud technology in the process of mathematical competencies of students of classes Physics and Mathematics profile; illustrated the use of cloud technology in solving a mathematical problem in several ways as a means of mathematical competencies of students.

**Keywords:** mathematical competence, cloud.

## 2.2. РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

---

***Бойко Вікторія Володимирівна***

*Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, студентка 3 курсу*

### **УДОСКОНАЛЕННЯ УМОВ ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР**

**Постановка проблеми.** Важливими передумовами підвищення якості знань з математики в основній школі є їх систематизація, узагальнення і поглиблення. Приведення у систему знань здійснюється на кожному уроці: кожна частка нового матеріалу опирається на засвоєння раніше вивченого, пов'язується з ним, в той же час становить основу для усвідомлення наступної теми. Більш широка систематизація здійснюється на окремих уроках по закінченню значних розділів програми або цілого курсу. Узагальнення і систематизація є складними взаємопов'язаними процесами: ширше узагальнення спричиняє більшу кількість зв'язків та відносин і, відповідно, ширше коло знань, об'єднаних у систему[4]. Традиційно, основним засобом навчання на уроках математики є система задач. Засобом узагальнення і систематизації знань учнів з математики, зокрема геометрії, може бути окрема задача, при розв'язуванні якої можна повторити широке коло теоретичних питань, яку можна розв'язати кількома способами.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Багато вчителів, методистів (Вайман В., Верзілова Н., Готман Е., Каплунович І., Кушнір І., Матяш О., Скопец З., Ясінський В. та ін.) присвятили свої розробки урокам однієї задачі. Зокрема, в цих працях описані можливі технології роботи вчителя на уроці та обґрунтовані позитивні сторони такої роботи [1, 2, 3, 4].

Педагоги і психологи також розглядали цю проблему, але із своєї точки зору. Відповідно сучасним психологічним представленням, структура математичного мислення складається із п'яти підструктур, які перетинаються

між собою. В залежності від індивідуальних особливостей людини якась із них має перевагу над іншими. Це топологічна, проєктивна, порядкова, метрична і алгебраїчна підструктури. Психологи доводять, що домінантна під структура математичного мислення проявляє себе у всіх математичних діях, і в залежності від неї кожний учень вибирає свій індивідуальний метод розв'язування [3].

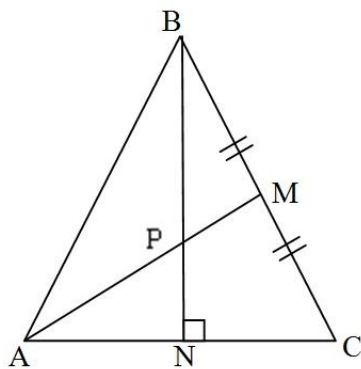
**Мета статті.** Розкрити можливі шляхи удосконалення умов формування знань та умінь учнів про властивості геометричних фігур.

**Виклад основного матеріалу.** У процесі розв'язування однієї задачі декількома способами, учні намагаються відшукати більш оригінальне, економне розв'язання. Для цього вони згадують багато теоретичних фактів, методи і прийоми, аналізують їх з точки використаності до даної задачі, ситуації, накопичують певний досвід використання одних і тих знань до різних питань. При розв'язуванні задач одним способом в учнів одна мета – знайти правильну відповідь.

Досить часто при повторенні якогось розділу шкільного курсу геометрії вчителі вважають за раціональне, проводити урок «однієї задачі», зокрема, відбирається задача, яка розв'язується кількома способами і охоплює великий об'єм теоретичного матеріалу. Вважаємо, доцільним використання однієї задачі і для відпрацювання системи математичних тверджень. Наприклад, учні досить часто плутають поняття означення та властивість, або забуваються якісь властивості конкретного поняття.

У шкільному курсі планіметрії учні у 7 класі при вивченні теми «Трикутник і його елементи» ознайомлюються із означенням поняття медіана трикутника. Згодом, у межах цієї теми учні вивчають властивість і ознаку рівнобедреного трикутника (у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з його вершини, збігаються; якщо медіана трикутника є його висотою або бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений) та у цьому ж класі, з'ясовують, що центр кола описаного навколо прямокутного трикутника – середина гіпотенузи. У 8 класі в межах вивчення теми «Подібність

трикутників» передбачено вивчення теореми про медіани трикутника; у 9 класі, в залежності від авторів, учні з'ясовують, що якщо  $a, b, c$  сторони трикутника, то його медіана  $m_a$  обчислюється за формулою  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$  (наслідок з властивості діагоналей паралелограма: у паралелограма сума квадратів всіх його сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей, яка доводиться з використанням векторного методу або застосуванням теореми косинусів). Як бачимо, для ефективного формування знань учнів про медіану та умінь використовувати необхідні твердження у процесі розв'язування задач, необхідно узагальнити та систематизувати наведені вище твердження. Розглянемо задачу: у рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см. З вершини на основу провели перпендикуляр довжиною 12 см. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони.



### Спосіб 1

Розв'язання:

1) За означенням медіани  $BM = MC$ ;

2) За властивістю рівнобедреного трикутника ( $BN$  – висота, медіана, бісектриса)  $AN = NC = AC : 2 = 6 : 2 = 3$  (см).

3) За властивістю медіан:  $BP : PN = 2 : 1$ . Нехай коефіцієнт пропорційності  $= x$ , тоді  $BP = 2x$ ,  $PN = x$ , складемо рівняння:

$$BP + PN = BN = 12,$$

$$2x + x = 12,$$

$$x = 4$$

$$PN = 4 \text{ см.}$$

4) Розглянемо  $\triangle APN$  ( $\angle ANP = 90^\circ$ ). За теоремою Піфагора:  $AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  (см).

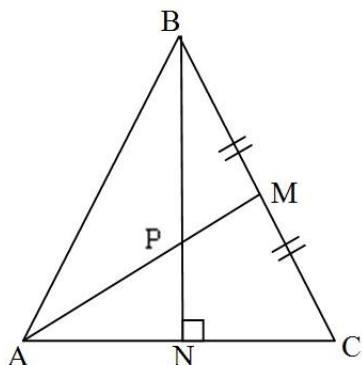
5) Оскільки,  $AM$  – медіана за умовою задачі, то за властивістю медіан трикутника  $AP : PM = 2 : 1$ , тоді  $AM = 5 : 2 \cdot 3 = 7,5$  (см).

Відповідь. 7,5 см.

**Спосіб 2** (Використання формули

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Розв'язання:



1. За властивістю рівнобедреного трикутника ( $BN$  – висота, медіана, бісектриса)  $AN = NC = AC : 2 = 6 : 2 = 3$  (см).

2.  $\triangle ABN = \triangle CBN$  (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо:  $AB = BC = 3\sqrt{17}$  см.

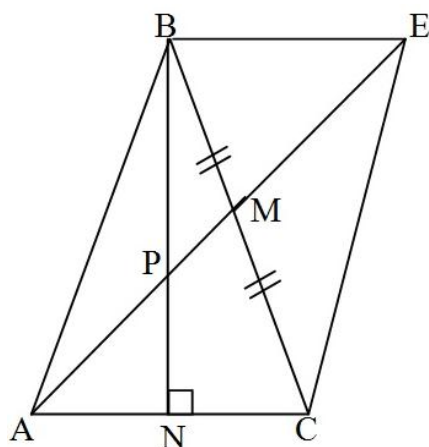
3. Застосуємо формулу  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$  до трикутника  $ABC$ :

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2},$$

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 17 + 2 \cdot 36 - 9 \cdot 17} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Оскільки вивчення попередньої формули у навчальній програмі не передбачено, та не всі її пам'ятають, то при розв'язуванні багатьох задач, де в умові або дано або потрібно знайти медіану, доцільним є використання прийому побудови трикутника до паралелограма.

### Спосіб 3



Розв'язання:

1. Добудуємо трикутник  $ABC$  до паралелограма  $ABEC$ .

2. За властивістю діагоналей паралелограма маємо:

$$AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$AM = \frac{1}{2}AE = x.$$

3.  $\triangle ABN = \triangle CBN$  (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо:  $AB = BC = 3\sqrt{17}$  см.

4. Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$4x^2 + 9 \cdot 17 = 2(9 \cdot 17 + 36),$$

$$4x^2 + 153 = 378,$$

$$x^2 = 56,25,$$

$$x = 7,5$$

Отже,  $AM = 7,5$  см.

Відповідь. 7,5 см.

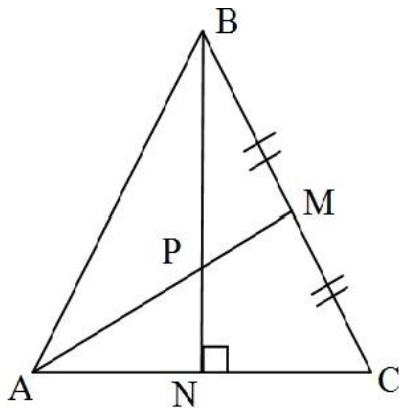
#### Спосіб 4.

Розв'язання:

1. За теоремою Піфагора з  $\triangle NBC$  ( $\angle BNC = 90^\circ$ ) знайдемо  $BC = 3\sqrt{17}$  см.

2. У  $\triangle NBC$  ( $\angle BNC = 90^\circ$ ):  $\cos C = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ , тоді  $MC = 1,5\sqrt{17}$  см.

3. За теоремою косинусів у  $\triangle AMC$ :



$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2AC \cdot CM \cdot \cos C,$$

Підставимо значення:

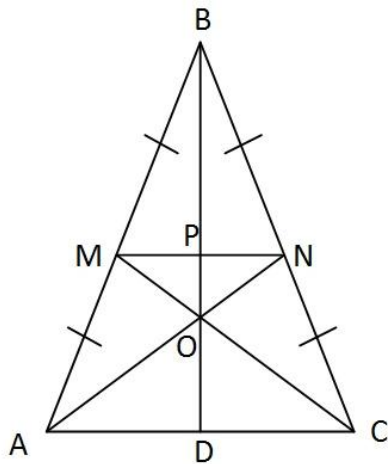
$$AM^2 = 36 + \frac{153}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{3\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}},$$

$$AM = \sqrt{36 + 38,25 - 18},$$

і отримаємо  $AM = 7,5$  см.

Відповідь. 7,5 см.

#### Спосіб 5.



Розв'язання:

1. Проведемо  $MN$  – середню лінію  $\triangle ABC$ :

$$MN = AC : 2 = 3 \text{ (см)}.$$

2. З того, що  $\triangle OMN \sim \triangle OCA$  маємо:

$$PD = BD : 2 = 6 \text{ (см)},$$

$$PO : OD = 1:2 \Rightarrow PO = 2 \text{ см}; OD = 4 \text{ см}.$$

3. У  $\triangle MPO$  ( $\angle P = 90^\circ$ ) за теоремою

$$\text{Піфагора: } MO = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ (см)}.$$

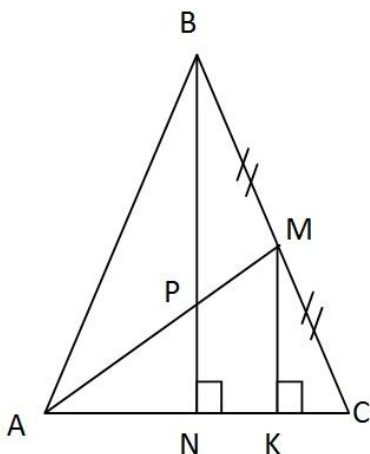
$$CM = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 7,5 см.

#### Спосіб 6.

Розв'язання:

1. З середини сторони  $BC$  опустимо перпендикуляр  $MK$  на основу  $AC$ .



2.  $\angle BCA$  перетинають паралельні прямі  $BN$  і  $MK$ , тоді за теоремою Фалеса отримаємо:

$$NK = KC = NC : 2 = 1,5 \text{ см}$$

$$MK = BN : 2 = 12 : 2 = 6 \text{ см.}$$

3. У  $\square AMK$  ( $\angle K = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора:

$$AM = \sqrt{MK^2 + AK^2},$$

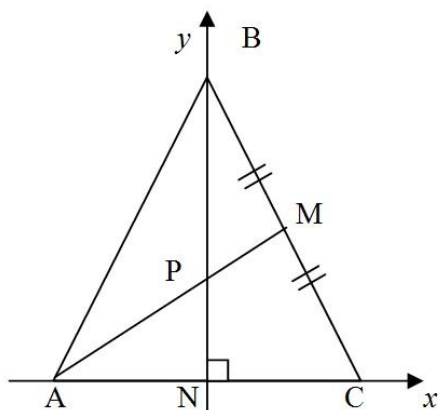
$$AM = \sqrt{6^2 + 4,5^2} = \sqrt{36 + 20,25} = 7,5.$$

Відповідь: 7,5 см.

Також цю задачу можна розв'язати використовуючи координатний та векторний методи.

### Спосіб 7.

Розв'язання:



1. Введемо систему координат так, що  $A(-3;0), B(0;12), C(3;0), M(x_0; y_0)$

2. Знайдемо координати точки  $M$  як середини  $BC$ :

$$x_0 = \frac{0+3}{2} = 1,5,$$

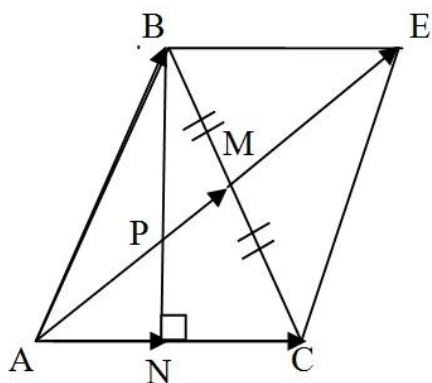
$$y_0 = \frac{12+0}{2} = 6.$$

3. Тоді за формулою знаходження довжини відрізка отримаємо

$$AM = \sqrt{(1,5+3)^2 + (6-0)^2} = 7,5 \text{ см.}$$

Відповідь: 7.5 см [5].

### Спосіб 8.



Розв'язання:

1. За правилом трикутника знайдемо вектор  $\overrightarrow{AB}$  як суму векторів  $\overrightarrow{AN}$  і  $\overrightarrow{NB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}.$$

Піднесемо до квадрату і отримаємо:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AN}|^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{AN}| \cdot |\overrightarrow{NB}| \cdot 0 + |\overrightarrow{NB}|^2,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+144} = 3\sqrt{17}.$$

$$2. \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}.$$

3. Знайдемо  $\overrightarrow{AE}$  за правилом паралелограма :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \text{ тоді матимемо } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ знову піднесемо до}$$

квадрату і одержимо  $|\overrightarrow{AM}| = 7,5 \text{ см.}$

Відповідь: 7,5 см [5].

**Висновки.** Розв'язування однієї задачі кількома способами активізує навчальну діяльність школярів, прививає інтерес до предмету. До розв'язування задач декількома способами учнів слід привчати поступово. Можна на уроці розглянути один або два способи, а пошук інших способів пропонується на домашнє завдання. Можливо, запропоновані учнями способи розв'язування не завжди раціональні, проте для навчальних і виховних цілей така робота дуже важлива: учні з великою зацікавленістю знаходяться у пошуках, перебираючи у пам'яті варіанти використання вивчених теорем, відомих прийомів і методів розв'язування задач.

#### Література

- 1) Вайман В. Урок однієї задачі. // Математика в школі. – 2000.-№3.
- 2) Готман Э. Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. Киев: Рад.школа, 1988.
- 3) Каплунович И.Я., Верзилова Н.И. Урок одной задачи. // Математика в школе. – 2003.- №2.
- 4) Матяш О. І. Формування знань старшокласників про різні методи розв'язування задач стереометрії / О. І. Матяш, В. А. Ясінський, А. В. Прус // Математика в школі. – 2010. – № 10. – С. 8–17.
- 5) Учительський журнал on-line/ Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: <https://www.teacherjournal.in.ua> .

**Анотація.** У даній статті розкрито можливі шляхи удосконалення умов формування знань та умінь учнів про властивості геометричних фігур.

**Ключові слова:** медіана трикутника, урок однієї задачі.

**Abstract.** This article deals with possible ways of improving conditions for the formation of knowledge and skills students about the properties of geometric figures.

**Keywords:** median triangle lesson of a problem.



## **ДО ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПЛАНІМЕТРІЇ**

**Вступ.** Визначним критерієм математичної компетентності учнів традиційно вважається вміння розв'язувати задачі. Саме через розв'язування учнями навчальних задач реалізуються освітні, виховні, розвивальні і практичні освітні цілі. Тому є актуальним пошук відповідних технологій і методів навчання учнів розв'язувати геометричні задачі.

**Метою даної статті** є дослідження можливості практичного застосування різних методів розв'язування задач з планіметрії у шкільному курсі геометрії.

**Виклад основного матеріалу.** На уроках математики педагог має обирати шляхи пізнання, за допомогою яких він найбільш ефективно зможе озброїти учнів математичними знаннями і навичками, створити систему математичних понять і сформувати вміння використовувати набуті знання у практичній діяльності. Інструментами досягнення дидактичної мети на уроках геометрії є різні методи та способи розв'язування геометричних задач. Тому варто приділити особливу увагу навчанню учнів основних методів розв'язування задач. Саме такий підхід допомагає учням розширити коло розглянутих задач, сформувати вміння аналізувати та використовувати раніше набуті знання в конкретних ситуаціях, вибираючи необхідні для конкретного випадку, та інтерпретувати їх для поставленої задачі. Ефективним способом вивчення різних методів є їх порівняння. Критерії порівняння способів розв'язування задач можуть бути різними: за наявністю додаткових побудов або за введенням допоміжних величин під час розв'язування задачі, або за розглядом допоміжних елементів тощо. Головна мета — домогтися усвідомлення учнями того, що існують різні підходи (методи) до розв'язування геометричних задач [2]. Доцільно вивчати різні методи розв'язування геометричних задач у формі уроків однієї задачі.

Розглянемо задачу з підручника 8 класу, яку можна розглядати в 9 класі під час вивчення координатного та векторного методу.

**Задача.** Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам. [6]

### I метод (координатний).

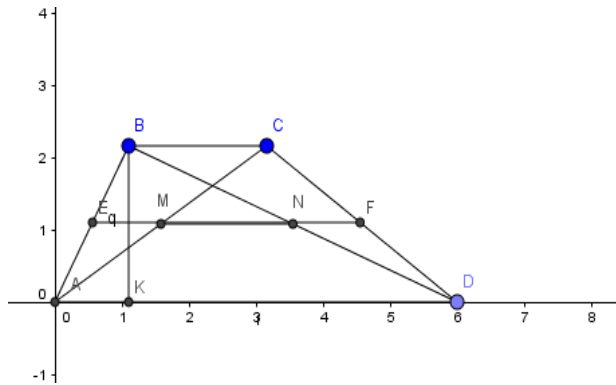


Рис.1

Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь  $OX$  співпала з  $AD$ , а  $OY$  була паралельна висоті трапеції  $BK$ , як показано на рис 1. Нехай  $AD = a, BC = b, OB = c, BK = h$ . З  $\triangle AKB$  за теоремою Піфагора маємо  $AK = \sqrt{c^2 - h^2}$ . Тоді координати точок будуть наступними:  $A(0;0), D(a;0), B(\sqrt{c^2 - h^2};h), C(\sqrt{c^2 - h^2} + b;h)$ .

Оскільки точки  $M$  і  $N$  – середини відповідно сторін  $AC$  і  $BD$ , то їх координати:  $M\left(\frac{\sqrt{c^2 - h^2} + b}{2}; \frac{h}{2}\right), N\left(\frac{\sqrt{c^2 - h^2} - a}{2}; \frac{h}{2}\right)$ . Координати вектора  $MN$   $\left(\frac{b-a}{2}; 0\right)$ , а це означає що він колінеарний вектору, який містить відрізок  $EF$ , який є середньою лінією. Отже,  $MN \parallel AD$ .

Для розв'язання задач цим методом учням необхідно проаналізувати умову, коректно обрати систему координат та пригадати теоретичні відомості про метод координат.

### II метод (векторний).

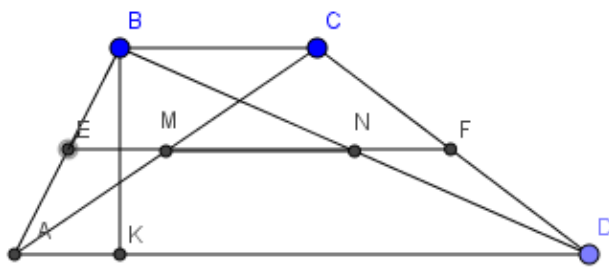


Рис.2

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \\
 &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}). \\
 \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}), \text{ отже, } MN \parallel AD.
 \end{aligned}$$

Задачу можна пропонувати учням при вивченні векторного методу та на уроці узагальнення та систематизації знань з розділу про вектори, оскільки для розв'язання цієї задачі необхідно пригадати основні теоретичні відомості з даної теми.

### III метод

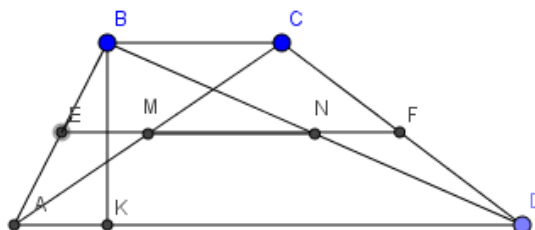


Рис. 3

За теоремою Фалеса: середня лінія  $EF$  трапеції  $ABCD$  проходить через середини  $AC$  і  $BD$ , відповідно,  $MN \in EF$  і  $MN \parallel AD$ .

Даний спосіб розв'язування актуальний у 8 класі, зважаючи на вже набуті знання учнів. Крім того, для даної задачі, він є найбільш зручнішим.

Як бачимо, що одну задачу можна розв'язати декількома методами з використанням різних теоретичних знань з геометрії, що підвищує ефективність викладання, поглиблює знання учнів та вчить їх застосовувати попередньо набуті знання в нестандартних ситуаціях. Крім того, задача є

прикладом того, як одне й теж саме завдання в різних класах і для різних тем може класифікуватись за різним рівнем складності (для 8 класу – базова, на закріплення поняття, у 9 класі – застосування знань у нестандартних ситуаціях).

**Висновки.** Існують різні методи розв’язування задач з геометрії, які розглядаються в шкільному курсі. Використання та вивчення таких методів як координатний, векторний, метод площ необхідне оскільки такий підхід розширює коло розглянутих учнями задач, формує вміння аналізувати та використовувати раніше набуті знання в конкретних ситуаціях.

### Література

1. Вересова Е.Е. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для институтов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. – М. : Просвещение, 1979. – 240 с.
2. Власенко К. Формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії / К.Власенко // Рідна школа. – 2003. – № 7. – С. 41-43
3. Ігнатенко М. Одна геометрична задача крізь різні розділи / Микола Ігнатенко, Лідія Кобко // Математика в сучасній школі. – 2013. – №4. – С.4-8.

***Анотація.** У статті був проведено аналіз основних методів розв’язування задач з геометрії, які розглядаються в шкільному курсі геометрії. Аналіз підручників та наукової літератури засвідчив про те, що питання про класифікацію та дослідження основних методів розв’язування задач є досить широким. Найбільшу увагу в шкільному курсі геометрії приділяється увага координатному та векторному методу розв’язування задач. Вказані методи можна презентувати на уроках геометрії 9 класу, одним з способів вивчення методів може бути урок однієї задачі.*

**Ключові слова:** задачі, методи розв’язування, способи розв’язування, координатний метод, векторний метод.

**Abstract.** The article analyzed the main methods of solving problems of geometry that are discussed in the school course of geometry. Analysis of textbooks and scientific literature showed that the classification and study of basic methods of solving problems is very broad. Most attention in the school geometry course focuses coordinate and vector methods of solving problems. These methods can be present in the classroom geometry in grade 9, one of the ways of learning methods can be a lesson of a problem.

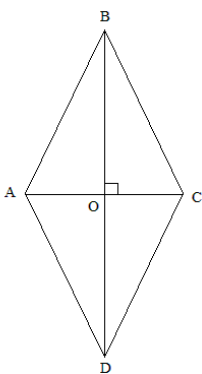
**Keywords:** problem solving methods, methods of solving, coordinate method Vector method.

## УРІЗНОМАНІТНЕННЯ СПОСОБІВ ДОВЕДЕНЬ ТЕОРЕМ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

На сучасному етапі розвитку освіти в Україні навчання математики в основній школі передбачає формування математичної компетентності, яка включає, зокрема, розуміння учнями математичної символіки, формування умінь логічно обґрунтовувати та доводити твердження, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в повсякденному житті.

Важливою умовою формування математичної компетентності учнів при навчанні геометрії є володіння різними методами доведень теорем, розв'язування задач та вміння обрати потрібний. Так, під час вивчення теми «Чотирикутники» (8 клас) властивості паралелограма, прямокутника, ромба тощо учні можуть встановити самостійно, аналізуючи наочний матеріал. Разом з тим треба вміти довести усі властивості вказаних чотирикутників [6, с.94].

Розглянемо це на прикладі твердження «Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом», з яким учні вперше зустрічаються при вивченні теми «Ромб та його властивості» [1; 2; 3; 4]:



І спосіб доведення. Нехай діагоналі ромба ABCD перетинаються в точці O. Оскільки сторони ромба рівні, то трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. BO – медіана, бісектриса і висота  $\triangle ABC$ . Отже, діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом» [1, с. 26].

Разом з тим, на уроці можна розглянути й інший спосіб доведення вказаної властивості ромба.

Нехай  $\angle BAD = \alpha$ ,  $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$  (сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба рівна  $180^\circ$ ). Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, бо  $\triangle ABO = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$  (за III ознакою рівності:  $AB = BC = CD = AD$ , як сторони

ромба,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ , діагоналі точкою перетину діляться навпіл).

$$\text{Тобто } \angle BAO = \angle OAD = \frac{\alpha}{2} ; \quad \angle ABO = \angle BOC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Розглянемо  $\Delta ABO$ : Нехай  $\angle AOB = \beta$ , тоді:  $\beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ , (як сума внутрішніх кутів трикутника),  $\beta = 90^\circ$ , отже,  $BD \perp AC$ , що і треба було довести.

У проаналізованих підручниках наголошується, що визначити чи є паралелограм ромбом можна не лише за означенням ромба, але й за теоремами, які називаються ознаками. Так, ознаку «Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм – ромб» пропонується учням довести самостійно

У підручнику [5, с.155] вказана властивість ромба розглядається як задача № 42 «Доведіть за допомогою векторів, що діагоналі ромба перпендикулярні».

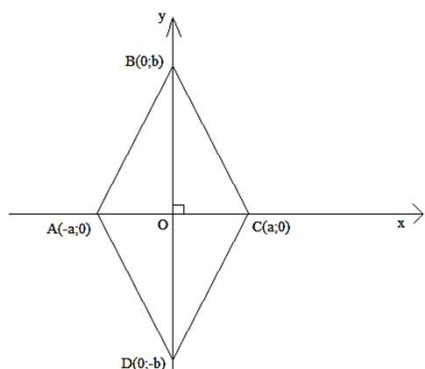
III спосіб. Введемо систему координат з початком в точці  $O$  – точці перетину діагоналей  $BD$  і  $AC$ . Тоді вздовж діагоналі  $BD$  пройде вісь ординат, а вздовж діагоналі  $AC$  – вісь абсцис.

Нехай  $C(a; 0)$ , а  $B(0; b)$ , тоді  $A(-a; 0)$ ,  $D(0; -b)$ .

Щоб довести, що діагоналі ромба перпендикулярні треба довести, що кут між векторами  $\overrightarrow{OB}$  і  $\overrightarrow{OC}$  рівний  $90^\circ$ .

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, матимемо:

$$\cos[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}.$$



Знайдемо координати векторів

$$\overrightarrow{OC}(a; 0), \overrightarrow{OB}(0; b), \text{ тоді } |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{a^2} = a;$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b^2} = b, \quad \cos[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] =$$

$$\frac{a \cdot 0 + 0 \cdot (-b)}{a \cdot b} = 0.$$

Тобто, косинус кута  $\angle BOC$  рівний нулеві, а отже,  $\angle BOC = 90^\circ$ .

На думку відомого українського методиста З. І. Слєпкань, при доведенні вказаного твердження векторним методом у 9 класі слід звернути увагу учнів на те, що цей метод не універсальний, однак його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в заданому відношенні, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів [6, с.321].

Отже, доведення теорем та розв'язування задач різними способами привчає учнів: творчо мислити; самостійно висувати та перевіряти гіпотези; раціонально планувати пошук розв'язування задачі; порівнювати та аналізувати отримані результати; пізнавати основні методи розв'язування задач, складові евристичних алгоритмів тощо.

### Література

1. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвіт. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2008. — 272 с.
2. Істер О. С. Геометрія: Підручник для 8 кл. загальноосвітніх навч. закл. / О. С. Істер. — К.: Генеза, 2016.— 272 с.
3. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвітніх навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. В. Полонський, М. С. Якір. Х.: Гімназія, 2016. — 208 с.
4. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. В. Полонський, М. С. Якір. Х.: Гімназія, 2016. — 223 с.
5. Погорєлов О.В. Геометрія:Планіметрія: Підруч. для 7-9 кл. загальноосв. закл. — 7 вид. / О. В. Погорєлов. — К.: Школяр, 2004. — 240 с.
6. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. — 2-ге вид., доповн. і переробл. / З. І. Слєпкань. —К.:Вища школа, 2006. — 582 с.

**Анотація.** У статті проілюстровано використання різних способів доведення однієї з властивостей діагоналей ромба. Зазначено, що важливою умовою формування математичної компетентності учнів при навчанні геометрії є володіння різними методами доведень теорем, розв'язування задач та вміння обрати потрібний

**Ключові слова:** способи доведення теорем, чотирикутник, ромб.

**Abstract.** The thesis illustrates the use of different methods of communicating the properties of the diagonals of the rhombus to diversify the educational process and the development of logical thinking.

**Keywords:** way to prove theorems, solving, rectangle, diamond.

## МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

*Хто з дитячих років займається математикою, той розвиває увагу, тренує свій мозок, свою волю, виховує наполегливість і завзятість у досягненні мети.*

*О. Маркушевич*

Однією із найважливіших якостей мислення є його логічність, здатність робити правильні висновки, знаходити правильні взаємозв’язки. Ця важлива якість виникає і розвивається у процесі вивчення математики, у процесі розв’язування задач. Вивчення математики, розв’язання задач розвивають здібність здогадуватися, передбачати результат, здібність шукати правильний шлях в найзаплутаніших умовах. Прочитавши задачу, не виконуючи ніяких дій, учень має підібрати найбільш раціональний спосіб. Таке вміння формується в процесі розв’язання однієї і тієї ж задачі різними методами. Розв’язуючи одну і ту ж задачу різними методами, можна краще зрозуміти специфіку того чи іншого методу, його перевагу і недоліки. Розв’язування задачі різними методами – це захоплююча робота, що вимагає знання усіх розділів шкільної математики. Така форма роботи дає можливість узагальнити та систематизувати знання учнів і буде корисною під час підготовки до ЗНО.

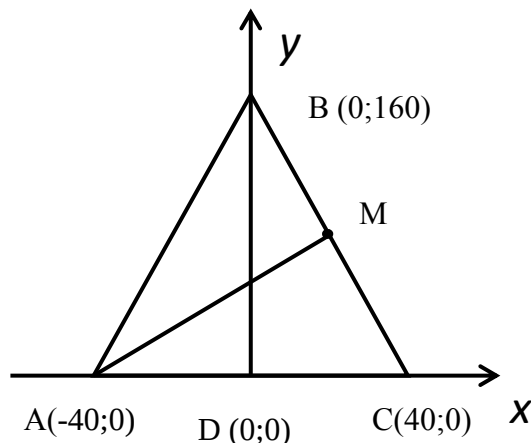




### Задача

Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 160 см, основа трикутника дорівнює 80 см. Знайти дві інші медіани трикутника [2].

#### I спосіб



Дано:  $\triangle ABC$  – рівнобедрений,  $AB=BC$ ,  $BD$  – медіана,  $BD=160$  см,  $AC=80$  см,  $AM$  – медіана.

Знайти:  $AM$ .

#### Розв'язання:

Медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні. Тому достатньо знайти одну медіану.

- 1) Виберемо прямокутну систему координат. Вісь  $Ox$  спрямуємо вздовж сторони  $AC$ , вісь  $Oy$  – вздовж медіани  $BD$ . Точка  $D$  співпадає з початком координат.
- 2) Тоді  $C(40;0)$ ,  $A(-40;0)$ ,  $B(0;160)$ .
- 3) Точка  $M$  – середина відрізка  $BC$ . Знайдемо координати точки  $M$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 40}{2} = 20; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{160 + 0}{2} = 80.$$

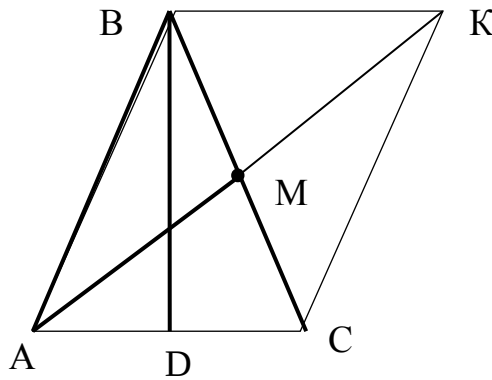
$M(20;80)$

$$2) AM = \sqrt{(20 - (-40))^2 + (80 - 0)^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{10000} = 100.$$

Отже,  $AM=100$  см.

Відповідь: 100 см.

#### II спосіб



Розв'язання:

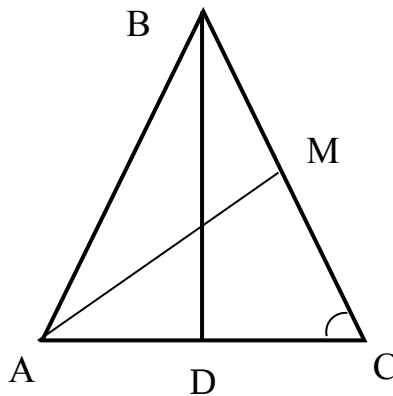
Медіана BD рівнобедреного трикутника є висотою,  $BD \perp AC$ .

$$AD = \frac{1}{2}AC = 40 \text{ см. З } \triangle ABD (\angle ADB = 90^\circ) AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}; AB = \sqrt{40^2 + 160^2} = \sqrt{1600 + 25600} = \sqrt{27200} = 40\sqrt{17} \text{ (см).}$$

Проведемо  $BK \parallel AC$  і  $CK \parallel AB$ . Утворився паралелограм ABKC, AK і BC – діагоналі.  $AK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ ;  $AK = 2AM$ ,  $BC = AB = 40\sqrt{17}$  см.  $AM = \frac{\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{2((40\sqrt{17})^2 + 80^2) - (40\sqrt{17})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(27200 + 6400) - 27200}}{2} = 100 \text{ (см).}$

Відповідь: 100 см.

### III спосіб



Медіана BD рівнобедреного трикутника ABC є висотою.

$$AD = CD = \frac{1}{2}AC = 40 \text{ см. З } \triangle BDC (\angle BDC = 90^\circ) BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{160^2 + 40^2} = \sqrt{27200} = 40\sqrt{17} \text{ (см).}$$

$$\cos \angle C = \frac{CD}{BC} = \frac{40}{40\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}. \text{ З } \triangle AMC \text{ за теоремою косинусів}$$

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC \cos \angle C. \quad MC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 40\sqrt{17} = 20\sqrt{17} \text{ (см). } AM = \sqrt{AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC \cos \angle C};$$

$$AM = \sqrt{80^2 + (20\sqrt{17})^2 - 2 \cdot 80 \cdot 20\sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{6400 + 6800 - 3200} = \\ = \sqrt{10000} = 100 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 100 см.

### Література

1. Нелін Є.П. Геометрія: дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів: академ. і профільн. рівні / Нелін Є.П. – Х.: Гімназія, 2010. – 240с.
2. Тарасов В.А. Применение метода координат в решении задач. – <https://www.youtube.com>

**Анотація.** Статтю присвячено методам розв’язування планіметричних задач. На прикладі однієї задачі розглянуто координатний метод, метод “ключового” трикутника. Головна мета цієї статті - показати як, розв’язуючи одну задачу, можна повторити декілька теоретичних питань. Стаття буде корисна учителям та учням, які планують здавати ЗНО з математики.

**Ключові слова:** методи розв’язування планіметричних задач, координатний метод, метод “ключового” трикутника.

**Annotation.** The article is devoted to the solution method of planimetric problems. In the context of solving one task coordinate technique, method of “key” triangle, was considered. The aim of the article is to show how several theoretical questions can be revised while solving one problem. The article will be useful for teachers and pupils who are going to take External Independent Testing in Mathematics.

**Key words:** solution methods, coordinate technique, method of “key” triangle.

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Одним із шляхів підвищення активізації учнів в процесі навчання геометрії може стати повторення набутих знань учнів з геометрії за допомогою розв'язування однієї задачі різними способами. При цьому учні мають можливість ґрунтовніше дослідити властивості геометричних фігур, краще пізнати специфіку того чи іншого методу, його переваги і недоліки перед іншими.

Підтвердженням цього є розв'язування задачі «Доведіть, що площа трикутника  $ABC$  обчислюється за формулою  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – довжини сторін трикутника», (відомої як формула Герона), яку можна розглянути з учнями 9 класу після вивчення теми «Теорема косинусів».

### І спосіб.

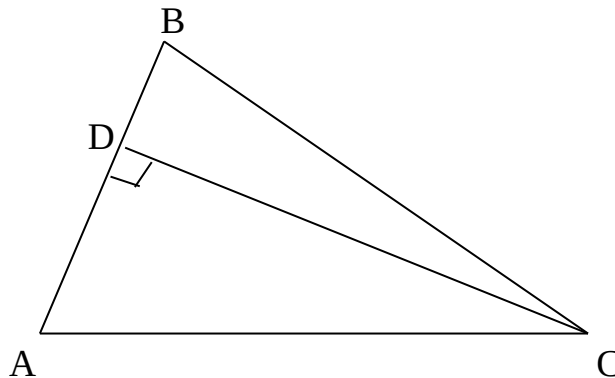


Рис. 1

Нехай в трикутнику  $ABC$  кути  $A$  і  $B$  гострі,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Проведемо висоту  $CD$  трикутника (рис. 1). Позначимо  $CD = h$ ,  $AD = x$ , тоді  $BD = c - x$ . За теоремою Піфагора:  $h^2 = b^2 - x^2$ ,  $h^2 = a^2 - (c - x)^2$ .

Прирівняємо дані рівності і виразимо:  $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ ,

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

Отриманий для  $h$  вираз перетворимо наступним чином:

$$h^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Нехай  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , тоді  $h^2 = \frac{4}{c^2} p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

Використаємо формулу  $S = \frac{1}{2}ch$ , отримаємо:

$$S = \frac{1}{2}c \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**II спосіб.**

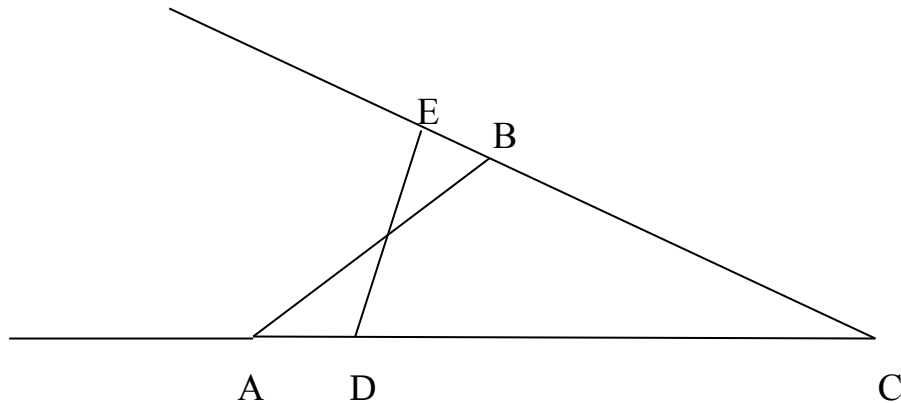


Рис. 2

Нехай  $ABC$  – даний трикутник. Побудуємо на променях  $CA$  і  $CB$  відповідно точки  $D$  і  $E$  так, що  $CD = CE = \sqrt{ab}$  (рис. 2). Використаємо формулу

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \text{ площа трикутника } CDE \text{ рівна площі трикутника } ABC.$$

Застосуємо теорему косинусів до трикутників  $CDE$  і  $ABC$ .

$$\text{Отримаємо: } DE^2 = (\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{ab})^2 - 2\sqrt{ab}\sqrt{ab}\cos C = ab + ab - 2ab\cos C.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2.$$

$$\text{Звідси } DE^2 = 2ab - a^2 - b^2 + c^2 = c^2 - (a-b)^2, \text{ нехай } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ тоді}$$

$$DE = \sqrt{c^2 - (a-b)^2} = \sqrt{(c-a+b)(c+a-b)} = 2\sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

За теоремою Піфагора знайдемо висоту  $CF$  трикутника  $CDE$ :

$$CF = \sqrt{CE^2 - EF^2} = \sqrt{CE^2 - \left(\frac{DE}{2}\right)^2} = \sqrt{p(p-c)}.$$

$$\text{Відповідно, } S = \frac{1}{2} DE \cdot CF = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**III спосіб.** Використаємо теорему косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C) = (a+b)^2 - 4ab \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{Нехай } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ тоді } \cos \frac{C}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

$$\text{Аналогічно знаходимо, що } \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

$$\text{Відповідно, } S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = ab \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [1, \text{ с.}$$

81].

**Висновки.** Процес навчання розв'язувати геометричні задачі різними способами дає вчителю можливість спонукати учнів до більш вдумливого вивчення геометрії, а учням більш повно дослідити властивості геометричних фігур чи одержати цікаве узагальнення задачі і т.д.

### Література

1. Готман Э. Г., Скопец З. А. Задача одна – решения разные / Э. Г. Готман, З. А. Скопец. – К.: Рад. шк., 1988. – 173 с. – (Сер. «Когда сделаны уроки»).
2. Рахымбек Д. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство различными способами / Д. Рахымбек, А. А. Юнусов, А. А. Юнусова, Н. Ж. Айтбаева. //Международный журнал экспериментального образования. – 2013. – № 4-2. – С. 48-53. – [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=3615>

**Анотація.** У даній статті наведені приклади розв'язання різними способами геометричної задачі на доведення.

**Ключові слова:** геометрія, спосіб, площа, трикутник.

**Annotation.** This article gives examples of different ways of solving the geometric problem on the proof.

**Keywords:** geometry, way, square, triangle.

## **РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА**

У даній статті ми розглянемо способи доведення властивості бісектриси трикутника, які пропонуються учням 8 класу, а також способи, які не вивчаються в школі. Також обґрунтуємо можливість кожного із способів.

Трикутник є найпростішою геометричною фігурою, тому відомо багато теорем про його елементи, одним із яких є бісектриса. Бісектриса трикутника — це відрізок бісектриси одного з кутів цього трикутника від вершини кута до точки перетину з протилежною стороною.

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам, а саме на відрізки, відношення яких дорівнює відповідно відношенню прилеглих до них двох інших сторін трикутника [1].

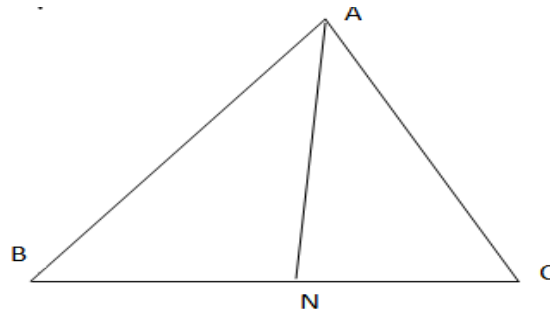
Властивість бісектриси трикутника вивчається у 8 класі. Різні автори підручників з геометрії по різному подають властивість бісектриси трикутника – одні як теорему, інші як задачу. У підручниках «Геометрія 8 клас» авторського колективу А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов, а також «Геометрія 8 клас» авторського колективу М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова, ця властивість представлена у вигляді теореми, яку доводять за допомогою додаткової побудови. Доведення є неважким і зрозумілим для учнів 8 класу [4,с.136].

Інший спосіб доведення даної властивості представлений у підручниках: «Геометрія 8 клас» автором якої є О.С. Істер та «Геометрія 8 для класів з поглибл. вивч. математики» авторського колективу А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. У процесі доведення, використовується додаткова побудова, але у вигляді продовження однієї із сторін трикутника. І таке доведення цієї властивості, також є нескладним та доступним для учнів 8 класу [2, с.100].

Властивість бісектриси трикутника можна доводити ще й і іншими способами такими як: векторний метод, координатний метод, доведення за допомогою теореми синусів, формул площі трикутника, метод геометричних перетворень. Сформулюємо дану властивість у вигляді задачі та детальніше розглянемо деякі з перерахованих вище способів.

Задача. З вершини  $A$  трикутника  $ABC$ , проведено бісектрису  $AN$ .

Доведіть, що  $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$ .



Спосіб № 1. ( За допомогою теореми синусів)

Застосувавши до трикутників  $ABN$  і  $NAC$  теорему синусів, матимемо:

$$\frac{AB}{\sin \angle ANB} = \frac{BN}{\sin \angle BAN}, \quad (1) \quad \frac{AC}{\sin \angle ANC} = \frac{NC}{\sin \angle NAC}. \quad (2)$$

Врахувавши властивість бісектриси, та те, що  $\sin \angle ANC = \sin(180^\circ - \angle ANB) = \sin \angle ANB$ , то тоді отримаємо:

$$\frac{AC}{\sin \angle ANB} = \frac{NC}{\sin \angle BAN}. \quad (3)$$

Поділивши почленно вираз (1) на вираз (3) і спростивши, отримаємо рівність, яку потрібно було довести.

Спосіб № 2 (Векторний метод).

На сторонах трикутника  $ABC$  задаємо векторний базис. Для цього на сторонах  $AB$  і  $AC$  виберемо одиничні вектори  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ , оскільки ці вектори не колінеарні, то вони утворюють базис. Увівши позначення, матимемо:  $\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{e}_1$ ,  $\overrightarrow{AC} = y \cdot \vec{e}_2$ , і  $\overrightarrow{BN} = k \cdot \overrightarrow{NC}$ , де  $k$  - додатне дійсне число. То тоді



$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$  перепишемо у вигляді:  $\frac{x}{y} = k$ . Так як,  $AN$  – бісектриса, то вектор

$\overrightarrow{AN}$  запишеться так:  $\overrightarrow{AN} = t(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$ , де  $t$  – дійсне додатне число. Далі

розклавши вектори  $\overrightarrow{BN}$  і  $\overrightarrow{NC}$  за цим базисом і врахувавши, що  $\overrightarrow{BN} = k \cdot \overrightarrow{NC}$ ,

отримаємо рівність:  $(t-x)\overrightarrow{e_1} + t\overrightarrow{e_2} = k(-t\overrightarrow{e_1} + (y-t)\overrightarrow{e_2})$ . Спростивши, матимемо:

$(t-x+kt)\overrightarrow{e_1} + (t-ky+kt)\overrightarrow{e_2} = \vec{0}$ . Потім, з того, що дана рівність справедлива

тільки, тоді, коли коефіцієнти біля векторів  $\overrightarrow{e_1}$  і  $\overrightarrow{e_2}$  рівні нулеві, потрібно

розв'язати таку систему: 
$$\begin{cases} t-x-kt=0, \\ t-ky+kt=0. \end{cases}$$
 Після чого ми повернувшись до

заміни, отримаємо рівність, яку потрібно було довести.

### Спосіб № 3. (За допомогою формул площі трикутників)

Бісектриса  $AN$  поділила трикутник  $ABC$  на два менші трикутники  $ANB$  і  $NAC$ . Обчисливши їхні площі за формулою площі половини добутку бічних сторін трикутника на синус кута між цими сторонами, а потім поділивши дві цих рівності одна на одну і врахувавши, що  $\angle BAN = \angle NAC$ , отримаємо:

$$\frac{S_{\square ANB}}{S_{\square NAC}} = \frac{AB}{AC}. \text{ Далі знайшовши площі цих трикутників за допомогою}$$

формул площі половини добутку висоти на основу, а потім поділивши дві цих

рівності одна на одну, матимемо: 
$$\frac{S_{\square ANB}}{S_{\square NAC}} = \frac{BN}{NC}.$$

Тоді з двох останніх рівностей випливає, що  $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$  [3, с.24].

Отже, ми розглянули різні способи доведення властивості бісектриси трикутника, які пропонуються учням 8 класу, а також способи, які не вивчаються в школі. Та вони не вичерпують можливих варіантів роботи над задачею. Майже кожна задача з шкільного курсу математики допускає два чи

кілька способів розв'язування. Завдяки таким задачам учні стають допитливими та самостійними.

### Література

- 1) Властивість бісектриси трикутника [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://subject.com.ua/master/Geometry/lesson03.html>.
- 2) Істер О.С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч закл. / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 216 с.
- 3) Освіта як простір взаємодії учителя та учня // Пост методика. – 2010. – №2(93).
- 4) Єршова А.П. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч закл. / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Харків: Вид-во «Ранок», 2016. – 256 с.

***Анотація.** У статті представлені способи доведення властивості бісектриси трикутника, які пропонують автори різних підручників з геометрії, та доведення за допомогою теореми синусів, з використанням формул на знаходження площ трикутників та векторний метод.*

***Ключові слова:** властивість бісектриси трикутника, способи доведення, додаткова побудова, векторний метод, теорема синусів, формули площ трикутника.*

***Abstract.** The paper presents the methods of proof properties bisectors triangle which offer authors of various books on geometry and proof using law of sines, using formulas to find the areas of triangles and vector method. The conclusion, which shows the importance and usefulness of the use of each of the proposed methods of proof.*

***Keywords:** property bisectors triangle methods of proof, additional construction, vector method, law of sines, squares triangle formula.*

*Шайтанов Максим Сергійович*  
*Бердянський державний педагогічний університет,*  
*студент магістратури*

## **ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ**

В сучасному інформаційному суспільстві широко використовуються інформаційно-комунікаційні технології. Нинішні учні все частіше користуються мобільними телефонами, планшетами та іншими гаджетами, проводячи багато часу спілкуючись у соціальних мережах або граючи в ігри, хоча можливості у використанні даних сучасних засобів набагато ширші. Як показує досвід розвинених зарубіжних країн, впровадження в навчальний процес «хмарних обчислень» є відмінним вирішенням проблем комп'ютеризації освіти.

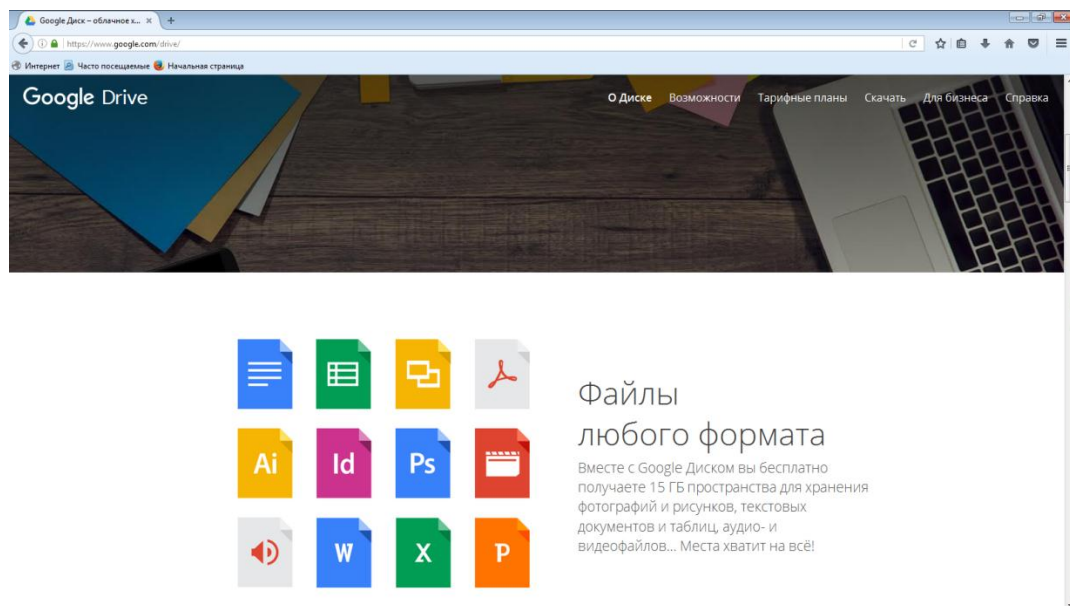
Використання такого навчального середовища, яке було б насичене різноманітними електронними ресурсами, значно підвищує інтерес учнів до навчання в цілому, створює умови для розвитку дитини, а також активізує пізнавальну діяльність школярів. Реалізація всього вище переліченого можлива за умови використання сучасних хмарних технологій.

Хмарні технології (англ. cloud technologies) – це кардинально новий сервіс, який дозволяє віддалено використовувати засоби обробки і зберігання даних [1]. Хмарні технології забезпечують виконання багатьох видів навчальної діяльності, контролю і оцінювання навчальних досягнень учнів, тестування он-лайн, відкритості освітнього середовища, економію коштів на утримання технічних фахівців.

Використання хмар дає можливість вчителю розробити банк теоретичних матеріалів без необхідності чекати на підручники, котрих може не вистачати у деяких школах. При чому, спосіб подання матеріалу не обмежується лише текстовою формою. У вчителя є можливість подати матеріал у вигляді: презентацій, електронних карток, динамічних схем, графіків, мап, тощо, або

навіть записати на відео повноцінні лекції з відкритим доступом і можливістю переглянути матеріал у будь-який зручний для учня час. Особливо цей вид подання буде актуальний у випадку необхідності використання дистанційного навчання або для учнів, котрі пропустили заняття у зв'язку із хворобою.

Наприклад, учитель може розробити блочну систему на базі хмарних технологій, в рамках якої теоретичний матеріал буде викладений у вигляді відеоуроків. Після кожного відео подаються завдання, тільки після виконання яких можна перейти до наступного відеоматеріалу. А у кінці теми можна розгорнути підсумкову перевірку знань. Такі можливості може надати найбільш розповсюджений і найбільш доступний хмарний сервіс: GoogleDrive (див. Рис.1)- безкоштовний онлайн-офіс, що включає в себе: текстовий, табличний процесор і сервіс для створення презентацій, а також інтернет-сервіс хмарного зберігання файлів з функціями файлообміну.



*Рис.1 Стартова сторінка сервісу GoogleDrive*

Це веб-орієнтоване програмне забезпечення, тобто програма, що працює в рамках веб-браузера без інсталяції на комп'ютер користувача. Документи і таблиці, створювані користувачем, зберігаються на спеціальному сервері Google або можуть бути експортовані в файл. Це одна з ключових переваг програми, оскільки доступ до введених даних може здійснюватися з будь-якого комп'ютера, підключеного до Інтернету.

Розглянемо, наприклад, задачу: «У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см. З вершини на основу провели перпендикуляр довжиною 12 см. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони» (10 клас). Її можна розв'язати кількома способами: використовуючи властивість медіан або побудови, координатним методом, векторним способом або за теоремою косинусів. Зважаючи на тривалість уроку, часу на те, щоб розглянути і закріпити декількома задачами кожен зі способів розв'язування не вистачить.

У випадку використання хмарного сервісу GoogleDrive вчитель може розглянути на уроці лише кілька методів розв'язування і закріпити 2-3 задачами кожен, наприклад: використовуючи властивість медіан, координатним методом, за теоремою косинусів, а в позаурочний час за попередньою домовленістю можна розглянути інші методи: використовуючи побудови, векторним способом. Організувати такий вид діяльності можна у такому форматі: учні отримують посилання на ресурс, в якому вчитель, зробивши відповідні побудови засобами сервісу, демонструє (можливо навіть у вигляді анімації) в умовах запропонованої задачі розв'язування за іншими методами (використовуючи побудови, векторним способом). Після демонстрації можна налаштувати онлайн обговорення розв'язань у вигляді чату або навіть використовуючи голосовий зв'язок, наприклад за допомогою RaidCall, котрий також є і як додаток для смартфонів. Таким чином часові рамки класичного уроку розширюються, при чому якість подання матеріалу не втрачається, а може навіть і підвищується за рахунок наочності і заінтересованості учнів під час використання хмарних сервісів.

Отже, використання хмарних технологій дозволить урізноманітнити навчальний процес, зробити його ефективнішим, більш сучасним, розширити спектр доступних вчителю способів взаємодії з учнями, індивідуалізувати процес навчання без утрати часу, дозволить розробити персональну інформаційну базу вчителя яка дасть можливість автоматизувати процес навчання, а також використання хмарних сервісів позитивно вплине на мотивацію навчальної діяльності учнів.

## Література

1. Архіпова Т. Л. Інформаційні технології в освіті / Т. Л. Архіпова. – 2013. – С. 99 – 108.
2. Быховский Я. С. Учим и учимся с Веб 2.0. Быстрый старт. Руководство к действию / Я. С. Быховский, А. В. Коровко, Е.Д. Патаракин и др. – М: Интуит.ру, 2007. – С. 47 – 59.
3. Шокалюк С. В. Хмарні технології у загальноосвітніх навчальних закладах / С. В. Шокалюк, І. С. Закарлюка [Електронний ресурс] – <http://tmn.ccjournals.eu/index.php/cte/2013/paper/downloadSuppFile/68/51>

***Анотація.** У статті розглянуто використання хмарних сервісів у педагогічній діяльності вчителя математики, представлені конкретні приклади використання хмарних сервісів на уроках математики і в позаурочний час, представлено один з найбільш розповсюджених хмарних сервісів, таких як GoogleDrive.*

***Ключові слова:** хмарні сервіси, математична освіта, онлайн сервіси, GoogleDrive, веб-орієнтоване програмне забезпечення.*

***Abstract.** In the article discussed about using cloud services in educational activities teachers of mathematics, presented examples of cloud services on mathematics lessons and after the school, presented one of the most popular cloud services such as GoogleDrive.*

***Keywords:** cloud services, mathematical education, online services, GoogleDrive, web-oriented software.*

*Шалавінська Вікторія Олександрівна  
Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, студентка 4 курсу*

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ ЯК ЗАСІБ  
УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ УЧНІВ З  
ТЕМИ: «ЧОТИРИКУТНИКИ»**

**Вступ.** Збільшення розумового навантаження учнів на уроках математики приводить до того, що вчителі все частіше розмірковують над тим, як підтримати в учнів зацікавленість до вивчення матеріалу, їх активність протягом усього уроку, як зробити так, щоб всі учні засвоїли основний рівень підготовки, а більшість з них засвоїли навчальний матеріал на творчому рівні. У зв'язку з цим стає актуальним застосування в роботі вчителя ефективних методів, які активізують розумову діяльність учнів, стимулюють їх до самостійного здобуття знань.[2]

Задачі є найважливішим засобом формування в учнів системи нових математичних знань, умінь і навичок, провідною формою навчальної діяльності учнів у процесі вивчення математики, засобом їх математичного розвитку. Розв'язуючи математичні задачі, учні не тільки оволодівають змістом курсу математики, а й набувають вміння мислити творчо. Це виявляється, наприклад, в умінні змінити умову задачі з метою застосувати той чи інший метод, прийом, в умінні виділяти і накопичувати корисну інформацію, в умінні конструювати на базі відомих задач нові, в умінні здійснювати самоконтроль, досліджувати результат розв'язку і т. п.[1]

**Мета даної статті** розглянути можливості використання задач, що розв'язуються кількома способами, на уроках узагальнення і систематизації знань, умінь і навичок.

**Виклад основного матеріалу.** Чашечникова О.С. зазначає, що розв'язування задач різними способами привчає дітей самостійно висувати гіпотези і перевіряти їх, порівнювати результати, доходити висновків, а головне, вона вчить мислити. Можливість свідомо знаходити оптимальний

розв'язок сприяє виробленню в учнів навичок мислення високого рівня. А це разом із творчими здібностями – важлива якість, необхідна кожній людині як у дослідницькій, так і в практичній діяльності.[3]

Керівна роль вчителя під час пошуку інших варіантів розв'язування дуже важлива. Він сам повинен добре розв'язувати задачі, знати наперед, скількома способами можна знайти відповідь у кожній з них, ефективно використовувати при цьому час уроку. Як правило, пошуки різних способів розв'язування дуже зацікавлюють учнів, особливо здібних до математики. Поки вчитель розв'язує задачу одним способом з рештою класу, здібні до математики діти вже встигають знайти кілька інших способів. Розв'язування задач різними способами веде до розвитку вмінь всебічно аналізувати задану задачу.[1]

Розв'язування задач різними способами дає змогу:

- активізувати пізнавальну діяльність учнів;
- розвивати гнучкість мислення та здатність прогнозувати;
- обрати найраціональніший спосіб розв'язання;
- перевірити правильність розв'язання даної задачі;
- сприяти мобілізації всіх знань учнів, виявленню винахідливості й оригінальності мислення;
- систематизувати й узагальнити навчальний матеріал, установити міжпредметні зв'язки;
- отримати моральне задоволення учневі, який знайшов інший спосіб розв'язання задачі.[1]

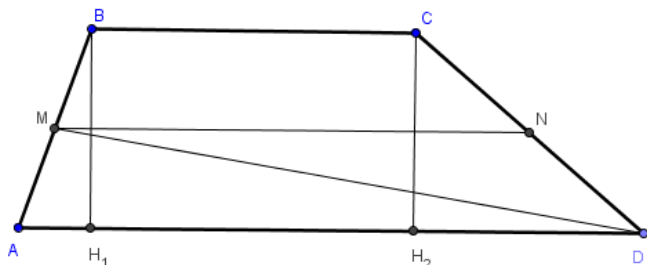
Часто вчителі проводять уроки однієї задачі з метою узагальнити та систематизувати знання учнів з окремої теми чи розділу, навчити дітей помічати різні варіанти розв'язування. Побачити такі уроки ми мали можливість під час проходження педагогічної практики у фізико-математичній гімназії №17 вінницької міської ради. Вчитель математики Купрієнко Наталя Василівна під час вивчення теми «Чотирикутники» з учнями 8 класу на уроках геометрії розглядала такі задачі:



**Задача 1.** Довжини бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  дорівнюють 8 см і 10 см, а основа  $BC = 2$  см. Бісектриса кута  $ADC$  проходить через середину сторони  $AB$ . Знайдіть площу трапеції.

### **Розв'язання**

#### **1 спосіб**



Нехай  $ABCD$  дана трапеція,  $DM$  - бісектриса кута  $ADC$ ,  $M$  - середина  $AB$ ;  $BC = 2$  см;  $CD = 10$  см,  $AB = 8$  см.

$$\angle MDA = \angle NDM.$$

Розглянемо  $\triangle NDM$  -

рівнобедрений ( $\angle NMD = \angle MDA$ , як внутрішні різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $DM$ . Отже,  $\angle NMD = \angle NDM$ ). Тому  $MN = ND = 5$  см;  $AD = 2MN - BC$ ;  $AD = 8$  см;  $H_1H_2 = 2$  см.

Нехай  $H_2D = x$ , тоді  $H_1D = 6 - x$ .

$$\text{З } \triangle ABH_1: BH_1^2 = AB^2 - AH_1^2 \Rightarrow BH_1^2 = 64 - (6 - x)^2.$$

$$\text{З } \triangle DCH_2: CH_2^2 = CD^2 - H_2D^2 \Rightarrow CH_2^2 = 100 - x^2.$$

Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$100 - x^2 = 64 - (6 - x)^2 \Rightarrow 12x = 72 \Rightarrow x = 6.$$

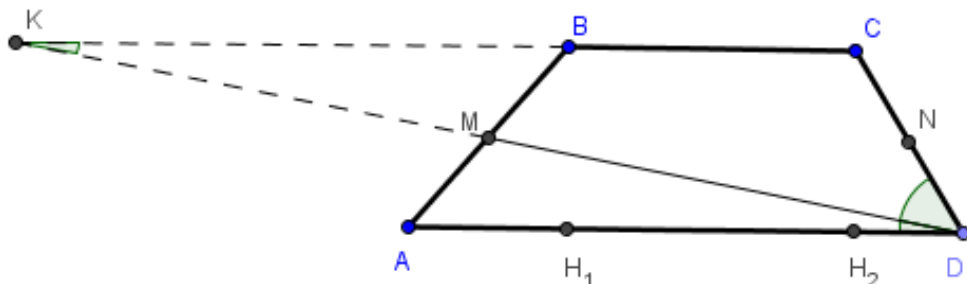
Тому  $H_2D = 6$  см, але  $AD = AH_1 + H_1H_2 + H_2D$ , де  $AD = 8$  см;  $H_1H_2 = 2$  см; звідси  $AH_1 = 0$ .

Тоді  $ABCD$  - прямокутна трапеція, в якій  $\angle A = 90^\circ$ .  $CH = 8$  см;

$$S_{ABCD} = \frac{8+2}{2} \cdot 8 = 40 (\text{см})^2$$

#### **2 спосіб**

Продовжи  
мо основу  $BC$   
до перетину з



бісектрисою  $DM$  в точці  $K$ .

Розглянемо  $\triangle KMB$  і  $\triangle DAM$ :  $\triangle KMB = \triangle DAM$  за стороною та двома прилеглими кутами, оскільки  $\angle BKM = \angle MDA$  (як внутрішні рівносторонні при січній  $KD$ ).

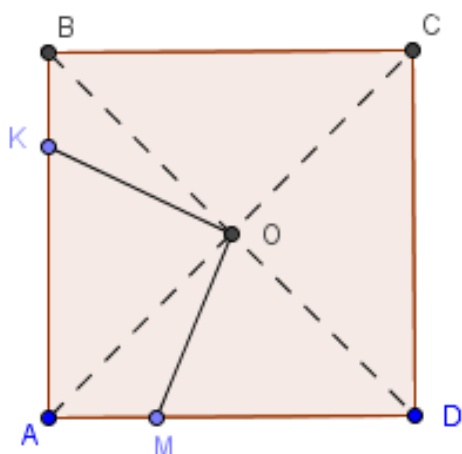
$\angle CDM = \angle ADM = \angle BKM$  отже,  $\triangle KCD$  - рівнобедрений. У ньому  $KC = CD = 10$  см. З рівності трикутників випливає, що  $KB = AD$  та  $KB = KC - BC$ , тобто  $AD = KB = 10 - 2 = 8$  (см).

Далі дивіться попереднє розв'язання.

Відповідь.  $40\text{см}^2$ .

**Задача 2.** На сторонах  $AB$  і  $AD$  квадрата  $ABCD$  позначили точки  $K$  і  $M$  відповідно так, що  $AK + AM = AB$ . Знайти  $\angle KOM$ , де  $O$  – центр квадрата.

1 спосіб:



$$AK + AM = AB; AM = AB - AK;$$

$$AK + KB = AB; KB = AB - AK;$$

Оскільки  $AB - AK = AB - AK$  то  $AM = KB$

1) Розглянемо  $\triangle KOB$  і  $\triangle MAO$ :  
 $\triangle KOB = \triangle MAO$  за двома сторонами  $AM = KB$ ,  $AO = BO$  і кутом між ними  $\angle KBO = \angle MAO$ .

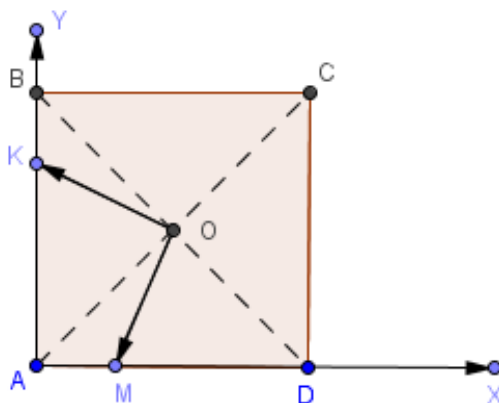
2) Розглянемо чотирикутник  $KOMA$ .

З п. 2 нехай  $\angle KBO = \angle MAO = \alpha$ , тоді  $\angle AKO = \angle AMO = 180^\circ - \alpha$  (як суміжні кути), а  $\angle KAM = 90^\circ$  отже,  $\angle KOM = 360^\circ - 180^\circ + \alpha - \alpha - 90^\circ = 90^\circ$ .

2 спосіб:

Виберемо систему координат так, що дві сторони квадрата лежали на осях абсцис і ординат. Нехай сторона квадрата дорівнює  $a$  см, тоді

$$A(0;0), B(0;a), M(m;0), O\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), D(a;0), K(0;a)$$



Тоді  $\overrightarrow{OK}\left(-\frac{a}{2}; \frac{a-2m}{2}\right), \overrightarrow{OM}\left(m-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ :

$$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(m - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - m\right) = 0$$

Отже,  $OK \perp OM \Rightarrow \angle KOM = 90^\circ$ .

*Відповідь.*  $90^\circ$

**Висновок.** Розв'язування задач різними способами на уроках математики активізує різні аспекти математичної діяльності учнів і є потужним засобом узагальнення та систематизації знань та вмінь з теми. Розв'язуючи математичні задачі різними способами, учні не лише повторюють вивчений матеріал, а й набувають вміння мислити творчо. Вони можуть самостійно підкорегувати умову задачі, не змінивши її основної суті, для того, щоб використати той з методів розв'язання, який являється більш зручним для них в даний момент. Таким чином учні розвивають своє математичне мислення.

#### **Література:**

1. Готман Е. Г. Задача одна - решения разные / Е. Г. Готман, З. А. Скопец – К.:Рад. школа, 1988. – 173 с.
2. Малафійк І.В. Урок в сучасній школі: питання теорії і практики: кн. для вчителя./ І. В. Малафійк – Рівне, 1997. – 175 с
3. Чашечникова О. С. Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики: дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук. Спец. 13.00.02 – теорія і методика навчання математики /О. С. Чашечникова. – Черкаси, 2011. – 584 с.

**Анотація.** Розглянуто можливості застосування розв'язування задач різними способами як засобу узагальнення та систематизації знань та вмінь учнів з теми «Чотирикутники», наведенні приклади задач, які використовувалися на уроках математики у школі.

**Ключові слова:** розв'язання задач різними способами, метод узагальнення та систематизації знань та вмінь учнів, математичні здібності.

## СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

**Вступ.** Важливе місце у навчальній програмі з геометрії для 8 класу займає розділ «Подібні трикутники». У даному розділі вивчаються такі фундаментальні речі як теорема Фалеса, теорема про пропорційні відрізки, та безпосередньо, ознаки подібності трикутників. Коли учні навчилися використовувати кожну із запропонованих теорем та ознак, варто, для систематизація знань та умінь, представити задачі, які можна розв'язати кількома способами, використовуючи набуті знання.

**Мета статті.** Систематизувати знання та уміння учнів при вивченні подібності трикутників.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо задачу та декілька способів її розв'язання.

**Задача.** Висота  $BK$  ромба  $ABCD$ , проведена до сторони  $AD$ , перетинає діагональ  $AC$  у точці  $M$ . Знайдіть  $MD$ , якщо відомо, що  $BK = 4$  см,  $AK : KD = 1 : 2$  [1].

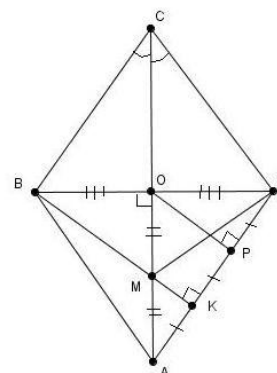
*І спосіб.*

1. Проведемо  $OP \parallel BK$  ( $\angle OPK = 90^\circ$ , так як  $BK \perp AD$ ). Оскільки  $BO = OD$  (за властивістю ромба), то  $KP = PD$  (за теоремою Фалеса).

2.  $AK : KD = 1 : 2$  (за умовою). Нехай,  $AK = x$ , тоді  $KD = 2x$ .  $KP = PD = \frac{KD}{2} = x$ , отже,  $AK = KP = PD$ .

3. Розглянемо  $DBDK$ :  $OP$  - середня лінія,  $OP = \frac{1}{2}BK = 2$  см.

4. Оскільки  $OP \parallel BK$  і  $AK = KP$ , то за теоремою Фалеса  $AM = MO$ .



5. У  $\triangle OAP$ :  $MK$  - середня лінія трикутника,  $MK = \frac{1}{2}OP = 1$  см.

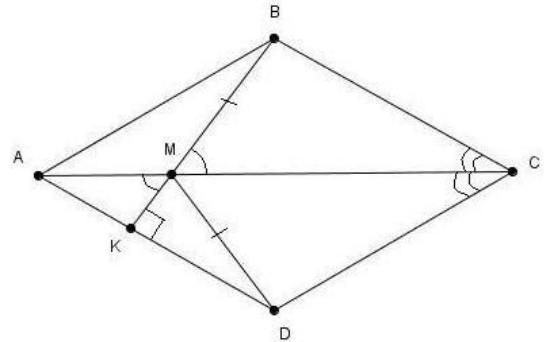
$$BM = BK - MK = 4 - 1 = 3 \text{ см.}$$

6.  $\triangle BCM = \triangle DCM$  (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси,  
 $BM = MD = 3$  см.

Відповідь.  $MD = 3$  см.

*II спосіб.*

1.  $ABCD$  - ромб. Висоти ромба  $BK, DN, DE, BH$  - рівні, і ділять відповідно сторони  $AD, AB, BC, CD$  у співвідношенні 1:2 в точках  $K, N, E, H$  відповідно.



2. Проведемо прямі  $AC$  і  $KH$ . Вони відтинають пропорційні відрізки на  $PAAC$ , отже,  $ACPKH$ .

3. Продовжимо сторону  $BA$  і проведемо  $LH \parallel AC$ . Розглянемо чотирикутник  $ALHC$ .  $ALHC$  - паралелограм, оскільки  $AC \parallel LH$  і  $AL \parallel CH$  як паралельні сторони ромба. Тоді,  $AL = CH$ .

4. Розглянемо  $\triangle LMK$ :  $AM \parallel LK$  і  $BA:AL = BM:MK$ , за теоремою про пропорційні відрізки. Отже,  $BM:MK = 3:1$ . Позначимо коефіцієнт пропорційності через  $x$ :

$$3x + 1x = 4;$$

$$4x = 4;$$

$$x = 1.$$

Отже,  $BM = 3$  см.

5.  $\triangle BCM = \triangle DCM$  (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси,  
 $BM = MD = 3$  см.

Відповідь.  $MD = 3$  см.

*III спосіб.*

1.  $\triangle BMS \sim \triangle AMK$  за двома кутами ( $\angle AMK = \angle BMS$  як вертикальні,  $\angle MAK = \angle BSM$  як внутрішні різносторонні).

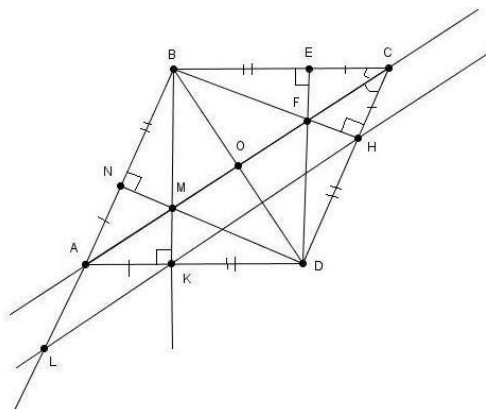
2. Нехай,  $BM = x$ , тоді  $MK = 4 - x$   
Складаємо пропорцію:

$$\frac{BC}{AK} = \frac{BM}{MK}; \quad \frac{3}{1} = \frac{x}{4-x}; \quad 3(4-x) = x;$$

$$4x = 12; \quad x = 3 \text{ см.}$$

3.  $\triangle BSM \sim \triangle DCM$  за двома сторонами і кутом між ними (. Звідси,  $BM = MD = 3 \text{ см.}$

Відповідь.  $MD = 3 \text{ см.}$



**Висновки.** Таким чином, у даній статті розглянуто задачу зі шкільного підручника геометрії для 8 класу, для розв'язування якої використовувались: теорема Фалеса, теорема про пропорційні відрізки і ознака подібності трикутників. Кожне розв'язання має місце на уроці геометрії з окремих тем, також задача має місце на уроці систематизації знань та умінь учнів при вивченні подібності трикутників.

#### Література:

1. Мерзляк А. Г. Геометрія: підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2012. – 240 с.
2. Погорелов О. В. Геометрія: Планіметрія: підручник для 7-9 класів середньої школи / Олексій Васильович Погорелов. – К.: Освіта, 2000. – 223 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

**Анотація.** У даній статті було розглянуто одну задачу та декілька способів її розв'язання. Дана задача дає змогу систематизувати знання та вміння учнів при вивченні подібності трикутників. Вміння розв'язувати одну задачу різними способами дає можливість застосовувати набуті знання для пошуку найбільш раціонального способу розв'язання.

**Ключові слова:** теорема Фалеса, теорема про пропорційні відрізки, подібність трикутників, різні способи розв'язання.

## **МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ**

**Вступ.** Задачі до уроку потрібно підбирати, виходячи з навчально-виховної мети, яку ставить перед собою вчитель, з урахуванням реальних пізнавальних можливостей учнів. Форми використання задачного матеріалу на уроках геометрії необхідно урізноманітнювати: усне повідомлення змісту вправи; проектування умови задачі за допомогою мультимедійного екрану; використання завдань на картках або таблицях; постановка задачі на моделях або предметах навколишнього оточення; математичний диктант та ін. У всіх випадках слід максимально стимулювати мислення школярів, підводити їх до необхідності співставляти, порівнювати класифікувати, узагальнювати, конкретизувати, критично відноситися до тверджень і їх формулювань [2].

**Мета даної статті:** розглянути приклад стереометричної задачі і методики її розв'язування як засобу розвитку прийомів розумової діяльності, з обґрунтуванням умов розвитку одного з прийомів.

**Виклад основного матеріалу.** Одним із важливих завдань учителя математики на уроці є активізація розумової діяльності учнів, уміння допомогти кожному засвоїти матеріал на такому рівні, який дасть можливість вільно орієнтуватися в житті.

Для активізації навчальної діяльності учнів необхідно вміло поєднувати різноманітні прийоми і методи навчання, які стимулюють мислення, приводять до зростання інтересу вивчення предмету [1]. Висока результативність навчання школярів досягається перш за все тоді, коли проводиться значна робота з розвитку мислення та навченості учнів прийомам розумової діяльності.

В процесі навчання математики виділяють прийоми розумової діяльності такі, як аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення та аналогія.

Реалізацію прийому аналіз реалізуємо за допомогою розв'язування задачі.

**Задача** [3, с.44]. У правильний трикутній піраміді  $DABC$  з висотою  $DO$ , що дорівнює  $h$ , через сторону  $BC$ , довжина якої  $a$ , проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро під прямим кутом. Знайти площу перерізу.

Розв'язання

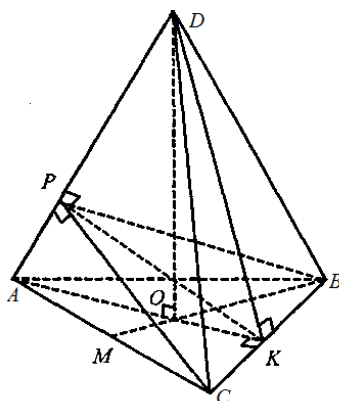


Рис.1

*I спосіб:* Нехай  $DABC$  (рис.1) — дана правильна трикутна піраміда.  $CPB$  — переріз піраміди даною площиною.  $S_{\triangle CPB} = \frac{1}{2} CB \cdot PK$ , де  $PK$  — висота трикутника. Розглянемо трикутники  $AOD$  і  $APK$ , які мають спільний гострий кут  $DAK$ . Нехай  $\angle DAK = \alpha$  тоді з  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ):  $\sin \alpha = \frac{DO}{AD}$ ;

$$\text{з } \triangle APK (\angle APK = 90^\circ): \sin \alpha = \frac{PK}{AK}. \text{ Звідси } \frac{DO}{AD} = \frac{PK}{AK}, \quad PK = \frac{DO \cdot AK}{AD}.$$

Розглянемо прямокутний трикутник  $\triangle AKC$  ( $\angle AKC = 90^\circ$ ):

$$AK = AC \cdot \sin \angle ACK, \quad AK = a \cdot \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AO = \frac{AC}{\sqrt{3}}, \quad AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

з  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора:  $AD^2 = AO^2 + DO^2$ ,

$$AD^2 = \left( \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 + h^2 = \frac{a^2}{3} + h^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}, \quad AD = \sqrt{\frac{a^2 + 3h^2}{3}} = \frac{\sqrt{a^2 + 3h^2}}{\sqrt{3}}. \text{ Знайдемо}$$

$$PK: PK = \frac{h \cdot a \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}}. \text{ Отже, } S_{\triangle CPB} = \frac{1}{2} a \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}} = \frac{3a^2 h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}.$$



Відповідь.  $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$ .

II спосіб:  $S_{\triangle CPB} = \frac{1}{2}CB \cdot PK$ , де  $PK$  — висота трикутника  $\triangle ADK$  (рис.2):

$$S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2}DO \cdot AK, S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2}AD \cdot PK$$

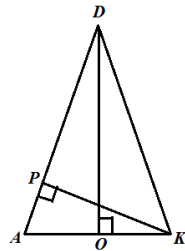


Рис.2

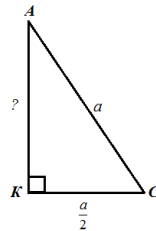


Рис.3

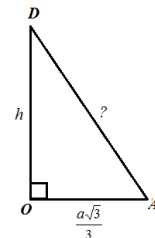


Рис.4

З  $\triangle AKC$  ( $\angle AKC = 90^\circ$ ) (рис.3):  $KC = \frac{a}{2}$ ,  $AK$  — медіана.  $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Обчислимо площу трикутника  $ADK$  за першою формулою:  $S_{\triangle ADK} = \frac{ah\sqrt{3}}{4}$

Знайдемо  $AO$ :  $AO = \frac{2}{3} \cdot AK = \frac{2 \cdot a\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

З  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ) (рис.3):  $AD = \frac{\sqrt{a^2 + 3h^2}}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 3h^2}}{\sqrt{3}} \cdot PK$ . Оскільки площа трикутника  $ADK$  однакова,

можемо прирівняти ліві частини виразів, маємо:  $\frac{ah\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{a^2 + 3h^2}}{2\sqrt{3}} \cdot PK$ .

Знайдемо  $PK$ :  $PK = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}}$ . Отже,  $S_{\triangle CPB} = \frac{1}{2}CB \cdot PK = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$ .

Відповідь.  $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$ .

Використавши прийом розумової діяльності аналіз, при розв'язуванні задачі учитель вибирає той шлях міркувань, за допомогою якого він найбільш ефективно зможе використати математичні знання та уміння учнів. Учитель

математики, розвиваючи та активізуючи на своїх уроках розумову діяльність учнів, виховує інтелектуально розвинену особистість.

**Висновки.** Прийоми розумової діяльності учнів різноманітні і потрібно на уроках математики дбати про їх формування та розвиток. На прикладі розв’язування вказаної в статті стереометричної задачі ми вказали, яким чином можна поліпшити позитивний вплив навчання на розвиток розумової діяльності учнів. Розв’язуючи задачу різними способами учитель спонукає учнів думати, шукати різні шляхи, які приведуть їх до бажаного результату.

### Література

1. Бурда М.І. Шляхи підвищення ефективності уроку математики/ М.І. Бурда, Г.М. Литвиненко, Н.Д. Мацько // Радянська школа – 1985. - №8.
2. Гриневич Т.О. Усні вправи як засіб підвищення ефективності уроку математики підготувала / Т.О. Гриневич – 19 с.
3. Москаленко Т. Паралельність та перпендикулярність прямих і площин / Т. Москаленко // Математика. – 2009. - №31-32 (523-524). С. 43- 46.

**Анотація.** *Запропоновано приклад стереометричної задачі і методики її розв’язування з метою розвитку такого прийому розумової діяльності, як аналіз. Задачу розв’язано двома способами, щоб таким чином поліпшити позитивний вплив навчання на розвиток розумової діяльності учнів та спонукати учнів думати, шукати різні шляхи, які приведуть їх до бажаного результату.*

**Ключові слова:** *розумова діяльність, прийоми розумової діяльності, стереометрична задача, площа трикутника.*

**Annotation.** *An example of stereometric problem and its solution methods to promote this method of mental activities like analysis. The problem is solved in two ways, so as to enhance the positive impact of training on mental development of students and encourage students to think, to seek different paths that lead to the desired result.*

**Keywords:** *mental activity, methods of mental activity, stereometric task area of a triangle.*

## УРОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ

Важливу роль у розвитку творчих здібностей учнів у процесі навчання геометрії відіграє урок однієї задачі. Мета проведення такого уроку – не лише розв’язати одну задачу різними способами, а й навчити учнів обирати найраціональніший. При цьому учні повинні згадати необхідний теоретичний матеріал, проаналізувати умову задачі, критично оцінити різні способи розв’язання.

Розглянемо задачу «У коло вписаний рівносторонній трикутник  $ABC$ . На дузі  $BC$  дана довільна точка  $M$ . Довести, що  $MA = MB + MC$ » [1, с. 30], яку можна використати на уроці узагальнення і систематизації знань з теми «Теорема косинусів» і «Теорема синусів».

Наведемо розв’язання задачі, використовуючи а) теорему косинусів; б)

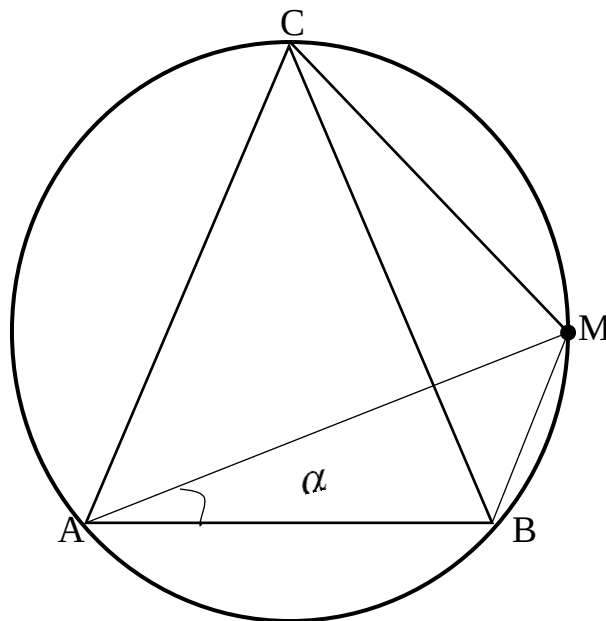


Рис.1

теорему синусів.

Спосіб 1. Відрізки  $MA, MB, MC$  - це сторони трикутників  $AMB$  і  $BMC$  (рис.1).  $\angle CAB = 60^\circ$  (як кут рівностороннього  $\triangle ABC$ ).

Знайдемо  $\angle CMB$ .

$\angle AMB = \angle CAB = 60^\circ$  (як вписані кути, що спираються на одну дугу).

$\angle AMC = \angle ABC = 60^\circ$  (як вписані кути, що спираються на одну дугу)

$\angle CMB = \angle AMC + \angle AMB$ ,  $\angle CMB = 60^\circ + 60^\circ$ ,

тобто  $\angle CMB = 120^\circ$ .

Застосуємо до трикутників  $AMB$  і  $BMC$  теорему косинусів. Нехай  $AB = a$ ,  $MA = x$ ,  $MB = y$ ,  $MC = z$ .

За теоремою косинусів з  $\triangle AMB$ :  $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos 60^\circ$

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} xy \quad (1)$$

з  $\triangle BMC$ :  $CB^2 = CM^2 + MB^2 - 2CM \cdot MB \cdot \cos 120^\circ$

$$a^2 = z^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} zy \quad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2). Отримаємо:

$$x^2 - z^2 - xy - zy = 0, \quad (x-z)(x+z) - y(x+z) = 0, \quad (x+z)(x-y-z) = 0$$

$$x - y - z = 0 \text{ або } x + z = 0$$

$x = y + z$  або  $x = -z$  - не задовольняє умову.

Звідси отримаємо, що  $x = y + z$

Повернувшись до наших позначень, отримаємо:  $MA = MB + MC$ , що й потрібно було довести.

Спосіб 2.

Так як відрізки  $MA, MB, MC$  є хордами кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ , їх довжини можна виразити через радіус  $R$  кола.

Використаємо наслідок з теореми синусів:

$$a = 2R \sin \alpha$$

Позначимо  $\angle BAM = \alpha$ . (рис. 1)

З  $\triangle ACM$  маємо, що  $\angle ACM = 60^\circ + \alpha$ . За наслідком з теореми синусів знайдемо  $AM$ :  $AM = 2R \cdot \sin(60^\circ + \alpha)$ .

З  $\triangle CAM$  маємо, що  $\angle CAM = 60^\circ - \alpha$ . За наслідком з теореми синусів знайдемо  $CM$ :  $CM = 2R \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$

З  $\triangle MAB$  маємо:  $MB = 2R \cdot \sin \alpha$

Запишемо тотожність:  $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$ .

Звідки отримаємо, що  $MA = MB + MC$ . Що й потрібно було довести.

Розв'язання задачі кожним з розглянутих способів зводилося до застосування формул, які містили тригонометричні функції і виконання нескладних перетворень.

Розглянемо геометричне розв'язання задачі (рис. 2).

Відкладемо на відрізку  $AM$  відрізок  $MD$ , який рівний відрізку  $MB$ . Доведемо, що відрізки  $DA$  і  $MC$  рівні

Оскільки  $\angle AMB = 60^\circ$  і  $MD = MB$ , звідси маємо, що  $\angle MDB = \angle MBD = 60^\circ$ .

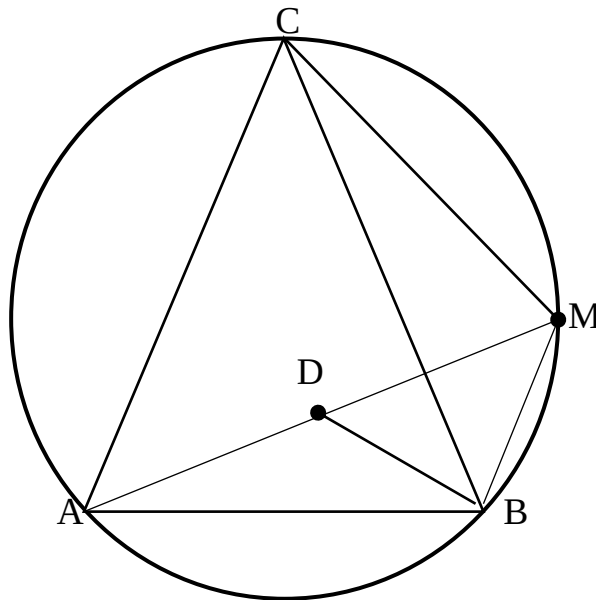


Рис.2

Отже, трикутник  $BDM$  – рівносторонній. Трикутник  $ABC$  – рівносторонній (за умовою). Повернемо трикутник  $BMC$  навколо точки  $B$  на  $60^\circ$  так, щоб точка  $C$  співпала з точкою  $A$ . Тоді точка  $M$  співпаде з точкою  $D$  і відрізок  $MC$  співпаде з відрізком  $DA$ .

Отже,  $DA = MC$ . Тому при будь-якому виборі точки  $M$  на дузі  $BC$  матимемо:  $MA = MB + MC$ .

В класах поглибленого вивчення математики можна подати ще один із способів розв'язання даної задачі: використавши теорему Птолемея про вписаний чотирикутник.

Пошук різних шляхів розв'язання однієї і тієї ж задачі спрямовує увагу учнів на аналіз змісту задачі, розуміння її структури та підвищує емоційність на уроці. Усе це активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів, розвиває їхні творчі здібності, стимулює активне мислення.

### Література

1. Готман Э. Г. Задача одна – решения разные / Э. Г. Готман, З. А. Скопец. – К: Рад.шк., 1988. – 173 с. – (Сер. «Когда сделаны уроки»).
2. Кушнір В. А. Інтеграція математичних знань та умінь при використанні різних способів розв'язання задач // ПостМетодика / В. А. Кушнір, Р. Я. Ріжняк. – 2010. – №2(93). – С. 24-32.
3. Сухіна Л. А. Розв'язування задач різними способами як засіб розвитку мислення учнів [Електронний ресурс] / Л. А. Сухіна. – Режим доступу до ресурсу: [http://ps.stateuniversity.ks.ua/file/issue\\_44/23.pdf](http://ps.stateuniversity.ks.ua/file/issue_44/23.pdf)

**Анотація.** У статті розглянуто можливості проведення уроку однієї задачі. Наведено приклад задачі, яку можна використати на уроці узагальнення і систематизації знань.

**Ключові слова:** геометрична задача, різні способи розв'язання однієї задачі, урок однієї задачі.

**Summary.** In the article presented the geometric problem with multiple ways of solving, described methods of solving this problem, and when we can offer it to students in the system of lessons.

**Keywords:** geometric problem, different ways of solving a problem, lesson one task.

## **РОЗДІЛ 3. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ ЗАДАЧ В МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ**

### **3.1. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ УЧНІВ АЛГЕБРИ**

---

*Бачинська Роксолана Степанівна*

*Тернопільський національний педагогічний університет  
імені Володимира Гнатюка, студентка магістратури*

#### **ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ НА УРОК АЛГЕБРИ В СТАРШІЙ ШКОЛІ**

Одним з основних об'єктів, з якими доводиться працювати вчителю математики під час професійної діяльності, є задача чи система задач. У навчанні математики вони є і метою, і засобом навчання учнів. У ході розв'язування задач розвиваються творча і прикладна сторони мислення.

Дослідження, присвячені проблемам теорії задач, мають різні спрямування. Загальні питання, пов'язані з визначенням поняття «задача» розроблялись Г. О. Баллом, Я. О. Пономарьовим та ін. Роль системи задач у вдосконаленні процесу навчання учнів математики проаналізовано у роботах М. І. Бурди, Ю. М. Колягіна та ін. Роботі з евристичними задачами значна увага приділяється в дослідженнях Ю. М. Колягіна, В. І. Крупича, О. І. Скафи та ін.

Для ефективної реалізації цілей навчання у навчальному процесі необхідно використовувати систему задач, яка матиме обґрунтовану структуру, оскільки кожна задача передбачає виконання певних дій і засобом досягнення вузьких цілей. Система задач повинна містити такі задачі, які не лише сприяли б закріпленню знань, а й тренували б дослідницький стиль розумової діяльності. Під час розв'язування типових задач не здійснюється абстрагування від початкового формулювання та компетентнісна орієнтація [2, с. 29].

На нашу думку, в систему задач пояснення будь-якої теми необхідно включати прикладні задачі та задачі з наперед заданою помилкою. Прикладні задачі – це задачі, що виникли поза математикою, але розв'язуються

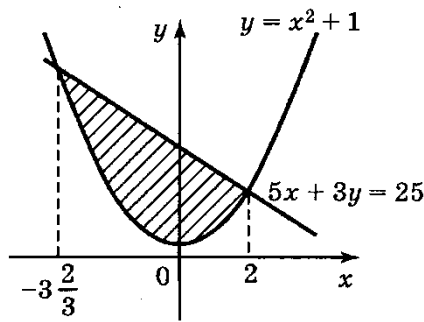
математичними засобами. Під час розв'язування прикладних задач учні мають змогу здійснювати математичне моделювання, оскільки найважливішим і найскладнішим етапом розв'язування таких задач є побудова її математичної моделі. Під час цього етапу учні навчаються виділяти важливі фактори, які визначають досліджуване явище чи процес, вибирати математичний апарат для побудови моделі тощо. Розв'язування прикладних задач сприяє засвоєнню знань з теми та розкриває сферу практичного використання вивченого матеріалу.

Задачі з наперед заданою помилкою можна використовувати як у роботі з групою, так і в індивідуальній роботі, а також на різних етапах уроку. Якщо матеріал, що перевіряється, добре знайомий учням, то такі задачі провокують виникнення ситуації успіху на уроці. А якщо матеріал новий, то успішні пошуки помилки дають змогу школярам відчувати себе дослідниками й експертами. Учитель пропонує задачу, в якій допускає помилку, яку слід знайти. Доцільно робити типові помилки, які можуть робити учні під час розв'язування задач. Виявлення таких помилок свідчить про глибоке знання предмета і розвиває критичне мислення учнів.

Задачі такого типу пропонуємо використовувати під час вивчення теми «Обчислення площ плоских фігур за допомогою інтеграла» у 11 класі.

Прикладна задача. *Дві сім'ї вирішили обмінятися земельними ділянками, щоб було ближче кожному з них додому. Щоб з'ясувати чи рівномірний обмін, потрібно знайти площу кожної ділянки. Одна сім'я зробила це без проблем, так як ділянка прямокутної форми з розмірами 5 м і 6 м. В іншій сім'ї виникли проблеми, тому що їх ділянка мала форму, зображену на рисунку. Виконавши виміри вони отримали, що одна межа ділянки була прямою з рівнянням  $5x + 3y = 25$ , а інша – парабола  $y = x^2 + 1$ . Чи буде обмін рівноцінним? Якщо ні, то яка з ділянок більша і на скільки?*





### Розв'язання

Площа ділянки першої сім'ї:  $5 \cdot 6 = 30 \text{ (м}^2\text{)}$ .

Для знаходження площі другої ділянки знайдемо площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $y = x^2 + 1$  і  $y = \frac{25-5x}{3}$ .

Знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2 + 1 = \frac{25-5x}{3}; 3x^2 + 3 = 25 - 5x; 3x^2 + 5x - 22 = 0; x_1 = 2; x_2 = -3\frac{2}{3}$$

$$S = \int_{-3\frac{2}{3}}^2 \left( \frac{25-5x}{3} - x^2 - 1 \right) dx = \int_{-3\frac{2}{3}}^2 \left( -x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{22}{3} \right) dx = \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}x \right) \Big|_{-3\frac{2}{3}}^2 = \left( -\frac{8}{3} - \frac{10}{3} - \frac{44}{3} \right) - \left( \frac{1331}{81} - \frac{605}{54} - \frac{242}{9} \right) = \frac{4913}{162} = 30\frac{53}{162}.$$

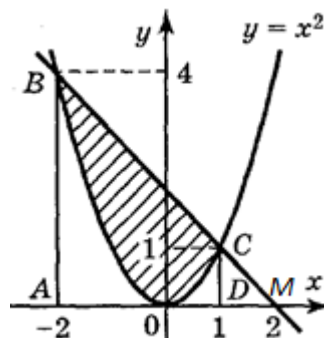
Ми отримали, що площа однієї ділянки  $30 \text{ м}^2$ , а іншої  $30\frac{53}{162} \text{ м}^2$ .

Отже, друга ділянка більша на  $\frac{53}{162} \text{ м}^2$ .

*Відповідь.* Обмін майже рівноцінний.

### Завдання «виправ помилку».

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^2$  і  $y = x + 2$ .



### Розв'язання

Зобразимо схематично графіки даних функцій. Бачимо, що шукана площа є різницею площ двох криволінійних трапецій:  $S = S_{\triangle ABM} - S_{ABOCM}$ .

З рисунка видно, що межі інтегрування для першої криволінійної трапеції:  $x_1 = -2; x_2 = 2$ , для другої – це абсциси спільних точок графіків даних функцій. Для знаходження меж інтегрування розв'яжемо рівняння:

$$x^2 = -x + 2; x^2 + x - 2 = 0; x_1 = -2; x_2 = 1.$$

Знайдемо шукану площу: 
$$S = \int_{-2}^2 (-x + 2) dx - \int_{-2}^1 x^2 dx = \left( -\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \left( -\frac{4}{2} + 4 \right) - \left( -\frac{4}{2} - 4 \right) - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -2 + 4 + 2 + 4 - 3 = 5.$$

*Відповідь:* 5.

Крім вище вказаних задач, в систему задач, які використовуватимуться на уроці, потрібно включити задачі на застосування визначеного інтеграла до обчислення площ плоских фігур. Можна використовувати різнорівневі індивідуальні завдання, які сприятимуть формуванню математичних компетентностей кожного учня. Кількість і тип завдань кожен учитель має коригувати з урахуванням специфіки і рівня підготовки, індивідуальних особливостей учнів конкретного класу, труднощів вивчення попередніх тем.

### Література

1. Акуленко І. А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія / І. А. Акуленко. – Черкаси : Видавець Чабаненко Ю., 2013. – 460 с.
2. Балл Г. А. Теория учебных задач. Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник для студ. мат. спец. пед. навч. закл. / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000 – 512 с.

**Анотація.** *Конструювання системи задач на урок передбачає добір математичних, міжпредметних, практичних й прикладних задач, які є носіями навчальної інформації й орієнтовані на формування інтересу до вивчення математики.*

**Ключові слова:** *система задач з математики, конструювання системи задач, задачний підхід.*

***Бойко Ганна Олександрівна***

*Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
студентка магістратури*

## **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ПОВСЯКДЕННОГО ЖИТТЯ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА»**

Власний досвід роботи вчителем математики показав, що під час вивчення теми «Раціональні числа» у разі звернення до абстрактних понять учні 6 класу відчують певні труднощі, які пов'язані з необхідністю запам'ятовування та застосування значної кількості правил. Проте якщо матеріал пояснювати учням в контексті розв'язування прикладних задач з життєвими ситуаціями, то це буде сприяти подоланню таких труднощів.

Пропонуємо проводити вивчення цієї теми у вигляді гри «Банкір». На початку вивчення теми під час введення понять додатніх та від'ємних чисел наголошуємо, що додатні числа – це наявні гроші, а від'ємні – ті, які ми винні (борг), відповідно 0 – відсутність коштів. Тоді учні з легкістю розв'язують завдання на порівняння раціональних чисел. Наприклад, якщо учням поставити запитання «Що більше: +5 чи +10?», то учні відзначають, що краще мати 10 грн., ніж 5. Аналогічні міркування проводимо і про борг: краще мати 5 грн. боргу, ніж 10 грн., тому відповідно  $-5 > -10$ . Звичайно, краще взагалі не мати грошей, ніж мати борг. Тоді учні оволодівають необхідними поняттями про додатні і від'ємні числа і число 0 в контексті фінансового еквіваленту.

Під час вивчення додавання і віднімання раціональних чисел безпосередньо упроваджуємо цю гру, приділяючи їй по 10 хв. на кожному уроці теми. Клас об'єднується у гетерогенні групи по 4-6 учнів, визначається банкір, його помічник, всі решта – клієнти банку. На початку гри у кожного учасника є деяка сума коштів, що зберігається у банку. Гравцям пропонуються картки з завданнями, обираючи їх по черзі, гравці виконують певні маніпуляції зі своїми грошима. Виконуючи операції додавання або віднімання з раціональними числами, гравці можуть брати кошти в борг у банкіра. Картки з завданнями підібрані так, щоб гравець обов'язково зайшов у борг і почав

виконувати операції з від'ємними числами. Гра передбачає чітке фіксування учасниками своїх дій через додавання і віднімання чисел різних знаків.

Завдання на картках мають бути сюжетними, цікаво сформульованими, виникати з реальної життєвої ситуації. Наприклад: «Ви бажаєте купити автомобіль вартістю 2000 у.о.», «За день роботи ви отримали платню 500 у.о.» тощо.

Отже, дана гра створює умови для розв'язання прикладних задач з повсякденного життя, при чому учні самостійно керують процесом їх створення і розв'язування. Через запропоновану гру досягається одне з першочергових завдань математики – спрямування вивчення математичного матеріалу так, щоб отримані учнями знання, навички та вміння можна було застосувати у повсякденному житті.

***Анотація.** В роботі розглянуто методичний прийом розв'язання учнями задач з теми «Додавання і віднімання раціональних чисел», які створюються ними неявно в процесі ігрової діяльності. В ході гри учні мають оперувати додатними і від'ємними числами ( наявними коштами, і боргами), вести відповідні записи, що забезпечить ефективне вивчення теми.*

***Ключові слова:** додатні та від'ємні числа, борг, гра, раціональні числа, прикладні задачі.*

***Abstract.** We consider methodological procedure of solving problems of students on the topic "Adding and subtracting rational numbers", which implicitly created them in the process of play. During the game, students have to operate with positive and negative numbers (available cash and debt), maintain appropriate records provide an effective study of the topic.*

***Key words:** positive and negative numbers, the debt, game, rational numbers, applied problems.*

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ»**

**Постановка проблеми.** Процес формування вмінь учнів розв'язувати нерівності має розпочатись із вивчення вчителем типових помилок учнів при розв'язуванні нерівностей. Це дозволить учителеві вчити не на помилках, а запобігати їм, тобто про типові помилки слід казати не тоді, коли вони вже виникли, а передбачити можливість їх появи і звертати на них увагу. Таким чином, попередження та виправлення учнівських помилок є невід'ємною частиною навчальної діяльності. Тому добре збалансована добірка вправ є великим гарантом того, що частину цим помилок можна буде уникнути.

**Аналіз попередніх досліджень.** Дослідження, присвячені проблемам теорії задач, мають різні спрямування. Загальні питання, пов'язані з визначенням поняття «задача» розроблялись Г. О. Баллом [1], Л. Л. Гуровою, Я. О. Пономарьовим та ін. Методичні аспекти проблеми, роль системи задач у вдосконаленні процесу навчання учнів математики проаналізовано у роботах М. І. Бурди, Ю. М. Колягіна, В. І. Крупича, О. І. Матяш [4] та ін. Роботі з творчими (евристичними) задачами значна увага приділяється в дослідженнях Г. В. Дорофєєва, Ю. М. Колягіна, В. І. Крупича, О. І. Скафи, Л. М. Фрідмана та ін. Очевидно, що опанування вчителем математики даного уміння є невід'ємною складовою його методичної компетентності, що суттєво впливає на якість навчання математики учнів [7].

**Мета статті** сконструювати систему задач у методичній діяльності вчителя математики під час вивчення теми «Ірраціональні нерівності».

**Виклад основного матеріалу.** При навчанні учнів розв'язанню певного класу нерівностей слід виділяти загальний прийом розв'язання, який можна продемонструвати наступними етапами [3]: 1) Визначити вид нерівності; 2)

Визначити стандартна вона чи ні; 3) Якщо стандартна, то розв'язати за відповідно відомим алгоритмом; 4) Якщо нестандартна, то з'ясувати, які перетворення необхідно виконати, щоб звести її до стандартної, або перейти до використання штучних прийомів розв'язання; 5) Виконати ці перетворення; 6) Зробити перевірку; 7) Записати відповідь.

Як правило, найбільші труднощі в учнів викликає четвертий етап, це пов'язано з тим, що знаходження розв'язання довільної нерівності вимагає від учнів творчого підходу. Оскільки «порожня голова не творить», то необхідна робота по «озброєнню» учнів знаннями про ті перетворення, які варто застосовувати для розв'язування нерівностей. Вчителю при цьому слід пам'ятати, що розвиток змістовно-методичної лінії рівнянь і нерівностей йде лінійно-концентрично: методи і прийоми розв'язання рівнянь і нерівностей, розглянуті в одній темі, використовуються і в наступних темах, поява нових типів рівнянь і нерівностей тягне лише збагачення знань школярів про спеціальні перетворення, а загальні методи і прийоми залишаються ті ж самі. Тому варто підкреслювати і виділяти як загальне в процесі розв'язування алгебраїчних нерівностей в основній школі, так і нове, спеціальне, пов'язане з особливостями розв'язання трансцендентних нерівностей у старшій школі.

Не применшуючи ролі інших класів нерівностей, а також загальних методів і прийомів їх розв'язання, розглянемо методичні аспекти, пов'язані з методикою навчання учнів розв'язування ірраціональних нерівностей.

Існує два основні підходи до розв'язування даного типу нерівностей: з використанням рівносильних перетворень і без використання рівносильних перетворень. Вчителю варто звернути увагу на обидва підходи і запропонувати учням на уроці, таку добірку вправ [6].

**Приклад 1.**  $\sqrt{x+2} < x-4$ .

Розв'язання такої нерівності доволі просте і зводиться до послідовних перетворень рівносильній їй системі нерівностей:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 < (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ x > 7, x < 2; \end{cases} \Leftrightarrow x > 7.$$

Перша нерівність системи забезпечує можливість вилучення квадратного кореня; друга нерівність - піднесення обох частин нерівності до парного степеня; третя нерівність системи зі збереженням рівносильності перетворень.

Набагато більшу трудність для учнів представляє нерівність, аналогічна даній, тільки із заміною знака «менше» на «більше».

**Приклад 2.**  $\sqrt{x+2} > x-4$

За аналогією з першим прикладом більшість школярів розв'яжуть наступну систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x+2 < (x-4)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4, \\ x > 7, x < 2; \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x < 7.$$

Після чого найчастіше записується отримана відповідь. Однак це не так: тут ми втрачаємо цілу серію відповідей, яка представляє собою проміжок  $-2 \leq x < 4$ . Дійсно, візьмемо, наприклад  $x = -1$ , отримаємо вірну числову нерівність  $1 > -5$ , що вже вказує на помилковість відповіді  $4 \leq x < 7$  запропонованої нерівності. Тому вчителю варто акцентувати на цьому увагу, щоб уникнути подальших помилок.

Узагальнюючи наведені міркування, слід виділити два «стандарти» при розв'язуванні ірраціональних нерівностей:  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  і  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  (при цьому випадки нестрогих нерівностей не вносять принципових відмінностей).

Ірраціональна нерівність  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  рівносильна системі нерівностей

$$[8] \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2. \end{cases}$$

Ірраціональна нерівність  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  рівносильна сукупності двох систем

$$\left[ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \right. \quad \left[ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \right.$$

А  $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ , оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то рівносильна системі:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Тому вчителю слід рекомендувати учням обґрунтовувати всі виконані ними дії під час розв'язання тої чи іншої нерівності і такі вправи допоможуть закріпити пройдений матеріал.

**Приклад 3.**  $\sqrt{x+2} > x$ .

**Приклад 4.**  $\sqrt{x^2 - 3x + 1} > x + 1$ .

**Приклад 5.**  $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{1-x^2} - x$ .

На уроці вчителів також варто демонструвати раціональні способи і методи розв'язування нерівностей. Одним з таких методів є метод інтервалів, який широко використовується при розв'язуванні цілих раціональних і дрібно-раціональних нерівностей і незаслужено не розглядається під час розв'язання інших видів нерівностей.

Метод інтервалів, відноситься до другого способу розв'язання ірраціональних нерівностей, який не передбачає використання рівносильних перетворень.

Сформулюємо спочатку етапи застосування методу інтервалів для нерівності з однією змінною [2]: 1. Звести нерівність (за потреби) до виду  $f(x) > 0$  (знак нерівності може бути іншим: "<", "≤" або "≥"; істотне значення



має те, що в лівій частині нерівності деяка неперервна на своїй області визначення функція, а в правій - нуль); 2. Знайти область визначення функції  $y = f(x)$ ; 3. Знайти нулі функції  $y = f(x)$  в області її неперервності (тобто корені рівняння  $f(x) = 0$ ) і точки розриву (якщо вони існують); 4. Нанести з урахуванням області визначення на числову вісь отримані точки (масштаб можна порушити, тому що для розв'язування нерівності важливий лише порядок розташування, а не справжні відстані між позначеними точками); 5. На кожному з інтервалів, отриманих на числової осі, визначити знак функції  $y = f(x)$  і поставити його над цим інтервалом (знак визначається підстановкою довільно обраних найбільш зручних значень  $x$  з кожного інтервалу або використовуючи властивість неперервної функції про зміну знаків); 6. Вибрати потрібні за умовою інтервали (або точки) і записати відповідь.

Як бачимо, виділені етапи збігаються з етапами розв'язування раціональних нерівностей з тією лише різницею, що тут необхідно враховувати область визначення нерівності. А оскільки більшість учнів з розв'язанням раціональних нерівностей методом інтервалів справляються досить впевнено, то доцільно при навчанні їх застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціональних нерівностей використовувати аналогії.

Покажемо на прикладі застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціонального нерівності.

**Приклад 6.**  $x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6$ .

Розв'язати дану нерівність за допомогою рівносильних перетворень досить складно, тому для її розв'язання скористаємося методом інтервалів.

1. Область визначення функції, є проміжок  $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ .

2. Розв'яжемо відповідне рівняння:

$$x\sqrt{10-x^2} = x^2 - 6,$$

$$x^2(10-x^2) = (x^2 - 6)^2,$$

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \pm 3.$$

Перевірка показує, що  $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -3$  - сторонні корені, а  $x = -\sqrt{2}$ ,  $x = 3$  - корені рівняння. Точок розриву немає, тому переходимо до наступного етапу.

3. Нанесемо на числову вісь отримані точки  $x = -\sqrt{2}$ ,  $x = 3$ , зазначивши область визначення  $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ . При цьому точки  $x = -\sqrt{2}$ ,  $x = 3$  - «не зафарбовані» (оскільки нерівність строга).

5. Визначимо знаки на кожному з трьох інтервалів (рис. 1).

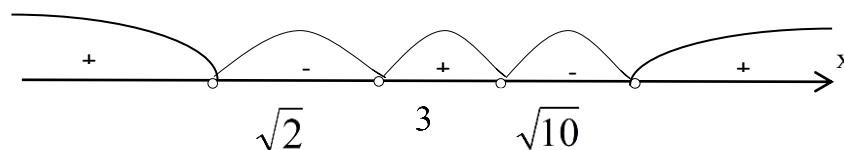


Рис. 1

6. У відповідь вибираємо ті проміжки значень  $x$ , де стоїть знак «+», при цьому враховуємо входження у відповідь точок, які є граничними. Отримуємо, що  $x\sqrt{10-x^2} - x^2 + 6 > 0$  при  $-\sqrt{2} < x < 3$ .

Варто запропонувати ще кілька вправ, для кращого засвоєння учнями методу інтервалів для нерівностей.

**Приклад 7.**  $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$ .

**Приклад 8.**  $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$ .

**Висновки.** Створена система задач сприятиме формуванню міцних знань, вмінь і навичок щодо розв'язування ірраціональних нерівностей, уникненню появи типових помилок учнів та допоможе вчителю-початківцю організувати методично-грамотний урок з теми «Ірраціональні нерівності».

### Література

1. Балл Г. А. Теория учебных задач. Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.
2. Егоров А. Иррациональные неравенства / А. Егоров, Ж. Раббот. // Практикум абитуриента. – 2001. – №6. – С. 35–41.

3. Костюченко Р. Ю. Обучение учащихся решению иррациональных неравенств / Р. Ю. Костюченко. // Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета». – 2007.
4. Матяш О. І. Актуальні проблеми формування методичних компетентностей майбутніх учителів математики / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук.праць. – Вип. 33. – Київ-Вінниця, 2012. – С. 404-407.
5. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. – Вип. 26.– Київ-Вінниця, 2010. – С. 39–44.
6. Орлянская О. Н. Учимся конструировать системы задач по математике : учеб.-метод. пособие / О. Н. Орлянская, Т. К.Смыковская, В. М. Монахов.– М.: Альфа, 2002. – 32 с.
7. Пащенко З. Д. Категорії вищої математики у навчанні студентів конструюванню систем навчальних задач / З. Д. Пащенко, Н. І. Труш. // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – 2016. – №2. – С. 106–110.
8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. – 2-ге вид.. допов. і переробл./ З. І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

**Анотація.** У статті сконструйовано систему задач у методичній діяльності вчителя математики під час вивчення теми «Ірраціональні нерівності».

**Ключові слова:** формування знань та умінь учнів при вивченні нерівностей, ірраціональні нерівності, метод інтервалів.

**Abstract.** The paper designed a system of methodological problems in mathematics teacher while studying the theme "Irrational inequalities."

**Keywords:** building knowledge and skills of students in the study of irregularities, irrational inequality method intervals.

**Гонгало Наталія Володимирівна**  
*викладач кафедри прикладної та вищої математики,  
Житомирський Національний агроекологічний університет*

## **КОНСТРУЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ НАВЧАННЯ**

Однією з вимог компетентнісного підходу в сучасній освіті є посилення прикладної спрямованості викладання дисциплін. Питання прикладної спрямованості навчання математики не нове і на всіх етапах його вирішення пов'язане з безліччю проблем.

Передбачити всі аспекти застосування математики в професійній діяльності майбутніх фахівців доволі складно, а тим більше розглянути всі ці аспекти під час проведення аудиторних занять. Однак, слід шукати шляхи опрацювання більшого об'єму прикладних тестових задач, які здатні зацікавити студентів під час навчання. Крім того, викладач математики має частіше акцентувати увагу студентів на універсальність математичних методів, наголошувати на те, що кожна абстрактна задача може бути математичною моделлю деякої прикладної задачі [1].

Професійна діяльність майбутніх інженерів-землевпорядників в основному пов'язана з лінійними та кутовими вимірюваннями, з використанням різних приладів: рулеток, нівелірів, рейок, теодолітів, кутомірів та ін. Студентів необхідно навчити не тільки якісно проводити різноманітні вимірювання, але й обраховувати похибки вимірювань, які визначають точність отриманих результатів.

**Задача 1.** Кут, виміряний теодолітом виявився рівним  $25^{\circ}13'25'' \pm 30''$ . Яка відносна похибка вимірювання?

У процесі розв'язування, перш за все потрібно використати поняття абсолютної та відносної похибки вимірювань.

Під абсолютною похибкою вимірювання розуміють різницю між результатом вимірювання та істинним значенням вимірюваної величини [2, с.4]:

$$\Delta x_i = |x_i - x|. \quad (1)$$

где  $\Delta x_i$  – абсолютна похибка  $i$ -го виміру,  $x_i$ - результат  $i$ -го вимірювання,  $x$  – істинним значення вимірюваної величини.

Результат будь-якого фізичного виміру прийнято записувати у вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad (2)$$

де  $\bar{x}$  – середнє арифметичне значення вимірюваної величини, найбільш близьке до істинного значення,  $\Delta x$  - абсолютна похибка вимірювань.

Рівність (2) слід розуміти таким чином, що істинне значення вимірюваної величини лежить в інтервалі  $[\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x]$ . Так, якщо виміряний кут виявився рівним  $25^{\circ}13'25'' \pm 30''$ , то абсолютна похибка  $\Delta x = 30''$ .

Абсолютна похибка - величина розмірна, вона має ту ж розмірність, що і вимірювана величина. Необхідно відмітити, що абсолютна похибка не повністю характеризує точність проведених вимірювань. Справді, якщо ми виміряємо з однієї і тієї ж абсолютною похибкою  $\Delta x = 30''$  кути  $25^{\circ}13'25''$  і  $42^{\circ}25'31''$ , точність вимірювань буде відрізнятися. Тому, поряд з абсолютною похибкою вимірювання обчислюється відносна похибка.

Відносною похибкою вимірювань називається відношення абсолютної похибки до самої вимірюваної величини:  $\delta = \frac{\Delta x}{x}$ . (3)

Відносна похибка - величина безрозмірна. Вона виражається у відсотках;

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} 100\% . \quad (4)$$

Для нашої задачі абсолютна похибка  $\Delta x = 30''$ . Відносну похибку обчислюють за формулою (4):

$$\delta = \frac{30''}{25^{\circ}13'25''} 100\% = 0,03\% .$$

Обчислюючи відносну похибку за значенням кута  $42^{\circ}25'31'' \pm 30''$ , отримаємо:

$$\delta = \frac{30''}{62^{\circ}25'31''} 100\% = 0,01\% .$$

Отже, хоча абсолютні похибки вимірювань однакові, відносні похибки різняться між собою і складають 0,03% та 0,01%.

Відносна похибка дає інформацію про точність отриманого результату.

**Задача 2.** Прямолінійна відстань на місцевості вимірюється за допомогою мірної рейки завдовжки  $l$  м. Так як рейка практично прикладається неточно уздовж вимірюваного відрізка, то результат вимірювання може виявлятися трохи більшим істинного значення довжини. Припустимо, що рейка прикладається зигзагом таким чином, що її кінці відстояли від прямої по черзі то в одну, то в іншу сторону на відстані  $\lambda$  м.

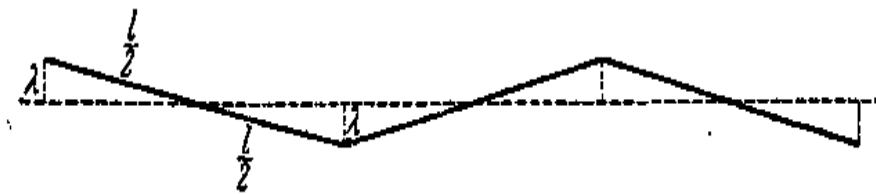


Рис. 1.

Оцінити похибку вимірювань. Як має бути виражене відхилення  $\lambda$ , щоб при вимірюванні рейкою довжини  $l = 4$  м відносна точність вимірювання була 0,2%?

**Розв'язання.** При одноразовому прикладанні рейки абсолютна похибка дорівнює різниці між довжиною  $l$  рейки та її проекцією на вимірюваний відрізок.

Визначаємо проекцію рейки за формулою:  $2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \lambda^2} = l\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}}$ .

Тоді абсолютна похибка визначається як:

$$\Delta x = l - l\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}} = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}}\right).$$

$$\text{Відносна похибка дорівнює: } \delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}}\right)}{l} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}}\right)$$

Та ж відносна похибка зберігається і при багаторазовому прикладанні рейки. Визначимо величину відхилення  $\lambda$  при вимірюванні рейкою довжиною  $l = 4\text{ м}$ , щоб відносна точність вимірювання була  $0,1\%$ . За формулою

$$0,001 = \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{16}} \right); \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}} = 0,999; 1 - \frac{\lambda^2}{4} = 0,998; \frac{\lambda^2}{4} = 0,002; \lambda = \pm 0,089.$$

Отже величина відхилення виражена значенням  $\lambda = 0,089\text{ м}$ .

На нашу думку, наведені задачі корисно розв'язувати на заняттях у процесі навчання «Вищої математики» майбутніх інженерів-землевпорядників. Приклади аналогічних задач можуть бути в методичній скарбничці прикладних задач творчо працюючого вчителя математики в умовах профілізації навчання:

- За допомогою двохметрової рулетки, яка має ділення 1 см знайдена довжина стелі  $s \approx 8,56\text{ м}$ . Визначити границі, в яких знаходиться точна довжина  $s$ .
- З метою оцінки точності вимірювання довжини ліній рулеткою проведено багаторазове вимірювання відстані, яка дорівнює 125,3 м. Результати вимірювання подані у таблиці:

| № вимірювання | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Довжина       | 12<br>5,30 | 1<br>25,41 | 1<br>25,35 | 1<br>25,33 | 1<br>25,29 |

Знайти абсолютну та відносні похибки вимірювань.

- Довжина олівця виміряна лінійкою з міліметровими діленнями. Вимірювання показало 17,9 см. Яка відносна похибка цього вимірювання?
- Нехай при вимірюванні кута теодолітом відносна похибка вимірювань дорівнює  $\delta = 1,3\%$ . Як грамотно записати результат вимірювань кута, якщо середнє значення вимірювань  $32^\circ 27' 41''$ ?

Прикладні задачі надають неоціненну допомогу в навчанні. Вони допомагають систематизувати отримані теоретичні знання та практичні вміння. Прикладні завдання відіграють позитивну роль в реалізації цілей мотивації. Вони є ефективним засобом для підвищення пізнавальної активності студентів.

Отже, до проблеми удосконалення математичної освіти потрібно ставитися не тільки як поліпшення умов надбання студентами математичних знань та умінь, але й реалізацію можливостей предмета в його майбутній професійній діяльності, економічному вихованні, розвитку його особистості в цілому [1].

### Література

1. Киякбаева А. Л. Необходимость использования прикладных задач в обучении математике // Молодой ученый. — 2015. — №19. — С. 9-11. [электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://moluch.ru/archive/99/22150/>
2. Мужикова А.В. Приближенные вычисления: метод. указания / А.В. Мужикова. – Ухта: УГТУ, 2008. – 29 с.
3. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в обучении математике. М.: Просвещение, 1990.

**Анотація.** Наголошено на необхідність прикладної спрямованості навчання математики. Виділено роль прикладних завдань як ефективного засобу для підвищення творчої активності студентів, систематизуванні отриманих теоретичних знань та практичних вмінь. Наведено приклади задач, які можуть бути розв'язані під час навчання «Вищої математики» майбутніх інженерів-землевпорядників.

**Ключові слова:** прикладна спрямованість математики, прикладні тестові задачі, універсальність математичних методів, інженери-землевпорядники, абсолютна та відносна похибка, похибки вимірювань.

**Abstract.** Emphasized the need to focus training Applied Mathematics. Highlight the role of applied problems as an effective means to enhance the creativity of students, systematization the theoretical knowledge and practical skills. Examples of problems that can be resolved during the study "Higher Mathematics" future engineers-surveyors.

**Keywords:** applied mathematics orientation, application test tasks universality of mathematical methods, engineers, surveyors, absolute and relative pohibka, variations in measurements.



*Дученко Ольга Олександрівна*  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, студентка 4 курсу*

## **СТВОРЕННЯ СИСТЕМИ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ВМІНЬ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ**

Фінансова освіта та фінансова грамотність є одним із найважливіших факторів економічного зростання країни і підвищення рівня доходів населення. Економічні знання і вміння розв'язувати найпростіші фінансово орієнтовані задачі необхідні не тільки майбутньому економісту, але й кожній людині, оскільки сучасна людина кожен день приймає участь у різноманітних фінансових операціях: від елементарних розрахунків за будь-що до отримання кредиту. Але якщо про прийняття економічних рішень можна дізнатись із спеціальної літератури, то вміння фінансово мислити досягається лише при розв'язуванні практичних задач. На цьому наголошує і міністр освіти і науки України Лілія Гриневич: «Сьогодні дітей треба вчити інакше і основне, що вони повинні здобути в школі - це компетентності для успішної самореалізації в житті. Діти сьогодні повинні навчитися шукати інформацію, використовувати її для вирішення життєвих проблем, співпрацювати в команді, критично мислити, мати фінансову, підприємницьку та математичну грамотність для життя».

Метою нашої роботи є аналіз можливостей створення системи задач для формування фінансової компетентності учнів.

Основу більшої частини фінансово-орієнтованих задач, необхідних для виконання простих економічних розрахунків у буденному житті, складають задачі на відсотки. Аналіз підручників з математики за 5-9 класи дозволяє виділити основні типи задач на відсотки: знаходження відсотків від числа; знаходження числа за його відсотками; знаходження процентного вмісту одного числа в іншому; знаходження числа на визначений процент більше (або менше) даного числа; прості та складені відсотки.

Можна відмітити, що підручники за 5-7 класи містять значну кількість задач такого типу. Нижче наведено таблицю проаналізованих підручників і

кількості задач такого типу у них [2].

|                    |                           |                               |                         |
|--------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 5 клас             | Мерзляк А. Г.,<br>2013 р. | Тарасенкова Н. А.,<br>2013 р. | Істер О. С.,<br>2013 р. |
| Кількість<br>задач | 28                        | 41                            | 48                      |
| 6 клас             | Мерзляк А. Г.,<br>2014 р. | Бевз Г. П.,<br>2006 р.        | Істер О. С.,<br>2014 р. |
| Кількість<br>задач | 26                        | 68                            | 33                      |
| 7 клас             | Мерзляк А. Г.,<br>2015 р. | Бевз Г. П.,<br>2015 р.        | Істер О. С.,<br>2015 р. |
| Кількість<br>задач | 19                        | 18                            | 27                      |

Як видно з таблиці, шкільні підручники містять задачі фінансової спрямованості, а це означає, що в школі формується фінансова грамотність учнів, проте, варто зазначити, що все ж недостатньо використовуються наявні можливості по формуванню фінансової культури. Це видно хоча б з того, що учні бачать лише привід для математичних дій і не звертають увагу на фінансово-економічну сутність змісту.

Проте формування та розвиток знань та умінь учнів з математики значно залежить від майстерності вчителя відібрати, створити та оптимально використати в процесі навчання цілісну систему задач, в якій чітко вбачаються вчителем і навчальні, і розвивальні, і виховні, і прогностично-діагностичні функції. Одна із специфічних особливостей навчання математики в школі полягає в тому, що саме в процесі методично грамотного розв'язування вдало відібраних задач створюються оптимальні умови для осмислення, сприйняття і застосування навчального матеріалу [1].

Тому, вважаємо, що вчителям необхідно створювати системи задач, які доповнювали б наявні практично-орієнтованими фінансовими задачами.

Як приклад, запропонуємо низку типових задач, які могли б бути основою для системи задач, при розв'язуванні яких учні вчилися б планувати бюджет, розраховувати податки, порівнювати прибуток від різних видів вкладання коштів тощо. Задачі розраховані на учнів 5-7 класів.

*Задача 1.* Даринка збирає гроші на приставку PlayStation 4, яка коштує 7000 гривень. Кожен місяць Даринка відкладає на її придбання 300 гривень. Порівняйте, що буде відбуватися із її грошима, якщо вони будуть знаходитися у скарбничці і якщо вона покладе їх у банк під 13 %. Що вигідніше Даринці – складати гроші у скарбничку чи покласти у банк?

*Задача 2.* Олександр Захаровичу нараховується зарплату 9000 гривень на місяць. З цієї суми вираховується податок на доходи фізичних осіб у розмірі 18 %. Олександр Захарович мріє зробити у себе в квартирі ремонт, для чого планує взяти кредит на 1 рік у розмірі 30000 гривень під 25 % річних. Потрібно розрахувати: 1) суму, яку отримує Олександр Захарович після виплати податку; 2) щомісячну суму виплати по кредиту; 3) дати аргументовану відповідь, чи зможе Олександр Захарович зробити ремонт на даних умовах, якщо його щомісячні розходи (комунальні та побутові) складають 5000 гривень?

*Задача 3.* Владислав хоче взяти у банку кредит на купівлю автомобіля у розмірі 400000 гривень. Гасити кредит Владислав буде раз на місяць рівними платежами. Якщо Владислав візьме кредит на 2 роки, то загальна сума виплат складе 482000 гривень; якщо на 3 роки, то загальна сума виплат складе 524000 гривень; якщо на 4 роки, то 569000 гривень. Потрібно з'ясувати: 1) На який термін Владислав може взяти кредит, щоб його щомісячні платежі були не більше 15000 гривень? 2) На який термін ви б взяли кредит при даних умовах? Щоб ви вибрали, платити менше кожного місяця, але довше чи платити більший щомісячний платіж, але впродовж меншого періоду часу?

*Задача 4.* Бізнесмен Ярослав Олексійович придбав 10 акцій газовидобувної компанії вартістю 20000 гривень кожна. Оскільки ціна акцій почала знижатися, то бізнесмен не став ризикувати і продав 6 акцій, коли ціна на них впала вже на 10 %, а решту 4 продав, коли ціна на акції піднялась на 5 %

від попередньої вартості. Скільки гривень втратив Ярослав Олексійович у результаті своєї комерційної діяльності?

**Задача 5.** На розвиток свого бізнесу Володимир планує взяти у банку кредит на суму 1200000 гривень. Гасити кредит Володимир буде раз на рік рівними платежами після нарахування відсотків. Відсоткова ставка у цьому банку складає 20 відсотків річних. На яку мінімальну кількість років може взяти кредит Володимир, щоб його щорічні платежі були не більше 300000 гривень?

Вважаємо, що наявність у вчителя математики системи задач практично-фінансового змісту, умови яких максимально наближенні до реального життя, не тільки сприятиме кращому формуванню та розвитку знань та умінь учнів з програмового матеріалу, але й вихованню всебічно розвиненої, фінансово грамотної особистості.

### Література

1. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. - 2010. - Вип. 26. - С. 39-43.
2. Шкільні підручники. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://pidruchnyk.com.ua/>

**Анотація:** Дослідження присвячене питанню створення системи фінансово-орієнтованих математичних задач, що доповнювала б наявні у підручниках з математики задачі. Така система задач, на думку автора, сприятиме формуванню фінансових вмінь учнів основної школи.

**Ключові слова:** фінансово-орієнтована математична задача; система математичних задач; фінансові вміння.

**Annotations:** Research is devoted to the issue of creating a system of financial-oriented mathematical problems that would complement existing textbooks on mathematics problem. This system problem, according to the author, will contribute to development of financial skills to primary school pupils.

**Keywords:** financial-oriented mathematical problem, system mathematical problems, financial skills.

*Ігнатій В'ячеслав Григорович*  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, студент 4 курсу*  
**Ясінська Яна**  
*Вінницький національний технічний університет*

## **ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНСТРУЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ**

**Постановка проблеми.** Одним із дієвих та ефективних засобів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є використання в навчальному процесі прикладних задач, які виникли в інших галузях, але потребують математичного розв'язання. Розв'язування прикладних задач у шкільному курсі математики сприяє ознайомленню учнів із роботою підприємств і галузей народного господарства, викликає інтерес до різних професій. Такі задачі забезпечують посилення мотивації навчання математики, спонукають учнів до здобуття нових знань, оволодіння новими вміннями, збагачують їх знаннями з інших дисциплін. Значущість прикладної спрямованості засвідчують і результати міжнародного порівняльного моніторингового дослідження якості природничо-математичної освіти TIMSS та міжнародної програми PISA. У рамках TIMSS та PISA досліджуються тенденції в досягненнях учнів із математики та природничих наук, а також здійснюється моніторинг реалізації навчальних програм, визначаються найбільш перспективні методології викладання в усьому світі. [6]

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Традиційно прикладні задачі шкільного курсу алгебри є текстовими задачами. Текстові задачі вивчаються у курсі шкільної математики від першого до випускного класу та є засобом формування математичних компетентностей учнів. У проаналізованих нами працях [1; 2; 3; 4; 5] розкрито роль текстових задач у формуванні математичної компетентності учнів основної школи.

**Мета статті** – розкрити можливості конструювання прикладних задач з алгебри основної школи у формуванні математичної компетентності учнів основної школи.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** У методичній літературі задачі, зокрема, прикладні задачі умовно поділяють на три рівні математичної підготовки учнів: рівень відтворення (репродуктивний рівень), рівень встановлення зв'язків (творчий рівень), рівень міркування (навчально-дослідницький рівень).

Рівень відтворення, передбачає використання математичних задач на відтворення математичних фактів, методів і виконання обчислень. Учні можуть застосовувати базові математичні знання в стандартних, чітко сформульованих ситуаціях. Вони можуть розв'язувати найпростіші текстові задачі, розуміти прості алгебраїчні залежності, стандартну систему позначень, можуть читати й інтерпретувати дані, представлені в таблицях, на графіках, картах, різних шкалах. При розв'язуванні вправ рівня встановлення зв'язків учні можуть виконувати нескладні алгебраїчні завдання, що включають складання виразів, розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем, визначати значення величин, використовуючи відомі формули. Вони можуть інтерпретувати інформацію, представлену в таблицях і на графіках. У завданнях третього рівня, перш за все, необхідно самостійно виділити в ситуації проблему, яка вирішується засобами математики, і розробити відповідну їй математичну модель. Розв'язати поставлене завдання використовуючи математичні міркування та узагальнення, і інтерпретувати розв'язання з урахуванням особливостей розглянутої в завданні ситуації.

Такі задачі учитель може відшуковувати у різноманітних посібниках, збірниках або навчитись самостійно конструювати. Наприклад, візьмемо типову текстову задачу зі шкільного курсу алгебри для 7 класу. *У двох кусках тканини знаходиться відповідно 28 і 36 метрів. Другий кусок на 40 гривень дорожчий за перший. Відомо, що 13 метрів тканини першого куску і 13 метрів тканини другого куску разом коштує 1170 гривень. Скільки коштує 1 метр*

*тканини другого куска? Цю задачу можна віднести до рівня відтворення, щоб вона стала відповідати рівню встановлення зв'язків, або рівню міркувань достатньо замінити вимогу задачі, або додати ще такі питання: Скільки коштує 15 мерів тканини у першому куску? На скільки відсотків ціна тканини першого куска відрізняється від ціни тканини другого куска? Яка середня ціна цих тканин? Щоб правильно розв'язати таку задачу, учень повинен пригадати або з'ясувати, яка різниця між поняттями «ціна товару» та «вартість товару», як обчислюються середні величини.*

Такі задачі можна конструювати разом із учнями. Організація такої діяльності передбачає спеціальну підготовку учителя та учнів. Учитель використовує завдання які вимагають залучення додаткової інформації; підбору числових даних з різних сфер діяльності людини; встановлення аналогій; складання математичних текстів різних видів, систем вправ. На занятті відпрацьовуються вміння застосовувати знання для конструювання задач. Для організації самостійного конструювання задач, вчитель характеризує кожен з напрямків діяльності учнів: конструювання на задану тему; конструювання на обрану тему; конструювання математичних задач в рамках навчального практичного дослідження. Для цього учитель має ретельно продумати систему завдань: 1) підготувати джерело інформації (текст, таблиця, графік, статистичні дані, тощо); 2) орієнтовні вимоги до умови задачі (визначте; закінчите; поясніть; знайдіть; дізнайтеся; побудуйте графік, діаграму тощо); 3) розв'язання та відповідь до створеної задачі. Наприклад: 1) знайти інформацію про погодні умови весни минулого року; 2) скласти стовпчасту та кругову діаграми, щодо кількості сонячних, похмурих та дощових днів; 3) графічно показати зміну температури протягом трьох місяців; 4) скласти дані про кількість сонячних днів у кожному тижні; 5) запишіть для цього статистичного матеріалу варіаційний ряд, частотну таблицю, медіану, моду, середнє арифметичне.

**Висновки.** Застосування таких прикладних завдань дозволяє вирішити проблему більш якісного засвоєння учнями знань з математики і здатності їх

застосування на практиці. Використання компетентнісно-орієнтованих завдань на уроках математики сприятиме усвідомленню учнями ролі математики в сучасному світі, застосування математичних знань для вирішення проблем, оцінювання нового досвіду, контролю ефективності власних дій.

### Література

- 1) Матяш О. І. Задачі методичної діяльності вчителя у навчанні учнів геометрії / О. І. Матяш // Наукові записки Малої академії наук України: Зб. наук. пр. – Вип. 3. Серія: педагогічні науки. – Київ: ТОВ «СІТПРІНТ». – 2013. – С. 224–232.
- 2) Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. – Вип. 26. – Київ-Вінниця, 2010. – С. 39–44.
- 3) Михайленко Л.Ф. Математическая компетентность учащихся как педагогическая проблема. / Л. Ф. Михайленко// Научна конференция с международно участие МАТТЕХ 2012, 22-24.11.2012 г., Шуменски университет. –С.231-233
- 4) Михайленко Л.Ф. Формирование практической компетентности школьников в процессе решение текстовых задач / Л. Ф. Михайленко// Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации по материалам Международной научно-практической конференции «Математическое, естественнонаучное образование и информатизация». – Москва: МГПУ, 2012г. – С.62-66.
- 5) Михайленко Л. Ф. Розв'язування текстових задач як засіб формування математичної компетентності старшокласників /Л. Ф.Михайленко, М. Б. Ковальчук // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. – Вип.46. – Київ-Вінниця, 2016. – С.65-69.
- 6) Олексюк О. А. Сучасні технології моніторингових досліджень навчальних досягнень учнів / Олена Андріївна Олексюк. // Імідж сучасного педагога. – 2011. – С. 73–77.

**Анотація.** У статті розкрито можливості конструювання прикладних задач з алгебри основної школи у формуванні математичної компетентності учнів основної школи.

**Ключові слова.** Математична компетентність, прикладна задача

**Annotation.** In the article possibilities of constructing of the applied tasks are exposed from algebra of basic school in forming of mathematical competence of students of basic school.

**Key words.** Mathematical competence, applied task



***Калашнікова Євгенія Ігорівна***  
*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,*  
*студентка магістратури*

***Калашніков Ігор В'ячеславович***  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, кандидат педагогічних наук*

## **МОДЕЛІ ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФАКТІВ**

Вчити всіх, вчити кожного.

В.Ф. Шаталов

У відомій фразі Віктора Федоровича Шаталова «Вчити всіх, вчити кожного» приховано досить великий об'єм інформації корисний учителю.

По-перше. Навчаючи всіх учнів класу враховуючи їх зони найближчого розвитку, учитель тим самим формує ядро класу з учнів, які прагнуть вчитися. Таким чином, в класі формується культ навчання, того чи іншого предмета, що позитивно впливає на навчальний процес взагалі.

По-друге. Враховуючи у процесі навчання індивідуальні особливості кожного учня, учитель знаходиться в постійному методичному пошуку знаходячи нові прийоми передачі інформації, та вироблення навичок, що, знову ж таки, позитивно впливає на навчальний процес, інтелект та харизму учителя.

З практики помічено: щоб швидко і якісно передати учневі деякий об'єм інформації, чи виробити певні уміння, потрібно задіяти якомога більше рецепторів (органів чуття).

Аналізуючи типові помилки учнів: в алгебрі, наприклад, в перетворенні виразів з використанням формул скороченого множення; в геометрії, при побудові перерізів многогранників, приходимо до висновку, що матеріал що вивчається є досить абстрактним, що і сприяє появі цих помилок у значній кількості.

Подолання цього негативного явища ми бачимо в задіянні навчальним процесом різноманітних моделей, що дозволятимуть наглядно бачити той чи інший математичний факт, чи закономірність.

Розглянемо моделі для вивчення формул скороченого множення виду,  $(a \pm b)^n = C_n^0 a^n + \dots + C_n^n b^n$ , та попередження виникненню помилок у процесі використання цих формул під час розв'язування задач.

Модель «№1». Складається з квадрата площі  $a^2$ , двох прямокутників з площами  $a \cdot b$  і квадрата площі  $b^2$ . Застосовується модель під час вивчення формули  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . В самому процесі вивчення формули можна виділити такі 3 пункти:

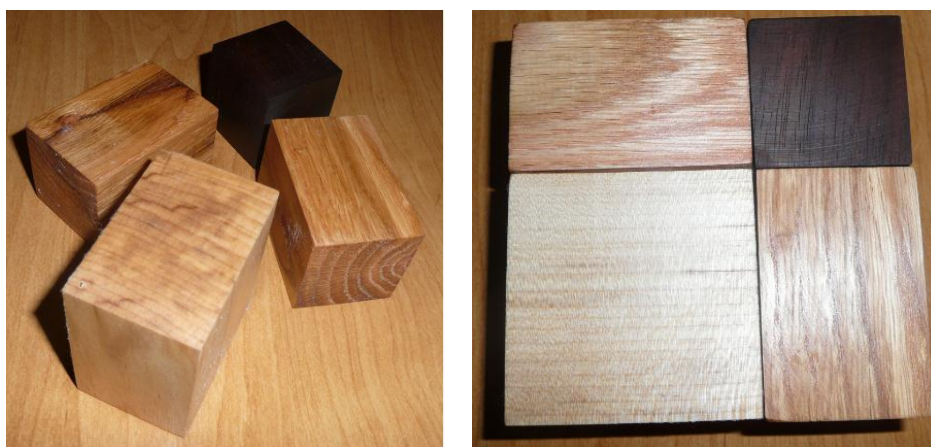


Рис. 1

1. Формулу слід вивести, піднісши двочлен  $a + b$  до квадрату та звівши подібні доданки.
2. Розглянути модель і визначити з яких елементів вона складається.
3. Дати відповідь на наступні запитання:
  - Чи дорівнює площа цілої фігури сумі площ фігурок на які вона розділена?
  - На, які частини розділено сторону великого квадрата?
  - Як модель пов'язана з формулою?
  - Чому після піднесення виразу  $a + b$  до квадрату, отримали многочлен складений саме з трьох одночленів.
  - Який геометричний зміст несе кожен з одночленів.

Лише після цього виводимо формулу  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , та розв'язуємо завдання на застосування формул  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ . Вивчення вказаних вище формул за такою схемою, як правило, дає стовідсотковий результат в їх розумінні, запам'ятовуванні і використанні.

Модель «№2». Складається з куба об'ємом  $a^3$ , трьох паралелепіпедів об'ємом  $a^2 \cdot b$ , трьох паралелепіпедів об'ємом  $a \cdot b^2$  і кубика об'ємом  $b^3$ .



Рис. 2

Застосовується модель під час вивчення формули  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ . Схема їх вивчення є аналогічною до попередньої схеми.

Обов'язковим є підсумок, у формі знаходження правила по знаходженню формули яка-б дозволяла підносити двочлен до будь-якого цілого степеня. Перед тим як зробити цей підсумок, в якості розрядки пропонуємо дати відповідь на таке нескладне запитання.

З'ясуйте закон за яким побудовано піраміду (рис. 3), замість точок у піраміді поставте числа, продовжте піраміду донизу ще на 6 рядків.

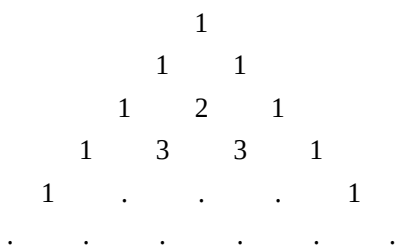


Рис. 3

Закономірність за якою побудовано піраміду, як правило, помічається учнями відразу. А от зв'язати отриману піраміду з формулами піднесення двочлена до степеня, в більшості випадків, потрібно робити учителю самостійно, використовуючи індуктивні міркування.

[illegible]

Рис. 4

Аналізуючи отриманий запис потрібно звернути увагу: 1) на взаємозв'язок чисел рядка таблиці і коефіцієнтів у відповідному розкладі степеня двочлена на одночлени; 2) на характер зміни показників степенів чисел  $a$  і  $b$  в кожному із розкладів.

Аналогічні міркування проводять для степеня  $(a-b)^n$ .

Таке вивчення матеріалу усуває появу помилок під час перетворення виразів, та при розв'язуванні інших завдань. Задіяння тактильних і зорових рецепторів учня дає йому ще один «+» в розумінні математичного факту.

В геометрії, при побудові перерізів многогранників, спостерігається аналогічна ситуація. Виходячи з епіграфу статті «Вчити всіх, вчити кожного», розуміємо, що посередньому учневі десятого класу важко побудувати переріз методом слідів, навіть приблизно не уявляючи який він буде.

Можна використовувати стереометричну дошку, вона має свої переваги, але вона має і недоліки. Ми розробили модель «№3», яка певною мірою усуває проблему візуалізації перерізів призми площиною. До речі таких моделей є декілька видів. Найкращий результат в побудові перерізів дає методика, яка включає ігрові моменти з моделями виду «№3».



Рис. 5

Що це означає? Це означає, що дитина в дошкільному віці складала такі моделі як конструктор. Далі, при вивченні стереометрії в старшій школі будуючи перерізи многогранників методом слідів їй демонстрували процес побудови перерізів на моделі. Для цього потрібно небагато: будь-яка модель з моделей виду «№3», аркуш цупкого паперу і ножиці. Такий комплекс заходів, який застосовується до учня в процесі навчання дає позитивні результати: учні краще розуміють як побудовано переріз, учнівські рисунки в зошитах і на дошці стають якісними, краще розуміється суть основних методів побудови перерізів і в результаті учень правильно будує перерізи многогранників. Лише після такого навчання, доцільне використання в навчальному процесі комп'ютерних програм дасть позитивні результати і підвищить рівень навченості учнів.

**Анотація.** Аналізуючи типові помилки учнів під час вивчення алгебри, та геометрії, зроблено висновок про природу їх появи у значній кількості. А також запропоновано подолання цього явища шляхом використання в навчальному процесі моделей, що дозволятимуть наглядно бачити той чи інший математичний факт, чи закономірність.

**Ключові слова.** Перетворення виразів, формули скороченого множення, переріз многогранника.

**Annotation.** We analyzed typical mistakes of students while they studied algebra and geometry. I found the reason why errors appear in large numbers. We offered a way to overcome this problem. We propose to use in the classroom models that allow clearly see math facts or laws.

**Keywords.** Convert expressions, formulas abbreviated multiplication, section polyhedron.

**Катеринюк Галина Дмитрівна**  
вчитель математики та інформатики  
Вінницького обласного спортивно-гуманітарного ліцею-інтернату

## СИСТЕМА ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ ДЛЯ УЧНІВ СПОРТИВНО-ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ

Завдання вчителя математики зацікавити учнів математикою. Яким чином цього можна досягти? Показати її значущість для конкретного учня. Тому вчитель має подбати, щоб в його методичній скарбничці була вивірена та продумана система прикладних задач, метою якої є різноплановість, збудження інтересу, ілюстрація застосування математики в житті з урахуванням профілю навчання. Наведемо добірку прикладних «спортивних» задач, яка є зручним засобом формування умінь математичного моделювання в учнів спортивно-гуманітарного профілю. Дані задачі можуть бути використані у 6-11 класах при вивченні тем: «НСД» (6 кл.), «Квадратні рівняння» (8 кл.), «Системи двох рівнянь з двома змінними» (9 кл.), «Комбінаторика» (11 кл.).

**Задача 1.** У футбольному турнірі зіграно 480 матчів, причому кожна команда грала з усіма іншими на своєму та на чужому полі по одному разу. Скільки всього футбольних команд брало участь у турнірі?

*Розв'язання.* Нехай  $x$  — кількість футбольних команд. Тоді загальна кількість матчів дорівнює:  $x(x - 1)$ .

Складемо рівняння:  $x(x - 1) = 480$ , що є математичною моделлю даної задачі.

$$x^2 - x - 480 = 0, \quad x = 16$$

*Відповідь:* 16 команд.

**Задача 2.** Два лижних загони йшли з однаковою швидкістю; один пройшов 112 км, другий – 96 км. Скільки часу йшов кожний загін, якщо їх швидкість була найбільша з усіх можливих швидкостей, що виражаються числом цілих кілометрів за годину?

*Розв'язання.* Щоб знайти число годин руху кожного загону, треба відстань, яку пройшов кожний загін, поділити на швидкість руху за годину. За

умовою швидкість обох загонів однакова, вона виражається цілим числом кілометрів, отже, швидкість за годину – це найбільший спільний дільник 112 і 96. Знайдемо НСД (112; 96):  $112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ ;  $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ; НСД (112; 96) =  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ; число годин руху першого загону – 7 і другого – 6 годин.

*Відповідь:* 7 год, 6 год.

**Задача 3.** Дві дівчини і троє хлопців обирають спортивну секцію. До секції художньої гімнастики приймають тільки дівчат, до секцій греблі і боксу – тільки хлопців, а до волейбольної і футбольної секцій – і дівчат, і хлопців. Скільки існує способів розподілу між секціями цих п'ятьох осіб?

*Розв'язання.* Для кожної з двох дівчат є три варіанти вибору, а для кожного з трьох хлопців – чотири варіанти. Всього способів розподілу між секціями цих п'яти осіб існує:  $3^2 \cdot 4^3 = 576$ .

*Відповідь:* 576 способів.

Актуальними на сьогодні і цікавими для учнів є фінансові задачі, на розрахунок премій, грошових винагород і затрат, що можуть бути пов'язані з змаганнями.

**Задача 4.** На придбання велосипедів спортивний клуб виділив 84000 грн. Оскільки внаслідок подорожчання цін вартість кожного велосипеда зросла на 1000 грн., було придбано на 2 велосипеда менше, ніж планувалось. Скільки купили велосипедів?

*Розв'язання.* Нехай купили  $x$  велосипедів, а планували купити –  $(x + 2)$ . Вартість одного велосипеда до подорожчання:  $\frac{84000}{x+2}$ , після подорожчання  $\frac{84000}{x+2} + 1000$ .

Складемо рівняння, що є математичною моделлю даної задачі:

$(\frac{84000}{x+2} + 1000) \cdot x = 84000$ . Маємо рівняння  $x^2 + 2x - 168 = 0$ , розв'язавши, яке одержимо, що  $x = 12$ .

*Відповідь:* 12 велосипедів.

**Задача 5.** Між трьома переможцями змагання було розподілено грошову премію, відповідно до зайнятих призових місць. Перший одержав половину всієї премії без  $\frac{3}{22}$  того, що одержали двоє інших разом. Другий одержав 3000 грн. Третій одержав  $\frac{1}{4}$  всієї премії і  $\frac{1}{56}$  грошей, отриманих разом двома іншими. Якою була вся премія і скільки грошей одержав кожен переможець?

*Розв'язання.* Нехай  $x$  грн. – премія переможця, що зайняв перше місце,  $y$  грн. – переможця, що зайняв третє місце.

За умовою вся премія дорівнює  $x + y + 3000$  грн.

Одержимо наступну математичну модель задачі:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y + 3000) - \frac{3}{22}(y + 3000); \\ y = \frac{1}{4}(x + y + 3000) + \frac{1}{56}(x + 3000) \end{cases}$$

Звідки  $x = 4000$ ,  $y = 2500$ .

Знайдемо всю премію:  $4000 + 3000 + 2500 = 9500$  (грн.)

*Відповідь:* 9500 грн.; 4000, 3000 і 2500 грн.

Досить цікавими, і водночас різноплановими можуть бути задачі про спортивний майданчик:

**Задача 6.** Спортмайданчик має форму прямокутника з діагоналлю 185 м. Під час реконструкції, довжину кожної його сторони зменшили на 4 м. При цьому прямокутну форму було збережено, але площа виявилася меншою на  $1012 \text{ м}^2$ . Якими стали розміри спортмайданчика після реконструкції?

*Розв'язання.* Нехай  $x$  – початкова довжина, а  $y$  – початкова ширина спортмайданчика. За умовою задачі, складемо наступне рівняння:  $(x - 4)(y - 4) = xy - 1012$ . Звідки маємо,  $4(x + y) = 1028$ , тоді  $x + y = 257$ . З іншого боку,  $x^2 + y^2 = 185^2$  (за теоремою Піфагора). Підставивши  $x = 257 - y$  у це рівняння, будемо мати:  $(257 - y)^2 + y^2 = 185^2$ , звідки  $y_1 = 104$ ,  $y_2 = 153$ . Тоді, відповідно  $x_1 = 153$ ,  $x_2 = 104$ . Оскільки  $x$  – довжина, а  $y$  – ширина, то  $x = 153$  (м), а  $y = 104$  (м). Якщо довжини сторін зменшити на 4 м, то розміри спортмайданчика стануть рівними 100 м. та 149 м.

*Відповідь:* 100 м, 149 м.



**Задача 7.** Спортивний майданчик прямокутної форми обнесений огорожею. Якщо від неї вздовж прямої відрізати деяку частину так, щоб частина, яка залишилася, була квадратом, то його площа при цьому зменшиться на  $400 \text{ м}^2$ , а огорожа зменшиться на 20 м. Визначити початкові розміри спортивного майданчика.

**Розв'язання.** Нехай  $x$  – ширина, а  $y$  – довжина майданчика. Тоді площа  $x \cdot y \text{ м}^2$ . За умовою  $x \cdot y = x^2 + 400$ . Довжина огорожі  $2(x + y) = 4x + 20$ . Складемо систему, що є математичною моделлю даної задачі: 
$$\begin{cases} x \cdot y = x^2 + 400; \\ 2(x + y) = 4x + 20 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, одержимо що  $x = 40 \text{ м.}$ , а  $y = 50 \text{ м.}$

**Відповідь:** 40 м, 50 м.

**Висновки.** Сьогодні немає такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Математичний апарат використовується в усіх сферах життя, не лише в науках: фізиці, хімії, географії, біології, астрономії, економіці, історії, лінгвістиці, а й в медицині, спорті, архітектурі, музиці, корабле- та авіабудуванні, геоекології, мистецтві та різних життєвих ситуаціях. Задачі з різних галузей знань містять поняття та відношення, які в перекладі на математичну мову, тобто мову виразів, формул, рівнянь, нерівностей та їх систем, функцій, графіків, тощо, набувають вигляду математичної моделі.

### Література

1. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. – Вип. 26. – Київ-Вінниця, 2010. – С. 39–44.
2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егоров, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под ред. М. И. Сканави. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013 – 608 с.

**Анотація.** Показана можливість використання прикладних задач на спортивну тематику в 6-11 класах. Подана добірка різнопланових «спортивних» задач з методичними вказівками, щодо їх розв'язання.

**Ключові слова:** система задач, прикладна спрямованість навчання, математичне моделювання, прикладна задача.

## **КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ**

**Вступ.** В останні десятиліття в методичних дослідженнях особливу увагу приділяють конструюванню різних взаємопов'язаних задач. Методистами, педагогами та психологами встановлено, що жодна задача, розв'язана окремо, не дає бажаного результату, та не дозволяє досягнути основних цілей вивчення математики. Так, Г. І. Саранцев вказує, що розв'язання задач викликає певну розумову діяльність, яка обумовлена не тільки їх змістом, але і послідовністю їх виконання, кількістю однотипних задач, комбінацією з іншими задачами[6].

**Мета:** проаналізувати вплив систем задач скомпонованих учителем на урок на якість засвоєння учням навчального матеріалу, та рівень формування математичних компетентностей учнів.

**Виклад основного матеріалу.** В методичній літературі використовуються різні терміни для позначення систем задач:

- *блок* – сукупність пов'язаних між собою задач, поєднаних спільною ідеєю, таким чином, що кожна наступна задача або узагальнює попередню, або конкретизує її, або є аналогічною до неї, або використовує результат попередньої задачі (Т. М. Калінкіна);
- *серія* – система задач, яка включає задачі поєднані спільною ідеєю розв'язку (Н. С. Мельник );
- *сім'я* – сукупність математичних об'єктів, пов'язаних певним відношенням (Е. А. Молчанова та ін.);
- *система* – сукупність об'єктів, взаємодія яких «викликає» появу нових, інтегрованих якостей, не властивих окремо взятим компонентам, які складають систему (Г. І. Саранцев, Ю. М. Колягін, О. Б. Єпішева та ін.);
- *ланцюжок* – сукупність взаємопов'язаних по змісту, по способу розв'язання задач (Н. В. Вахрушева);

- *цикл* – сукупність задач, які різні за умовою, але мають спільне дидактичне призначення, направлені на досягнення спільної мети (Г. В. Дорофєєв).

Не дивлячись на різні підходи до типології систем задач, сталого терміну, яким можна було б позначити всю сукупність перерахованих вище задач, немає.

Проблему побудови взаємопов'язаних задач розглядало багато науковців. Д. Пойя, наприклад, виділяє 6 основних способів варіювання задач: узагальнення, спеціалізацію, аналогію, зіставлення нових комбінацій, введення додаткових елементів, повернення до визначень[5].

На думку Д. Ф. Ізаака, по мірі розв'язання будь-якої геометричної задачі виявляються різні властивості відповідні різним геометричним фігурам, в тому числі й ті, які не використовуються в ході розв'язку. В деяких випадках вони можуть бути досить цікавими (представляти собою «невеликі відкриття») і використовуватись для створення нових задач і різного роду узагальнень. Науковці виділяють прийоми створення нових задач: на основі виявлення в процесі розв'язування початкової задачі властивостей об'єктів, відповідних умові; на основі узагальнення результату, отриманого при розв'язанні початкової задачі; шляхом створення задачі протилежної до початкової; з допомогою заміни однієї із умов початкової задачі[2].

І. Є. Дразнін вважає одним і головних способів створення систем задач спосіб варіювання, під яким слід розуміти створення такої послідовності вправ, в якій кожна наступна задача отримана із попередньої. Вчений відзначає, що після кількох місяців роботи учні досить успішно самі варіюють умову, а це розвиває фантазію, логіку, інтуїцію, тобто запропонований метод дає позитивний результат[1].

**Висновок.** З вище сказаного можна зробити висновок, що включення систем математичних задач і прийомів по їх конструюванню в процес навчання математики оказує вагомий вплив на формування якостей, які

характеризують розумовий розвиток особистості, її творчі здібності та світогляд. Системи задач дозволяють систематизувати знання учнів, сформувати їх уявлення про математику як про науку в цілому.

### Література

1. Дразнин И. Е. О выборе последовательности упражнений / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1990. – №5. – С. 43.
2. Изаак Д. Ф. Возникновение новых задач при исследовании задач по геометрии / Д. Ф. Изаак // Математика в школе. – 1994. – №5. – С. 34.
3. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – М. : Учпедгиз, 1961. – 208 с.
4. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – 2-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.

**Анотація:** в статті розглядаються різні підходи до конструювання систем математичних задач на урок, приводяться результати аналізу класифікації і методів конструювання систем математичних задач.

**Ключові слова:** система математичних задач; блок задач; методи побудов задач.

**Abstract:** the article considers different approaches to constructing systems of mathematical problems, the results of the classification analysis and design methods system math problems.

**Key words:** system of mathematical task; unit task; the construction methods of the task.

***Кривошея Олена Ігорівна***

*Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,  
студентка 4 курсу*

## **МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ**

Сучасним потужним пізнавальним методом та ефективним засобом розв'язування прикладних задач у шкільному курсі математики є метод математичного моделювання.

У шкільному курсі математики розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання ґрунтується на застосуванні математичної моделі як засобу дослідження реальних об'єктів, процесів чи явищ і полягає у здійсненні певної послідовності етапів:

1. Створення математичної моделі – переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, мовою математики.

2. Дослідження математичної моделі – розв'язування отриманої математичної задачі.

3. Інтерпретація розв'язків отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики мовою тієї галузі, де вона виникла [1].

Процес побудови математичної моделі називається математичними моделюванням. Таким чином, математична модель виступає як своєрідний інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом, і за допомогою якого вивчає об'єкт, що його цікавить.

Складання математичної моделі задачі, переклад задачі на мову математики поволі готує учнів до моделювання реальних процесів і явищ у їхній майбутній діяльності. Необхідно вже в основній школі знайомити учнів із методом математичного моделювання, який є потужним методом наукового дослідження і навчального пізнання, навчати учнів методу математичного моделювання у процесі розв'язування текстових задач.

Аналіз шкільного курсу математики показує, що математичні моделі, які в ньому застосовуються є наступними: числові вирази; формули, що визначають закони функціонування певних математичних понять; графічна ілюстрація (блок-схеми, діаграми, графіки, рисунки і т. п.); скорочений запис (схема співвідношень величин); таблиці; функції; рівняння і нерівності та їх системи; переклад мови задачі на мову геометричних фігур та знаходження їх периметрів, площ, об'ємів; пропорції, тощо.

Наприклад, під час розв'язування задачі *«Довжина підлоги 5 м, ширина – 4 м. Скільки потрібно прямокутних плиток зі сторонами 20 см і 25 см, щоб вистелити ними всю підлогу»*, математичною моделлю може бути вираз:

$$(500 \cdot 400) : (20 \cdot 25) = 400 \text{ (шт.)}.$$

Розв'язуючи задачу *«Із 20кг води озера Сиваш можна видобути 0,5кг солі. Скільки потрібно взяти цієї води, щоб видобути 1 тонну солі?»* слід звернути увагу учнів, що математичною моделлю даної задачі є пропорція:  $\frac{20}{x} = \frac{0,5}{1000}$ .

Слід мати на увазі, що одна й та ж задача може бути розв'язана за допомогою різних видів моделей. Розглянемо приклад.

**Задача 1.** *У двох рулонах 70м тканини. Один рулон коротший за другий на 20м. Скільки метрів тканини в кожному рулоні.*

Математична модель є числові вирази

- 1)  $(70 - 20) : 2 = 25 \text{ (м)}$  у першому рулоні;
- 2)  $25 + 20 = 45 \text{ (м)}$  у другому рулоні.

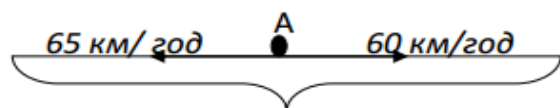
Математична модель є рівняння

$x$  – кількість метрів тканини в I рулоні,  $x+20$  – кількість метрів тканини в II рулоні, тоді за умовою задачі:

$$x+x+20=70.$$

**Задача 2.** *Від автобусної станції одночасно у протилежних напрямках вирушили два автобуси. Швидкість одного з них 65 км/год, а другого 60 км/год. Яка відстань буде між цими автобусами через 5 год?*

Математична модель є графічна ілюстрація



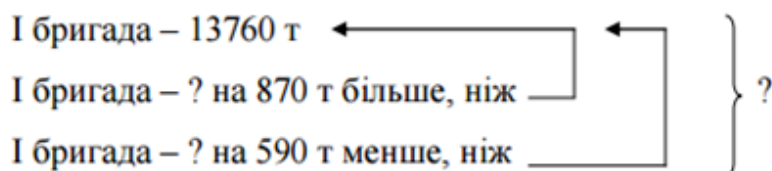
*Відстань через 5 год?*

Математична модель є числовий вираз

$$65 \cdot 5 + 60 \cdot 5 = 625 \text{ (км)} \quad \text{або} \quad (65 + 60) \cdot 5 = 625 \text{ (км)}.$$

**Задача 3.** Перша бригада видобула понад план 13760 т вугілля. Друга бригада видобула понад план на 870 т більше, а третя бригада – на 590 т менше, ніж перша бригада. Скільки тонн вугілля понад план видобули всі три бригади разом?

Математична модель є скорочений запис



Математична модель є числовий вираз

$$1370 + (1370 + 870) + (1370 - 590) = 41560 \text{ (т)}.$$

**Задача 4.** Дві будівельні компанії можуть спорудити об'єкт на 12 днів швидше, ніж одна перша і на 48 днів швидше, ніж одна друга. За скільки днів може побудувати об'єкт кожна компанія окремо?

Математична модель є рівняння

$x$  – час, за який I компанія збудує об'єкт,

$x + 36$  – час, за який II компанія збудує об'єкт,

тоді за умовою задачі:

$$x - 12 = \frac{x \cdot (x + 36)}{2x + 36}.$$

Математична модель є система рівнянь

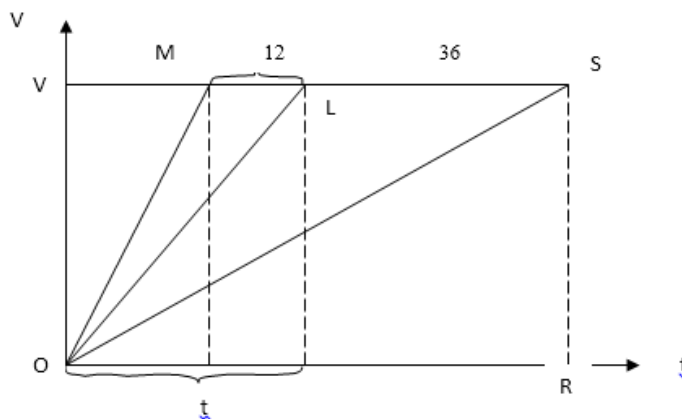
$x$  – час, за який I компанія збудує об'єкт,

$y$  – час, за який II компанія збудує об'єкт,

тоді за умовою задачі:

$$\begin{cases} \frac{x \cdot y}{x+y} = x-12; \\ \frac{x \cdot y}{x+y} = y-48. \end{cases}$$

## Математична модель є графічне зображення



Залучення учнів до розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання сприяє розвитку творчого мислення, свідомому, якісному засвоєнню навчального матеріалу, активізує навчально-пізнавальну діяльність, дозволяє здійснювати перенесення отриманих знань і умінь в ту чи іншу галузь, що у свою чергу, активізує інтерес до завдань прикладного характеру і вивчення математики в цілому.

## Література

1. Швець, В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.

**Анотація.** У статті розглядається метод математичного моделювання як засіб реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики. Наведено конкретні приклади задач розв'язані за допомогою різних видів моделей.

**Ключові слова:** модель, математичне моделювання, прикладні задачі.

**Abstract.** The article considers the method of mathematical modeling as a means of realization of applied orientation of the school course of mathematics. Specific examples of problems solved with the help of different types of models.

**Key words:** *model, mathematical modeling, applied problems.*



## **КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ ПАТРІОТИЧНОГО ЗМІСТУ**

На сучасному етапі розвитку України, коли існує пряма загроза денаціоналізації, втрати державної незалежності та потрапляння у сферу впливу іншої держави, виникає нагальна необхідність переосмислення зробленого і здійснення системних заходів, спрямованих на посилення патріотичного виховання дітей та молоді – формування нового українця, що діє на основі національних та європейських цінностей.

Ключову роль у формування патріотизму, громадянської свідомості, національних уподобань і переконань учнів під час вивчення всіх навчальних предметів, і математики зокрема, відіграє вчитель. Саме тому на вищій навчальній закладі покладається особлива відповідальність у підготовці майбутніх учителів до патріотичного виховання учнів.

Одним із засобів патріотичного виховання учнів на уроках математики є задачі, що викликають почуття гордості за рідну країну і стосуються державності, столиці, прапора тощо. У підручниках з математики міститься задачний матеріал, на основі якого можна здійснювати патріотичне виховання, але, на нашу думку, в недостатній кількості. Вчитель повинен вміти самостійно відшукувати або ж конструювати такі задачі. Тому, слід приділяти належну увагу цьому питанню і у методичній підготовці майбутніх учителів математики.

Під час вивчення методики математики необхідно націлювати студентів на конструювання математичних задач патріотичного змісту, які будуть одночасно засобом навчання та виховання учнів. Наприклад, одним із основних символів української держави є герб України, історія якого розпочалася ще з княжого роду Рюриковичів (хоча археологічні знахідки свідчать, що його використовували ще трипільці). Вони карбували тризуб на всьому: від печаток та монет до цеглин, з яких будували храми та церкви. Це був знак князівської

влади і спадкоємності української державної традиції. Вперше тризуб як офіційний державний герб України було прийнято Центральною Радою України в 1918 році за пропозицією М. Грушевського. Тому, варто запропонувати студентам розробити задачі патріотичного змісту до вивчення теми «Координатна площина» у 6 класі. Прикладом створення таких задач можуть бути наступні задачі:

**Задача 1.** На координатній площині знайдіть точки, координати яких задано в переліку.

$(0; 9,3), (1,6; -5,6), (3; 1,4), (4; -0,6), (0,5; -5,6), (-3,2; -5,2), (-5; -8,2).$

З'єднайте точки за аналогією з правою частиною і визначте, яка фігура утворилася (див. рис. 1).

**Відповідь:** Тризуб – герб України.

**Задача 2.** Нанесіть на координатній площині точки:

1. синім кольором:  $(0; -7), (1,5; -5,5), (2,2; -4), (5; -4), (5,8,2), (2,5; 5,5), (2; 0,3), (2,5; 0,3), (3; -0,3), (2; -1), (0,5; 2), (0,9; 8), (0; 9), (-0,9; 8), (-0,5; 2), (-2; -1), (-3; -0,3), (-2,5; 0,3), (-2; 0,3), (-2,5; 5,5), (-5; 8,2), (-5; -4), (-2,2; -4), (-1,5; -5,5);$

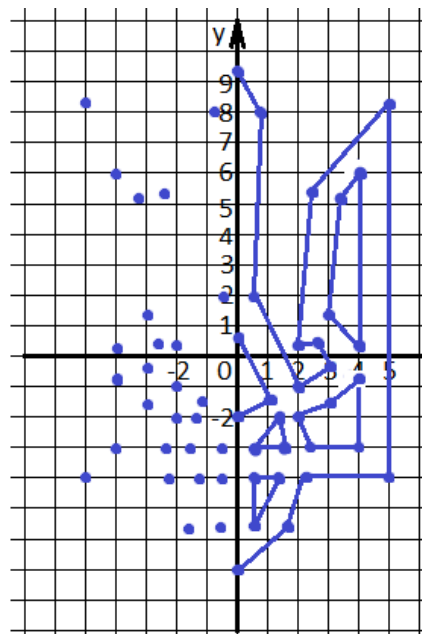


Рис. 1

2. зеленим кольором: а)  $(0,5; -5,5)$ ,  $(1,5; -4)$ ,  $(0,5; -4)$ ; б)  $(-0,5; -5,5)$ ,  $(-1,5; -4)$ ,  $(-0,5; -4)$ ; в)  $(0,5; -3)$ ,  $(1,6; -3)$ ,  $(1,2; -2)$ ; г)  $(-0,5; -3)$ ,  $(-1,6; -3)$ ,  $(-1,2; -2)$ ;

3. чорним: а)  $(0; -2)$ ,  $(1; -1,5)$ ,  $(0; 0,5)$ ,  $(-1; -1,5)$ ; б)  $(2; -2)$ ,  $(2,2; -3)$ ,  $(4; -3)$ ,  $(4; -0,5)$ ,  $(3; -1,5)$ ; в)  $(-2; -2)$ ,  $(-2,2; -3)$ ,  $(-4; -3)$ ,  $(-4; -0,5)$ ,  $(-3; -1,5)$ ;

4. червоним: а)  $(4; 0,3)$ ,  $(4; 6)$ ,  $(3,3; 5,2)$ ,  $(3,1,2)$ ; б)  $(-4; 0,3)$ ,  $(-4; 6)$ ,  $(-3,3; 5,2)$ ,  $(-3; 1,2)$ .

З'єднайте всі точки між собою у тій послідовності, у якій їх подано у п. 1), 2), 3), 4) так, щоб утворився знайомий для вас об'єкт.

*Відповідь.* Тризуб—герб України.

У процесі створення задач, майбутнім учителям математики необхідно також пам'ятати, що Україна має свої традиції, національну культуру, одяг, які можуть стати потужним елементом патріотичного виховання учнів на уроках математики. Наприклад, важливим національним атрибутом кожного українця є вишиванка. Перші вишивки на території України з'явилися ще за скіфів. Вишивка поєднує у собі велике різноманіття геометричних фігур, а саме: коло, квадрат, трикутник, ромб, хрест. Вже у VI столітті люди знали елементи геометрії, симетрію відносно точки, прямої, кількох прямих; вміли ділити площину на рівні частини. Орнамент утворювали з елементів або груп елементів шляхом їх ритмічного чергування. Тому вартою уваги, може бути задача створена до теми «Симетрія відносно прямої» у 9 класі.

**Задача 3.1)** Зобразіть на малюнку усі осі симетрії даного орнаменту.

2) Побудуйте симетричне зображення орнаменту відносно діагоналі, проведеної на малюнку (див. рис. 2).

Створення задач патріотичного змісту також є елементом патріотичного виховання і самих студентів, оскільки для їх підготовки необхідно продумати, який саме державницький аспект буде висвітлено, опрацювати матеріал з українознавства, віднайти для себе щось нове й цікаве, чого не знав раніше. Цей процес захоплює і спрямовує майбутніх учителів не лише на конструювання задач, але й на дослідження української культури.

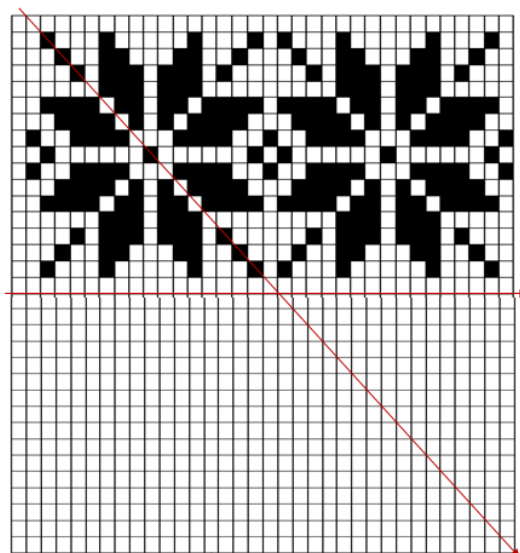


Рис. 2

### Література

1. Додаток до наказу Міністерства освіти і науки України від 16.06.2015 р. №641. Концепція національно-патріотичного виховання дітей та молоді – «Математика в рідній школі», № 9, 2015. – С. 4-10.

**Анотація.** У статті висвітлюється актуальність здійснення патріотичного виховання на уроках математики. Наголошується на доцільності підготовки майбутніх учителів математики щодо конструювання математичних задач патріотичного змісту. Наводяться приклади авторських задач патріотичного змісту.

**Ключові слова:** патріотичне виховання, задачі патріотичного змісту.

**Abstract.** The article highlights the relevance of the implementation of patriotic education in mathematics lessons. Emphasized on the feasibility of preparing future teachers of mathematics on designing mathematical tasks patriotic content. Examples of patriotic content copyright problems.

**Keywords:** patriotic education, the problem of patriotic content.

## **МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ДІАГНОСТИКИ ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ УЧНІВ З АЛГЕБРИ**

**Вступ.** Процес навчання математики часто супроводжується появою в учнів помилок. Частина з них пов'язана із звичайною квапливістю і неуважністю, інші – отримані в результаті недостатньо засвоєного навчального матеріалу. Важливою є робота вчителя з виявлення та корекції помилок учнів. Для досягнення високих результатів учнів процес навчання повинен будуватися таким чином, щоб діагностика навчальної діяльності учнів була систематичною.

**Метою даної статті** є аналіз та розробка засобів діагностики знань учнів з алгебри на початку навчального року.

**Виклад основного матеріалу.** Під час розробки календарного планування, вчитель математики має передбачити на перших уроках певну кількість годин для повторення матеріалу, опрацьованого учнями у минулому навчальному році.

Відповідно до вимог навчальної програми з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [4] основними завданнями курсу алгебри є вдосконалення обчислювальних навичок школярів, формування умінь виконувати тотожні перетворення цілих і дробових виразів, розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи. Згідно програми з математики в 6 класі учні вивчали розділ «Раціональні числа та дії над ними», де мали можливість познайомитись з поняттями раціонального числа, його властивостями та множиною допустимих операцій, що виконуються на цій множині. Однією з не менш важливих тем в цьому розділі є «Розв'язування рівнянь».

У сьомому класі вивчення алгебри починається з розділів «Лінійне рівняння з однією змінною» та «Цілі вирази». Вводиться одне з фундаментальних математичних понять – поняття функції. Тут же

розглядається лінійна функція та її графік. Згодом ці відомості використовуються для графічної ілюстрації розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Зокрема, у 8 класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями  $y = x^k$  і  $y = x$  та їх властивостями. Важливим є ознайомлення учнів з поняттям квадратного рівняння, адже квадратні рівняння знаходять своє застосування при розв'язуванні нерівностей, з якими дев'ятикласники знайомляться у розділі «Нерівності» у першому семестрі. Згодом розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується з розв'язуванням квадратних нерівностей. Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається у тісному зв'язку із змістовими лініями «тотожні перетворення», «рівняння і нерівності».

Зазначимо, що діагностика знань учнів з алгебри на початку навчального року сприяє повторенню та систематизації вивченого матеріалу, який стане базою для засвоєння нових знань учнів.

Для своєчасного виявлення і ліквідації прогалин в знаннях учнів, внесення відповідних корективів з метою попередження повторення аналогічних помилок доцільно використовувати *діагностичну контрольну роботу з математики*. Вона може містити кілька варіантів. Кожен із них складається з трьох частин, які відрізняються рівнем складності та формою завдань.

У першій частині контрольної роботи можна запропонувати п'ять тестових завдань з вибором однієї правильної відповіді, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень учнів. До кожного завдання подано три варіанти відповіді, з яких тільки одна є правильною. Завдання можна вважати виконаним правильно, якщо учень записав літеру, якою позначено правильний варіант відповіді. Правильна відповідь за кожне із п'яти завдань оцінюватимемо одним балом.

Друга частина роботи складається з двох завдань, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень учнів. Розв'язання повинно мати короткий запис без обґрунтування. Правильне розв'язання кожного із завдань цього блоку оцінюється двома балами.

Третя частина контрольної роботи включає одне завдання, що відповідає високому рівню навчальних досягнень учнів. Його розв'язання має містити розгорнутий запис з обґрунтуванням. Правильне розв'язання завдання оцінюється трьома балами. Сума балів нараховується за правильно виконані учнем завдання відповідно максимально можливій кількості запропонованих балів для кожного блоку (5; 4; 3 – всього 12 балів). Контрольна робота розрахована на 40 хвилин.

Розглянемо приклад діагностичної контрольної роботи з алгебри для учнів 8 класу:

*I рівень (5 балів)*

1. Спростити вираз:  $-7xy^2 \cdot 3x^2y^3$

а)  $-21y^5x^3$       б)  $21x^2y^6$       в)  $-21x^2y^6$       г)  $-4xy$

2. Розкласти на множники:  $c^2 - 4p^2$

а)  $(c - 2)(c + 2)$       б)  $4(c + p)$       в)  $(c - 2p)(c + 2p)$       г)  $(2p - c)(2p + c)$

3. Яка пара чисел задовільняє систему рівнянь:  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

а)  $(3; 0)$       б)  $(-3; -2)$       в)  $(3; 1)$       г)  $(5; 3)$

4. Розкласти на множники:  $vc + v^2 - 9c - 9v$

а)  $(c + v)(v + 9)$       б)  $9cv(c - v)$       в)  $(c + v)(v - 9)$       г)  $(c - v)(v - 9)$

5. Сума двох чисел дорівнює 7, а їх різниця дорівнює 3. Складіть систему рівнянь з двома змінними, якщо  $x$  – перше число, а  $y$  – друге число

а)  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 5 \end{cases}$       в)  $\begin{cases} xy = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$       г)  $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

*II рівень (4 бали)*

7. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій  $y = 4x - 7$  та  $y = -2x + 11$ .

$$\begin{cases} 4y - x = 0 \\ (x - 3)^2 - (x + 1)^2 = (y - 1)^2 - (y + 3)^2 \end{cases}$$

8. Розв'язати систему рівнянь:

*III рівень (3 бали)*

11. Розв'язати задачу:

Скільки кілограмів 25% і скільки кілограмів 50% сплавів міді треба взяти, щоб отримати 20 кг 40% сплаву?

**Висновки.** Для визначення рівня залишкових знань, своєчасного виявлення і внесення відповідних корективів з метою попередження повторення аналогічних помилок доцільно використовувати діагностичні контрольні роботи з математики. Запропонована нами контрольна робота, що складається з різних типів завдань і призначена для учнів з різними рівнями навчальних досягнень, забезпечує диференційований підхід при вивченні алгебри.

### Література

1. Мерзляк А. Г. Алгебра 8 клас / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: «Гімназія», 2008. – 372 с.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра 9 клас / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: «Гімназія», 2009. – 272 с.
3. Мерзляк А. Г. Збірник задач і контрольних робіт. Алгебра / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Київ: Гімназія, 2015. – 96 с.
4. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / [М. І. Бурда, Г. В. Апостолова, В. Г. Бевз та ін.]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <http://mon.gov.ua/content/%D0%9E%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B0/math.pdf>.

**Анотація.** Розглянуті у статті завдання для діагностики знань учнів охоплюють велику частину навчального матеріалу, і складені для учнів з різними рівнями навчальних досягнень, забезпечуючи диференційований підхід при вивченні алгебри.

**Ключові слова:** діагностика знань, діагностична контрольна робота з алгебри, диференційований підхід.

**Annotation.** There was considered task to diagnose students' knowledge covering most of the training material, and composed for students with different levels of educational achievement, providing a differentiated approach in the study of algebra.

**Keywords:** diagnosis knowledge, diagnostic test in algebra, differentiated approach.



## КОМПЕТЕНТІСНО ОРІЄНТОВАНІ ЗАДАЧІ У НАВЧАННІ УЧНІВ МАТЕМАТИКИ

У процесі математичної підготовки в школі, учні мають здобути не лише знання й уміння суто предметного характеру, але й досвід їх практичного застосування, значно розвинути мислення та інтуїцію, здобути первинні уміння й навички несуперечливо і доказово міркувати, навчитись обирати кращий шлях для розв'язання певної проблеми в різних умовах. Формуванню здібностей учнів використовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях, що вимагають різних підходів, роздумів і інтуїції можна при розв'язуванні компетентісно орієнтованих задач. Зміст таких задач має бути пов'язаним з навчальними темами, що складають основу програми навчання математики. Розглянемо конкретні приклади компетентісно орієнтованих задач.

*Світланка часто допомагає мамі куховарити, особливо вони люблять випікати торти. У вихідний день мама і донька захотіли порадувати татуса з братиком та спекти їх улюблений торт «Карпати». Але, як виявилось, у них вдома не було яєць, і мама вирішила доручити покупку цього продукту своїй донечці. Давши Світланці 20 грн, вона попросила її купити яйця і одну порцію морозива «Каштан», яке дуже любить Світланка.*

*Запитання 1.* Скільки яєць можна купити за 20 грн, якщо одне яйце коштує 1 грн 35 коп?

*Розв'язання.*  $n = 20 : 1,35 = 14,814814\dots$

Отримана частка є нескінченним періодичним десятковим дробом, у якого необхідно відкинути дробову частину:  $n = 14$ .

*Відповідь:* 14 яєць.

*Запитання 2.* Коли Світланка прийшла до магазину, виявилось, що морозиво коштує 7 грн 50 коп. Спочатку вона розгубилася, а потім швидко

порахувала, скільки яєць вона зможе купити, якщо купить морозиво за новою ціною. Скільки яєць купила Світланка?

*Розв'язання.*

1-й спосіб. Світланка відняла від загальної суми грошей вартість морозива:  $20 - 7,50 = 12,50$ . Якби вона купила 10 яєць, то витратила б  $1,35 \cdot 10 = 13,50$ . Для цього їй не вистачає однієї гривні, тому вона купила лише 9 яєць.

2-й спосіб. Світланка відняла від загальної суми грошей вартість морозива:  $20 - 7,50 = 12,50$ . Отриману суму вона поділила на 1,35:  $12,50 : 1,35 = 9,259259...$  Відкинувши дробову частину, отримала  $n = 9$ .

*Відповідь:* 9 яєць.

*Запитання 3.* Якою формулою можна виразити функціональну залежність залишку грошей від кількості куплених яєць при умові, що одне яйце коштує 1,35 грн? Яка область визначення цієї функції?

*Розв'язання.* Нехай  $y$  – залишок грошей,  $x$  – кількість яєць, тоді

$$y = 20 - 1,35x.$$

До області визначення даної функції належать натуральні значення  $x$ , які задовольняють умову:

$$20 - 1,35x \geq 0; -1,35x \geq -20; x \leq \frac{20}{1,35}; x \leq 14,814814 \dots$$

Тому  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 14\}$ .

*Відповідь:*  $y = 20 - 1,35x$ , область визначення функції –  $x \in \{1; 2; 3; \dots; 14\}$ .

Умова цієї задачі описує життєву ситуацію, в якій може опинитися кожний підліток, тому вона є компетентнісно орієнтованою задачею. Вміння виконувати обчислення усно або за допомогою калькулятора при здійсненні покупок є життєво необхідним для кожної сучасної людини, особливо в умовах, коли ціни на продукти не є стабільними. Для успішного розв'язування цієї задачі учні повинні вміти аналізувати задані умови, виконувати арифметичні дії з десятковими дробами, заповнювати таблиці значень змінних, виконувати

наближені обчислення відповідно до ситуації, задавати функціональну залежність формулою, вміти шукати її область визначення.

Варто пропонувати учням ознайомитися з компетентнісно орієнтованими задачами з різних професійних сфер та самостійно обрати одну з них для розв'язування як довгострокове домашнє завдання.

а) *соціологія*: у 1980 році на Землі проживало близько 4,4 мільярда людей, а приріст чисельності населення складав 1,7 % на рік; за умов збереження такого приросту побудуйте графік зміни чисельності населення, відкладаючи на осі абсцис десятиліття, а на осі ординат – кількість населення (у мільярдах); якою мала б бути чисельність населення планети при збереженні цього ж темпу росту у 2015 році і якою вона була насправді? якою буде чисельність населення планети при збереженні цього ж темпу росту у 2050 році? у 2222 році?

б) *економіка*: залежність добового надою молока у (в літрах) від віку корови  $x$  (в роках) виражається функцією  $y = -9,53 + 6,68x - 0,49x^2$  за умови, що  $x \in (2; 12)$ ; побудуйте графік такої залежності та визначте, у якому віці корова буде давати найбільше молока;

в) *екологія*: при вивченні екологічного стану річок вчені встановили залежність  $y = 0,958 + 0,13x - 0,225x^2$  швидкості течії річки  $y$  (в м/с) на різних її глибинах  $x \in [0; p]$ , де  $p$  – найбільша глибина русла (в м), яка виражається функцією; побудуйте графік такої залежності та визначте, на якій глибині річки швидкість течії буде найбільша;

г) *історія*: самостійно знайдіть дані щодо світових цін на золото за останнє століття; побудуйте графік зміни світових цін на золото в залежності від років останнього століття та визначте, чи задає він функцію; визначте, чи існує такий проміжок, на якому графік може задавати функцію, спробуйте задати її різними способами;

д) *мовознавство*: оберіть ваш улюблений твір та спробуйте побудувати для нього графік, що відповідає закону Ципфа розподілу частот зустрічі слів у тексті;

е) *спорт*: самостійно знайдіть дані щодо прогнозування результатів атлетів у гирьовому спорті; побудуйте графік залежності результату в класичному підніманні двох гир від ваги снаряда. Визначте вид функціональної залежності. За графіком визначте кількість піднімань двох гир вагою 32 кг, якщо атлет виконав таку вправу з гирями 26 кг 118 раз.

### Література

1. Соколенко Л. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум / Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон, В. О. Швець. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
2. Матяш О. І. Формування інтересу до навчання математики в основній школі. / О. І. Матяш, В. В. Коновал. – Вінниця: ВДПУ, 2007. – 46 с.
3. Тарасенкова Н.А. Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект // Математика в рідній школі, №11, 2016. – С. 26-31.

**Анотація.** *Формування умінь учнів використовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях відбувається при розв'язуванні компетентнісно орієнтованих задач.*

**Ключові слова:** *компетентнісно орієнтована задача, навчання математики, розв'язування задач.*

**Abstract.** *Formation of skills students use mathematical knowledge in different situations, occurs at solving competency-oriented tasks.*

**Keywords:** *competence oriented task training mathematics, solving problems.*

## **ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ВПРАВ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ ЗНАНЬ УЧНІВ З АЛГЕБРИ У 10 КЛАСІ**

**Постановка проблеми.** Серед базових освітніх галузей, які формують різнобічно розвинену особистість, важливе місце посідає математика. На сучасному етапі математичні знання й уміння розглядають не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості учня. Тому до основних завдань перебудови шкільної математичної освіти в Україні належить посилення її розвивальної функції.

Для досягнення цієї мети необхідно впроваджувати у навчальний процес з математики такі методи, організаційні форми й засоби навчання, які сприятимуть розвитку особистості учнів.[1]

**Мета статті.** Сформувати систему вправ для контрольної роботи з алгебри в 10 класі, для визначення залишкових знань учнів після літніх канікул.

**Виклад основного матеріалу.** З огляду на те, що розвиток математичного мислення найбільш інтенсивно відбувається під час виконання різноманітних математичних завдань, важливим питанням було й залишається створення системи завдань певного спрямування й навчання учнів їх виконувати. Відповідно до вимог сьогодення це повинні бути розвивальні завдання.

Розглянемо дану систему вправ з алгебри на діагностичну контрольну роботу для учнів 10 класу.

### **Діагностична контрольна робота**

#### **з алгебри 10 клас**

#### **Варіант I**

#### **Початковий рівень**

1. Розв'язати нерівність:  $x+4>1$

1.  $x>-3$ ;

2.  $x<3$ ;

3.  $x > 5$ ;

4.  $x < 5$ .

2. Знайти область визначення функції  $y = \frac{5x}{x+1}$

1.  $x \neq 1$ ;

2.  $x \neq -1$ ;

3.  $x \neq 5$ ;

4.  $x \neq -5$ .

3. Чому дорівнює корінь рівняння  $\sqrt{x} = 9$

1. 3;

2. 18;

3. 9;

4. -3.

### Середній рівень

4. Розв'язати систему рівнянь: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

1.  $\pm\sqrt{2}; \pm 1$ ;

2.  $\pm 1; \pm\sqrt{2}$ ;

3. (1;2);

4. (2;1).

5. Знайти 12-й член арифметичної прогресії, в якій перший член дорівнює 7, а різниця дорівнює 3

1. 29;

2. 40;

3. 43;

4. 87.

6. Розв'язати систему лінійних нерівностей 
$$\begin{cases} x + 3 < 4, \\ x - 2 > 2; \end{cases}$$

1. (0,1)

2. [0.1]

3. (2.4)

4. [2.4]

### **Достатній рівень**

7. Розв'язати нерівність другого степеня з однією змінною  $(x-3)(x+2)>0$

8. Знайти область визначення функції  $y = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

9. Знайти з точним урахуванням похибок частку наближених значень  $x=2046\pm0,03$ ;  $y=2,87\pm0,02$

### **Високий рівень**

10. Деякий товар спочатку подорожчав на 10%, А потім подешевшав на 10%. Як змінилась ціна товару.

11. Три додатні числа, сума яких дорівнює 21, утворюють арифметичну прогресію. Якщо до них відповідно додати 2, 3, 9, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.

12. Розв'язати нерівність  $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} \leq 0$

## **Варіант II**

### **Початковий рівень**

1. Розв'язати нерівність:  $x-3>5$

1.  $x>2$ ;

2.  $x<-2$ ;

3.  $x>8$ ;

4.  $x<8$ .

2. Знайти область визначення функції  $y = \frac{7x+1}{x-2}$

1.  $x \neq \frac{1}{7}$ ;

2.  $x \neq -1$ ;

3.  $x \neq 2$ ;

4.  $x \neq -2$ .

3. Чому дорівнює корінь рівняння  $\sqrt{x} - 16$  ?

1. 4;
2. 16;
3. -4;
4. 256.

### Середній рівень

4. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

1.  $\pm\sqrt{2}; \pm 1$ ;
2.  $\pm 1; \pm\sqrt{2}$ ;
3. (1;2);
4. (2;1).

5. Знайти 16-й член арифметичної прогресії, в якій перший член дорівнює 5, а різниця дорівнює 2.

1. 160;
2. 35;
3. 32;
4. 80.

6. Розв'язати систему лінійних нерівностей 
$$\begin{cases} x - 1 < 4, \\ x - 5 > 9; \end{cases}$$

1. (0,1)
2. [0,1]
3. (4,5)
4. [4,5]

### Достатній рівень

7. Розв'язати нерівність другого степеня з однією змінною  $(x-3)(x+8) > 0$

8. Знайти область визначення функції  $y = \frac{1}{\sqrt{4+7x}}$

9. Знайти з точним урахуванням похибок частку наближених значень  $x=4566\pm 0,02$ ;  $y=8,91\pm 0,03$

### Високий рівень



10. Деякий товар спочатку подорожчав на 20%, А потім подешевшав на 10%. Як змінилась ціна товару.
11. Сума перших трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 12. Якщо до третього члена додати 2, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.
12. Розв'язати нерівність  $\frac{3x-2}{x-2} > 3$ .

**Висновок.** Таким чином, добірка вправ, що була сформована для використання вчителями на уроках математики у старшій школі, може показати над чим ще потрібно працювати, аби учень старшої школи показував хороші результати при вивченні наступних тем за шкільною програмою.

### Література

1. Освітній ресурс МОН України [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://osvita.ua/school/manage/42677>.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра 10 клас / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: «Гімназія», 2009. – 272 с.
3. Мерзляк А. Г. Збірник задач і контрольних робіт. Алгебра / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Київ: Гімназія, 2015. – 96 с.

**Анотація.** Стаття присвячена формуванню системи вправ для діагностичних контрольних робіт, що проводяться вчителем на початку навчального року, з алгебри в 10 класі.

**Ключові слова:** залишкові знання, система вправ, діагностика.

**Summary.** This article is devoted to the formation of a system of exercises for diagnostic tests, conducted by the teacher at the beginning of the school year algebra in grade 10.

**Keywords:** residual knowledge, system of exercises, diagnostic.

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ**

**Постановка проблеми.** Ключовою ідеєю сучасної освіти вважається компетентнісний підхід і розглядається як спроба привести систему освіти у відповідність до потреб ринку праці. Основною метою освітньої галузі “Математика” є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам’яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Згідно Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти компетентність – це набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці, а компетенція – суспільно визнаний рівень знань, умінь, навичок, ставлень у певній сфері діяльності людини [1].

За визначенням PISA, математична компетентність учнів визначається як поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини, які забезпечують успішне розв’язання різноманітних проблем, що потребують застосування математики. При цьому мають на увазі не конкретні математичні вміння, а більш загальні уміння, що включають математичне мислення, математичну аргументацію, постановку та розв’язання математичної проблеми, математичне моделювання, використання різних математичних мов, інформаційних технологій, комунікативні вміння [8].

Досить часто, у методичній літературі компетентність розглядається як певний рівень інтегрування знань, умінь, навичок, досвіду та особистих якостей фахівця, який забезпечує ефективність і якість виконуваної ним професійної

діяльності [7]. Л.Д. Кудрявцев [3] стверджує, що математична компетентність – це інтегративна особистісна якість, заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, що свідчать про готовність і здатність студента здійснювати математичну діяльність. І. М. Зіненко [2] розглядає математичну компетентність як якість особистості, яка поєднує в собі математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності.

Аналіз літератури свідчить, що вітчизняні науковці найчастіше використовують розкриття поняття математичної компетентності згідно тлумачення С.А. Ракова: математична компетентність - це уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати. До предметно-галузевих математичних компетентностей С.А. Раков відносить: процедурну компетентність (уміння розв'язувати типові математичні задачі); логічну компетентність (володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень); технологічну компетентність (володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності); дослідницьку компетентність (володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач за допомогою ІКТ та математичних методів); методологічну компетентність (уміння оцінювати доцільність використання математичних методів та засобів ІКТ для розв'язання індивідуально і суспільно значущих задач) [4].

**Мета даної статті:** на основі виокремленого переліку основних складових математичної компетентності учнів у процесі вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи, розкрити можливості конструювання системи задач з алгебри у формуванні математичної компетентності учнів основної школи.

**Виклад основного матеріалу.** Необхідною умовою формування компетентностей є діяльнісна спрямованість навчання, яка передбачає постійне включення учнів до різних видів педагогічно доцільної активної навчально-

пізнавальної діяльності, а також практична його спрямованість. Необхідно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці. [6].

Для формування математичної компетентності у процесі вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи доцільно виділити перелік основних складових математичної компетентності.

*Наводить приклади:* рівняння з однією та двома змінними; лінійних рівнянь з однією та двома змінними; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; рівнянь зі змінною в знаменнику дробу; квадратних рівнянь; систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня.

*Пояснює:* що таке система двох лінійних рівнянь з двома змінними; скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними.

*Формулює означення:* лінійних рівнянь з однією та двома змінними; розв'язку рівняння з двома змінними; розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; квадратного рівняння та квадратного тричлена; кореня квадратного рівняння; *теорему Вієта*; *умову* рівності дробу нулю.

*Будує* графіки лінійних рівнянь із двома змінними.

*Описує способи розв'язування* системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; системи двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня.

*Записує формулу:* коренів квадратного рівняння; розкладання квадратного тричлена на лінійні множники; *теорему Вієта*.

*Характеризує випадки,* коли система двох лінійних рівнянь з двома змінними має один розв'язок; має безліч розв'язків; не має розв'язків; коли квадратне рівняння має один розв'язок; має безліч розв'язків; не має розв'язків.

*Розв'язує вправи, що передбачають:* знаходження коренів лінійних рівнянь з однією змінною і рівнянь, що зводяться до них; текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною; знаходження коренів системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, різними способами; текстові задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними; розв'язування

рівнянь зі змінною в знаменнику дробу; знаходження коренів квадратних рівнянь; розкладання квадратного тричлена на множники; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач; знаходження розв'язків систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня; складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач.

Формування процедурної компетентності у процесі вивчення рівнянь в основній школі може відбуватися при:

- формуванні знань учнів про основні способи розв'язування найпростіших рівнянь, їх систем та текстових задач, які розв'язуються за допомогою складання рівнянь у вигляді алгоритмів, схем та таблиць;

- навчанні учнів складати та «бачити» математичну модель у вигляді рівнянь для розв'язування прикладних задач;

- формуванні вмінь розпізнавати типові задачі (на рух, на роботу).

Формування логічної компетентності в учнів основної школи може здійснюватися при:

- вивченні доведень і самостійному доведенні теорем;

- використанні знань про рівносильні перетворення при розв'язуванні рівнянь та їх систем;

- вмінні обґрунтовувати доцільність вибраного методу розв'язування рівнянь та їх систем, застосовувати властивості функцій до розв'язування рівнянь та їх систем;

- проведенні аналізу розв'язаних завдань, складанні плану розв'язання рівнянь та систем рівнянь;

- у процесі розв'язування прикладних задач.

Для набуття учнями дослідницької компетентності доцільно:

- розв'язувати з учнями рівняння з параметрами, задачі прикладного змісту;

- організовувати пошуково-дослідницьку роботу учнів;

- досліджувати різні випадки розташування графіка функції в залежності від коефіцієнтів;
- встановлювати зв'язки між розв'язуванням систем рівнянь з самими рівняннями;
- шукати аналогії не лише в математиці, а й і в інших науках, зокрема у фізиці, економіці, біології.

Набути технологічну компетентність у процесі вивчення рівнянь в основній школі учні можуть завдяки використанню різноманітних програмних продуктів при:

- розв'язуванні рівнянь й систем рівнянь графічним способом за допомогою використання ІКТ;
- перевірці та оцінюванні знань учнів за допомогою електронних тестів.

Методологічна компетентність формується в учнів за умови сформованого вміння ефективно і доцільно обирати спосіб і метод розв'язування рівняння або системи рівнянь, розуміти їх переваги та обмеженість, формулювання математичних задач на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих проблем.

Формування відповідних знань, умінь і навичок та перерахованих компетенцій може здійснюватися під час аудиторних занять або при виконанні самостійних, домашніх завдань за умови створення якісної системи вправ, що включає перераховані вище поради. Наприклад, при вивченні теми «Квадратні рівняння» в курсі алгебри 7-9 класів для формування вказаних вище вмінь, учням варто запропонувати таку систему задач:

*1. Розв'яжіть рівняння:*

$$5x^2 - 45 = 0; \quad 2x^2 - 10x = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x^2 - 6x + 11 = 0; \quad -0,5x^2 + 2x - 2 = 0; \quad x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0.$$

*2. Знайдіть корені рівняння:*

$$(x-6)^2 - 2x(x+3) = 30 - 12x; \quad (2x-5)(x+2) = 18.$$

3. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

$$x^2 + 5x - 14; \quad -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3; \quad 0,3x^2 - 3x + 7,5.$$

4. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів  $-4x^2 - 8x + 27 = 0$ .

5. Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 - 3x - 18 = 0$ .

6. Розв'яжіть рівняння графічно:  $x^2 + 6x + 11 = 2$ ;  $x^2 + 3 = 0$ .

7. Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює  $70 \text{ см}^2$ , а одна зі сторін на  $9 \text{ см}$  більша за другу.

8. (Стародавня індійська задача)

На дві зграї розділившись,

Мавпи в гаї веселились.

Одна восьма їх в квадраті

У кущах потішно грали.

А дванадцять на ліанах

То висіли, то стрибали.

Разом скільки, ти дізнайся,

Мавп було у тому гаї?

9. Яким числом, додатним чи від'ємним, є відмінний від нуля корінь неповного квадратного рівняння  $ax^2 + bx = 0$ , якщо:

1)  $a < 0, b < 0$ ;

2)  $a < 0, b > 0$ ;

3)  $a > 0, b < 0$ ;

4)  $a > 0, b > 0$ .

10. При яких значеннях параметра  $a$  число  $2$  є коренем рівняння

$$x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0.$$

11. Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

12. Відомо, що  $x_1$  і  $x_2$  - корені рівняння  $2x^2 - 7x - 13 = 0$ . Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу  $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$ .

13. Із пункту А виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього в тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту А. Знайдіть швидкість велосипедиста та швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

14. Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилася на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

15. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-4}{x+4}; \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \quad x - 3\sqrt{x} + 2 = 0.$$

16. Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}}$ .

17. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{8x^2 - 7x - 1} = 0; \quad \sqrt{36 - x^2} + |x^2 + 5x - 6| = 0.$$

18. Побудуйте графік функції  $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$ .

19. Складіть квадратне рівняння, корені якого в 3 рази менші від відповідних коренів рівняння  $2x^2 - 14x + 9 = 0$ .

20. Розв'яжіть рівняння:

$$(x-4)(x+2)(x+8)(x+14) = 1204; \quad x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 5 = 0.$$

**Висновки.** Створення компетентнісної системи задач, сприяє свідомому й якісному засвоєнню учнями знань з математики і здатності їх застосовувати



на практиці. Відповідні серії задач систематизації знань та умінь практично можна створювати до кожної з тем шкільного курсу алгебри.

### **Література:**

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mon.gov.ua/content/Osvita/derj-standart-rochatk-new.pdf>
2. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку / І. М. Зіненко // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 2009. – № 2. – с. 165-174.
3. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Наука, 1977. - 65 с.
4. Матяш О.І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: Монографія / О. І. Матяш. – Вінниця: ФОП Легкун В. М., 2013. – 445 с.
5. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 384 с.
6. Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mon.gov.ua/content/Osvita/programa-matematika-5-9.pdf>
7. Олійник В. В. Формування правової компетентності керівників навчальних закладів у системі післядипломної педагогічної освіти: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.04 / Володимир Вікторович Олійник; Класичний прив. університет. – Запоріжжя, 2008. – 23 с.
8. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA – 2006 / [Баранова В.Ю., Ковалева Г.С., Кошеленко Н.Г., Красновский Э.А. и др.]. – М.: Центр оценки качества образования ИСМО РАО, 2007. – 99 с.

**Анотація.** У статті розглянуто умови формування математичної компетентності у процесі вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи, наведенні приклади вправ, які доцільно використовувати на уроках алгебри у школі під час вивчення квадратних рівнянь.

**Ключові слова:** компетентнісний підхід, математична компетентність, формування математичної компетентності у процесі вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи.

**Тереш Алла Василівна**  
*викладач математики Вінницького обласного комунального  
гуманітарно-педагогічного коледжу*

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ, ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ**

В педагогічних коледжах математична підготовка є невід'ємною складовою процесу навчання. Основною метою вивчення розділу «Теорія ймовірностей» має стати розвиток умінь студентів логічно й усвідомлено досліджувати явища реального світу. Реалізація цієї мети може бути виконана за допомогою розв'язування на заняттях з математики різного роду задач, від найпростіших до нестандартних логічних. Щоб допомогти студентам педагогічного коледжу опанувати практичну частину розділу і розширити умови набуття математичної компетентності, вважаємо необхідним подбати про спеціальну систему задач. Робота за такою системою задач дасть можливість кожному студенту якісно засвоїти теоретичний матеріал даного розділу та набутти необхідних компетентностей.

На вивчення розділу «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики в педагогічних коледжах» відводиться 14 годин. Зміст матеріалу включає вивчення наступних блоків: «Елементи комбінаторики» (множини та операції з ними; розміщення, перестановки, комбінації, правила суми і добутку) та «Елементи теорії ймовірностей» (ймовірність події, обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики). Студенту важливо розрізняти різні типи задач і розуміти до якого блоку вони відносяться. Особливо це важливо майбутнім учителям початкової школи, тому що актуальним є оволодіння основами математичної логіки та вмінням включати в систему життєво важливих знань елементи теорії ймовірностей.

Наведемо приклад реалізації принципу наступності при формуванні блоку задач з теми «Елементи теорії ймовірностей».

Тема «Множини та операції над ними» розширює уявлення студентів про види множин, порівняння множин на прикладах включення однієї множини в іншу. До цієї теми варто віднести наступний блок завдань:

1. Назви всі елементи кожної множини:

$$P = \{x | x \in N, \quad 3x + 6 = 10\}$$

2. Знайди  $A \cup B, A \cap B$ , якщо

$$A = \{2; 3; 5; 8; 11; 15; 22; \}$$

$$B = \{1; 3; 4; 8; 16; 21; 22; 23\}$$

3. Дано множини:  $B$  – множина всіх прямокутників;  $A$  – множина всіх чотирикутників;  $D$  – множина всіх квадратів;  $E$  – множина всіх паралелограмів. Розмістити ці множини в такому порядку, щоб кожна попередня множина була підмножиною наступної.

Набуті вміння, одержані при розв'язуванні завдань з блоку «Множини та операції з ними» студент зможе застосувати при розв'язанні задач з наступного блоку «Розміщення, перестановки і комбінації» до якого пропонуємо наступні задачі:

1. Скількома різними способами можна скласти список з 10 прізвищ?

2. Скількома способами можна розподілити 4 однакових путівки між 20 робітниками? А якщо всі путівки різні?

3. Скільки шестицифрових чисел, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так, щоб ці числа ділилися або на 5 або на 2?

Серед задач блоку «Розміщення, перестановки і комбінації» варто виділити завдання на застосування правила суми і добутку, наприклад:

Скільки шестицифрових чисел, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так, щоб ці числа ділилися або на 5 або на 2?

Скількома способами можна класти букет із 2 троянд і 3 жоржжин, якщо є 8 різних троянд і 6 різних жоржжин?

До блоку «Ймовірність події», відносимо задачі:

В скриньці лежать 12 білих і 8 червоних однакових на дотик кульок.

*1. Вийнято навмання одну кульку. Яка ймовірність того, що вона біла? Яка ймовірність того, що вона не біла?*

*2. Вийнято навмання дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі? Яка ймовірність того, що вони одного кольору?*

Розділ «Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики» вважаємо завершальним на етапі вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей», оскільки для розв'язання задач з цього блоку необхідні знання студентів з попередніх тем.

*1. Щоб здати екзамен з математики студент із 30 білетів вивчив на відмінно 25. Яка ймовірність того, що студент, відповідаючи на білет, отримає відмінну оцінку?*

*2. У коробці лежать 36 карток, пронумерованих числами від 1 до 36. Яка ймовірність того, що на навмання взятій картці буде записане число, яке: 1) кратне 4, 2) не кратне ні числу 2, ні числу 3?*

Складніші завдання з розділу «Елементи теорії ймовірності» варто розглядати також на факультативних заняттях, враховуючи професійну зорієнтованість студентів, наприклад, майбутніх учителів початкової школи.

Активне використання в процесі навчання математики в педагогічних коледжах спеціально відібраних завдань і вправ з теорії ймовірностей, спрямованих на активізацію пізнавальної діяльності студентів, сприяє як підвищенню якості їхніх знань і умінь, так і інтересу до математики, інтенсивному розвитку математичної компетентності майбутніх фахівців.

### **Література**

1. Бевз Г. П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 320 с.

2. Голомозий В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. – 366 с. ISBN 978-966-439-853-1

3. Жалдак М. І. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. – Полтава «Довкілля-К», 2010. - 721 с.

4. Матяш О. І. Окремі аспекти формування математичних понять / О. І. Матяш, А. В. Прус // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – Вип. 53. – Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2010. – С. 85–91.

5. Мерзляк А. Г. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.

6. Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики. Укл.: Ю.Є. Печеніжський, С.О. Станішевський, В.С.Рухляда. – Харків: ХНАМГ, 2009.- 64 с.

7. Трунова Е.В. Система задач з початків теорії ймовірностей та вступу до статистики і методика їх розв'язування. - Didactics of mathematics: Problems and Investigations. - Issue # 26. - 2006. – С. 96 – 104.

**Анотація.** *Різноманіття системи задач з розділу «Елементи теорії ймовірностей» на уроках математики в педагогічних коледжах дозволить більш глибоко розкрити пізнавальні резерви студентів та розвинути їх математичне мислення. Студенту важливо бачити різні типи задач і розуміти до якого блоку вони відносяться.*

**Ключові слова:** *студент педагогічного коледжу, система задач, теорія ймовірностей, загальнокультурний рівень, пізнавальна активність.*

**Abstract.** *The variety of system problems with the section "Elements of probability theory" in mathematics lessons in teachers colleges will reveal deeper cognitive reserve and students develop their mathematical thinking. Student important to see different types of problems and understand the unit to which they relate.*

**Summary:** *student, teaching college system problems, probability theory, general cultural level cognitive activity.*

## **ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСІБ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ПІДХОДУ ДО УЧНІВ**

**Вступ.** Диференціація у навчанні є однією з основних умов підвищення ефективності навчання учнів, є найважливішим чинником у розвитку творчої, самостійної і активної особистості, оскільки дозволяє створювати умови для розвитку кожного учня на основі знання і врахування його вікових та індивідуальних особливостей. Одним з найважливіших засобів врахування індивідуальних особливостей учнів під час навчання математики є методично грамотно створена система математичних задач, оскільки задачі займають центральне місце в змісті навчального матеріалу, є одним з найважливіших засобів, що реалізують розвиваючу функцію навчання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблема диференційованого підходу до навчання учнів досліджується давно, в педагогіці і методиці їй завжди приділялася значна увага. Проте висування і розвиток за останні роки нових концептуальних ідей, зокрема ідеї планування обов'язкових результатів навчання математики, призводить до поступової перебудови всієї методичної системи, в тому числі дозволяє по-новому поглянути на проблему диференційованого навчання. Принципова відмінність нового підходу полягає в тому, що перед різними категоріями учнів ставляться різні цілі: одні учні повинні досягти певного об'єктивно обумовленого рівня математичної підготовки (базового), а інші, що проявляють інтерес до математики і володіють хорошими математичними здібностями, повинні домогтися більш високих результатів.

У дисертаційному дослідженні Григулич С.М. «Самостійна робота старшокласників з математики в умовах диференційованого навчання»[2], зазначено, що однакові за складністю завдання для різних учнів мають різну трудність. Важливо, щоб під час формування навичок і вмінь учень вмів

самостійно здійснювати вибір завдання, що відповідає його рівню навченості. У дисертаційному дослідженні Буковської О.І. «Диференційований підхід до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі поглибленого вивчення геометрії» [1] обґрунтовано концепцію диференційованого підходу до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі поглибленого вивчення геометрії.

**Мета статті.** Розкрити можливості використання систем задач у навчанні математики, як засобу диференціації навчання учнів.

**Виклад основного матеріалу.** У процесі диференційованого вивчення навчальної теми, вивчення тем поділяють на етапи: початковий, середній, головний і заключний, що відповідають логіці та психології засвоєння математичних знань. Початковий етап – сприймання, усвідомлення, осмислення елементів базового змісту, формування початкових, елементарних умінь. Середній етап – формування базових навичок і умінь та застосування базового змісту в основних типових ситуаціях. Головний етап – логічне осмислення і застосування базового змісту в стандартних, змінених нових ситуаціях на основі нескладних міркувань (розвиток, поглиблення базового змісту). Заключний етап – узагальнення, систематизація повного змісту теми і його застосування в різних ситуаціях (стандартних, проблемних, нестандартних). Навчання на кожному етапі організовують як послідовне розв’язання диференційованих задач за певною описаною технологією (раціональними методами, прийомами, засобами, які гарантовано ведуть до досягнення цілей).

Для успішної і ефективної реалізації рівневої диференціації важливо:

- щоб виділені рівні засвоєння матеріалу і в першу чергу обов'язкові результати навчання повинні бути відкритими для учнів;
- враховувати, що рівнева диференціація здійснюється за таким принципом: пропонуючи учням однаковий обсяг навчального матеріалу, ми встановлюємо різні рівні вимог до його засвоєння;

- щоб завдання в навчальній діяльності були для учнів посильними, відповідними індивідуальному темпу оволодіння матеріалом на кожному етапі навчання. У той же час якщо для одних учнів необхідно продовжити етап відпрацювання основних, опорних знань і умінь, то інших не слід необґрунтовано затримувати на цьому етапі;

- забезпечити добровільність у виборі рівня засвоєння і звітності.

Рівнева диференціація навчання математики передбачає об'єднання учнів класу у мобільні групи для окремого навчання з їхніми індивідуальними особливостями. Думку про необхідність диференційованого підходу до навчальної діяльності школярів не раз висловлював у своїх працях В.О. Сухомлинський: „До кожного учням треба підійти, побачити його труднощі, кожному необхідно дати тільки для нього призначене завдання”. Диференціація передбачає таку організацію роботи на уроці, коли одному учневі або групі учитель пропонує в певній системі посильні завдання різної складності й цим самим створює сприятливі умови для розвитку й навчання кожного. [3]

Реалізація рівневого навчання математики може здійснюватися на будь-якому уроці, та на будь-якому етапі уроку. Найчастіше вчителі формують групи учнів за рівнем навченості та швидкістю засвоєння навчального матеріалу. Наприклад, організацію самостійної роботи в умовах диференційованого навчання, слід розпочати із розподілу учнів на три групи (ряди): перша - з високим рівнем навченості та швидкістю засвоєння навчального матеріалу, друга - відповідно середнім, а третя - з низьким рівнем. Наприклад, з теми «розкладання многочленів на множники» (7 клас), можна запропонувати таку самостійну роботу: [4]

#### *Самостійна робота*

| І ряд                   | ІІ ряд                   | ІІІ ряд                   |
|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $a(x - 2) + (x - 2)$ | 1) $a(x - y) - b(x - y)$ | 1) $a(b + c) + p(b + c)$  |
| 2) $x(a - 5) + (5 - a)$ | 2) $(c + 8) - c(c + 8)$  | 2) $3a(a + b) - m(a + b)$ |
| 3) $4a + by + ay + 4b$  | 3) $2(a - 3) + b(3 - a)$ | 3) $7(x - c) + (x - c)k$  |



|                         |                             |                          |
|-------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 4) $6x + 7y + 42 + xy$  | 4) $m - n + (n - m)y$       | 4) $3(b - 5) - a(5 - b)$ |
| 5) $2x - 3x + 4ax - 6a$ | 5) $3a - 3c + 3c + xa - xc$ | 5) $ax + bx + ac + bc$   |

З теми «Розкладання многочлена на множники»:

*Самостійна робота*

| Середній рівень<br>(І ряд)                         | Достатній рівень<br>(ІІ ряд)                         | Високий рівень<br>(ІІІ ряд)                     |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1) Розкладіть на множники:<br>$a^2 - ab - 8a + 8b$ | 1) Розкладіть на множники:<br>$x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ | 1) Розкладіть на множники:<br>$x^2 - 7x - 8$    |
| 2) Розв'яжіть рівняння:<br>$y(y+2) - 7(2+y) = 0$   | 2) Розв'яжіть рівняння:<br>$3x^2 - 9x - x + 3 = 0$   | 2) Розв'яжіть рівняння:<br>$x^3 - 5x^2 + x = 5$ |

Учитель наголошує, що виконання завдань відбувається за відомими алгоритмами розкладання многочленів на множники. Але окремі завдання вимагають нестандартного, творчого підходу. Наступну самостійну роботу можна використовувати на уроці узагальнення і систематизації знань і вмінь з теми «Розклад многочлена на множники»:

*Самостійна робота*

І рівень (І ряд)

1. У завданнях 1—3 заповніть пропуски.

Варіант 1.  $6x^2 - 2x = 2x(\square - \square)$ .

Варіант 2.  $15x^2 - 5x = 5x(\square - \square)$ .

2. Варіант 1.  $(m - n)^2 = m^2 - \square + n^2$ .

Варіант 2.  $(m + n)^2 = m^2 + \square + n^2$ .

3. Варіант 1.  $(3x - 4)(4 + 3x) = \square - 16$ .

Варіант 2.  $(-2x + 3)(3 + 2x) = \square - 4x^2$ .

ІІ рівень (ІІ ряд)

1. Розкладіть многочлен на множники.

Варіант 1.  $x - y + c(y - x)$ .

Варіант 2.  $x - y - z(y - x)$ .

2. Спростіть вираз.

Варіант 1.  $x^2 - (x - 2)(x + 2)$ .

Варіант 2.  $(x + 3)(x - 3) - x^2$ .

3. Знайдіть значення виразу, застосовуючи формулу скороченого множення.

Варіант 1.  $0,98^2$ .

Варіант 2.  $101^2$ .

III рівень (III ряд)

1. Доведіть, що при кожному натуральному значенні  $n$ :

Варіант 1. Число  $(n + 9) - n^2$  ділиться на 9.

Варіант 2. Число  $(n + 4) - n^2$  ділиться на 8.

2. Розв'яжіть рівняння.

Варіант 1.  $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)^2 = 6$ .

Варіант 2.  $(x - 4)(x + 4) - (x - 5)^2 = 3$ .

3. Доведіть, що:

Варіант 1.  $5^{30} - 5^{29} - 5^{28}$  ділиться на 19;

Варіант 2.  $4^{20} + 4^{19} + 4^{18}$  ділиться на 21.

**Висновки.** Мета диференційованого процесу навчання – забезпечити кожному учневі умови для максимального розвитку його здібностей, нахилів, задоволення пізнавальних потреб і інтересів в процесі засвоєння ними змісту загальної освіти. Сучасному етапу розвитку шкільної математичної освіти характерна спрямованість на особистісно орієнтований освітній процес, що розвиває і враховує індивідуальні особливості учнів. Одним із шляхів реалізації особистісно орієнтованого підходу в навчанні математики є диференціація навчання, що дозволяє кожному учневі отримувати математичну підготовку різного рівня відповідно до його індивідуальних особливостей, інтересів і життєвих планів.

## Література

1. Буковська О. І. Диференційований підхід до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі поглибленого вивчення геометрії: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / О. І. Буковська ; Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. — К., 2010. — 20 с.
2. Григулич С. М. Самостійна робота старшокласників з математики в умовах диференційованого навчання: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / С.М. Григулич Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. - К., 2004. — 230с.
3. Матяш О. И. Современные средства обучения в системе методической подготовки будущих учителей математики / О. И. Матяш // Бюллетень лаборатории математического, естественно научного образования и информатизации: рецензируемый сборник научных трудов. — Том III. — Москва: НИИСО ГБОУ ВПО МГПУ. — 2012. — С. 25–28.
4. Михайленко Л.Ф. Диференціація методичної підготовки майбутніх учителів математики/ Л. Ф. Михайленко// Матеріали XI міжнародної конференції «Стратегія якості в промисловості і освіті» (5-12 червня, 2015, Варна, Болгарія) ). — С.283-286.
5. Пильнюк О. О. Методи та способи впровадження диференційованого навчання у навчальний процес / О. О. Пильнюк. // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.. — 2012. — №88. — С. 75 – 77.
6. Солод Л. А., Бойко Л. А. Організація письмових робіт при диференційованому навчанні математики. / Л.А. Солод // Математика. — 2007. — №3. — С. 6 – 7.

**Анотація.** У статті розкрито можливості використання систем задач у навчанні математики, як засобу диференціації навчання учнів

**Ключові слова.** Диференціація навчання, рівнева диференціація

**Abstract.** In the article the possible use of problems in teaching mathematics as a means of differentiation of students

**Keywords.** Differentiation training level differentiation

***Шищенко Інна Володимирівна***

*Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
викладач кафедри математики*

## **ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ЯК ОБОВ'ЯЗКОВИЙ ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ**

Теорія та практика навчання математики беззаперечно підтверджує, що прикладна спрямованість шкільного курсу математики сприяє формуванню в учнів стійких мотивів до навчання, посилює інтерес до вивчення математики, підвищує рівень пізнавальної активності та самостійності учнів, а відповідно забезпечує активізацію пізнавальної діяльності учнів у процесі навчання математики.

У дослідженні [1] указано загальні методичні рекомендації для навчання учнів розв'язувати прикладні задачі. Метою таких завдань є, перш за все, показ учням ролі математичних знань, навичок та вмінь у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, надання учням можливостей проявити власні інтереси та опрацьовувати навчальний матеріал на тому рівні, що відповідає навчальним можливостям учня. Тому включення їх до системи задач з кожної теми є обов'язковим.

Учитель може запропонувати одну задачу до теми, систему задач чи перелік задач, з якого учень може самостійно обрати певну кількість як фіксовану, так і довільну. Такі задачі можуть бути індивідуальними для кожного учня, можуть бути розраховані на групу учнів з однаковим рівнем навчальних можливостей чи загальним завданням для всього класу.

Важливо, щоб до кожної задачі чи системи задач певного спрямування вчитель підготував та надав учням такі матеріали: перелік математичних теоретичних фактів з теми, необхідних для розв'язування задачі; систему евристичних запитань до задачі, відповіді на які забезпечували б пошук плану розв'язання задачі; план розв'язання задачі; додаткові завдання чи запитання; посилання на джерела додаткових даних з галузі знань, до якої належить задача; довідкові матеріали.

Наприклад, до задачі «Залежність обсягу продукції, що виробляється (наприклад, кількість готової до відправлення продукції у штуках), від величини ресурсу, що витрачається (наприклад, робочого часу)  $t$ , описується виробничою функцією  $f(t) = 4\sqrt{t}$ . Побудувати графік цієї виробничої функції та за графіком встановити: 1) обсяг виробленої продукції при  $t = 6$  год., при  $t = 8$  год., при  $t = 12$  год.; 2) приріст обсягу продукції при збільшенні робочого часу від 6 до 8 год.; від 12 до 14 год.; від 18 до 20 год. Перевірити, чи виконується для даної виробничої функції економічний закон спадної ефективності» пропонуємо учням таку картку.

#### *Картка до задачі*

*Теоретичний матеріал теми, який необхідно знати для розв'язування задачі:*

- побудова графіка функції  $y = \sqrt{x}$ ;
- геометричні перетворення графіків функцій;
- знаходження значення функції залежно від значення аргументу.

*План розв'язання задачі:*

- складіть таблицю значень функції  $f(t) = \sqrt{t}$ ;
- побудуйте графік функції  $f(t) = \sqrt{t}$ ;
- використовуючи геометричні перетворення графіків функцій, побудуйте графік функції  $f(t) = 4\sqrt{t}$ ;
- знайдіть ординату точки графіка цієї функції, що має абсцису  $t = 6$ ,  $t = 8$ ,  $t = 12$ ,  $t = 14$ ,  $t = 18$ ,  $t = 20$ ;
- для знаходження приросту функції від ординати точки графіка з абсцисою  $t = 8$  відніміть ординату точки графіка з абсцисою  $t = 6$ ;
- аналогічно для  $t = 12$  і  $t = 14$ ,  $t = 18$  і  $t = 20$ ;
- порівняйте отримані дані з вимогою закону спадної ефективності.

*Довідковий матеріал:*

- виробнича функція однієї змінної в економіці;
- економічний закон спадної ефективності.

*Додаткове завдання.* Складіть завдання-двійник (абстрактну математичну задачу, розв'язування якої подібне до розв'язування прикладної задачі [1, с. 37]) з алгебри та початків аналізу з даної теми.

Як показали проведені дослідження, така інструкція до виконання завдання дозволила учням швидше зорієнтуватися в етапах розв'язування задачі, абстрагуватися від властивостей, несуттєвих для побудови математичної моделі, та сформулювати умову та вимогу задачі мовою математики. Тоді учню легше вказувати відмінності між об'єктом та його моделлю, перевіряти знайдений розв'язок на відповідність вимозі задачі, інтерпретувати його мовою задачі.

### Література

1. Швець В. О. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії / В. О. Швець, А. В. Прус. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 156 с.

**Анотація.** У статті наголошується, що розв'язування прикладних задач теоретичного характеру має бути обов'язковим елементом системи задач до теми. Розв'язування такої задачі може включати самостійне вивчення нового матеріалу, вимагає від учнів творчих підходів до застосування теоретичних знань та практичних навичок та вмінь.

**Ключові слова:** навчання математики, прикладна задача, розв'язування задачі.

**Summary.** The article notes that the decision of applied problems of theoretical nature should be a mandatory element of the system task to topics. Solve this problem could include self-study of new material, requires students to use creative approaches to the application of theoretical knowledge and practical skills.

**Keywords:** teaching mathematics, applied problem, the solution of the problem.

***Шустова Наталія Юріївна***

*Вінницький обласний комунальний гуманітарно-педагогічний коледж,  
викладач математики та економічних дисциплін*

## **МІСЦЕ І РОЛЬ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ ПЕДАГОГІЧНОГО КОЛЕДЖУ**

Сучасний рівень розвитку освіти ставить нові вимоги щодо підготовки майбутніх фахівців, зокрема, майбутніх учителів початкової школи. Однією з них є вміння послідовно і наполегливо працювати над власним професійним саморозвитком. Важливим елементом підготовки таких фахівців виступає цілеспрямована діяльність викладача педагогічного коледжу, який в своїй методичній діяльності широко використовує різноманітні системи задач.

На думку В. В. Гузеєва [ 1 ], система задач – сукупність завдань до блоку занять з досліджуваної теми має задовольняти вимоги: повноти (наявність завдань на всі досліджувані поняття); наявності ключових завдань, тобто задач, які є своєрідними "ключами" до вирішення інших; можливості підключення (послідовність рівнів від підготовчих варіантів до узагальнень); зростання труднощів на кожному рівні; цільова орієнтація (для кожного завдання визначено його місце в блоці завдань); цільова достатність (кількість завдань оптимальна для досягнення поставленої мети); психологічна комфортність.

Мета використання системи дидактичних задач полягає у зацікавленні студентів до вивчення даної теми, заохоченні до складання та використання таких систем задач у майбутній професійній діяльності.

Розглянемо для прикладу вивчення елементів стохастичності у педагогічному коледжі на заняттях з математики. В шкільних підручниках, в різноманітних посібниках для вчителів достатньо задач для формування необхідних знань та умінь студентів. Однак, якщо врахувати, що студенти педагогічного коледжу, це майбутні вчителі початкової школи, то варто врахувати майбутні професійні інтереси цих студентів. Ми вважаємо, що слід відібрати, придумати такі задачі з конкретної теми, методику розв'язування яких майбутній учитель зможе використати навіть у роботі з учнями початкової школи.

Розглянемо приклад професійно зорієнтованої системи задач для майбутніх учителів початкової школи на заняттях математики з теми «Імовірність події»:

1. Яка ймовірність того що, підкинута монета впаде догори гербом?
2. Знайдіть ймовірність того, що ваш товариш народився в неділю?
3. У шухляді лежать 5 червоних і 7 жовтих олівців. Яка ймовірність того, що, беручи навмання, виймуть з шухляди червоний олівець?
4. Яка ймовірність того, що викликаючи учня до дошки у вашому класі, учитель викличе хлопчика?
5. Мальвіна, з написаних на окремих картках букв склала слово *БАНАН*. Потім вона ці картки перевернула, перетасувала і взяла навмання одну з них. Яка ймовірність того, що на ній виявиться буква А?
6. У мішку Діда Мороза лежать 4 плюшевих ведмедики, 8 цукерок і 5 мандаринів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання подарунок виявиться ведмедиком?
7. На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибраний навмання зошит буде у клітинку?
8. У змаганнях беруть участь 25 учнів однієї школи, 15 – другої і 10 – третьої. Яка ймовірність того, що першим виступатиме учень з першої школи?
9. У кошику лежать 4 яблука, 5 груш, 3 персики і 2 сливи. Яка ймовірність того що серед узятих плодів не буде ні яблука, ні груші?

Зміст завдань вказаної системи задач є максимально наближеним до майбутньої професійної діяльності студентів педагогічного коледжу, що забезпечуватиме додаткові стимули щодо мотивації їх розв'язання. Деякі із запропонованих задач студенти зможуть використовувати на заняттях з математики безпосередньо під час проходження педагогічної практики в початковій школі. Найдоцільніше їх використання у роботі з учнями 4 класу, після того як в учнів буде сформоване поняття дробу.

З метою забезпечення найкращих умов для формування основ



професійного саморозвитку майбутнього вчителя початкових класів, невід'ємною складовою навчально-методичного комплексу дисципліни мають стати спеціальні набори таких систем задач до кожної з тем курсу математики в педагогічному коледжі.

Таким чином, доцільне і методично-виважене використання викладачем математики педагогічного коледжу системи професійно зорієнтованих задач у власній педагогічній діяльності служитиме зразком ефективної організації навчального процесу, сприятиме глибині засвоєння знань та стимулюватиме майбутніх учителів до подальшого самовдосконалення та саморозвитку.

### Література

1. Гузеев В. В. Планирование результатов обучения [Текст] / В. В. Гузеев // Образовательная технология: от приема до философии. – М., 1996. – С.23-39.
2. Рибалко А. В. Система дослідницьких задач як засіб розвитку продуктивного мислення старшокласників у навчанні фізики: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / А. В. Рибалко; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2007. – 21 с.

**Анотація.** Розглянуто місце і роль системи професійно зорієнтованих задач у методичній діяльності викладача математики педагогічного коледжу. Наведено приклад системи задач для майбутніх учителів початкової школи на занятті математики з теми «Імовірність події». Вказано умови ефективності використання системи задач для формування основ професійного саморозвитку студентів.

**Ключові слова:** система задач, майбутній учитель початкової школи, методична діяльність, професійна підготовка.

**Abstract.** The place and role of professionally oriented tasks in a methodical teacher of Mathematics Teachers College. An example of problems for the system of primary school teachers in math class on "The probability event." Conditions specified system efficiency problems for laying the foundations of professional self-development of students.

**Keywords:** system tasks, future teacher, methodical work, professional training.

### **3.2. КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ УЧНІВ ГЕОМЕТРІЇ**

---

*Воєвода Аліна Леонідівна*

*Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, кандидат педагогічних наук*

#### **ПРИЙОМИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОСТІ МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ**

Процес навчання геометрії безпосередньо пов'язаний з формуванням в учнів вміння аналізувати та критично оцінювати думки, що виникають у процесі розв'язування задач. У педагогічній літературі критичність розглядається як усвідомлений контроль за ходом інтелектуальної діяльності, у процесі якої відбувається оцінювання роботи, вироблених гіпотез, шляхів їх доведення тощо [3].

Однак в практиці роботи загальноосвітніх шкіл формуванню критичності мислення учнів на уроках геометрії не завжди приділяється належна увага.

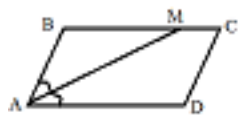
Аналіз шкільних підручників свідчить що, більшість поданих у них задач містять достатній і необхідний набір даних для отримання єдиної правильної відповіді. Проте в процесі навчання геометрії важливо формувати в учнів вміння знаходити протиріччя в запропонованій інформації, оцінювати проблемну ситуацію з точки зору можливостей її розв'язання.

У науково-методичній літературі описано ряд методів та прийомів навчання, застосування яких може сприяти розвитку критичності мислення учнів: прийом раптових заборон, метод нових варіантів (пошук альтернатив), метод гіпотез, метод прогнозування, прийом варіювання задач, прийом застосування задач з надлишком або нестачею даних, прийом застосування суперечливих (провокуючих) задач тощо.

Розглянемо можливості застосування окремих прийомів на уроках геометрії в загальноосвітній школі.

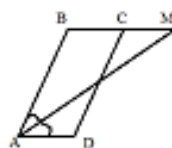
*Прийом варіювання задач.* Він включає не лише зміну, але й заміну об'єктів і (або) відношень, додавання і (або) видалення компонентів (умов, вимог) задачі [2]. У результаті варіювання можуть з'явитися некоректні задачі, завдання з надлишком або недостатчею даних [1]. Аналіз ознак і зв'язків, одержаних із різних комбінацій елементів, застосовується як для виявлення проблем, так і для пошуку нових ідей.

Для прикладу, замінімо в задачі: «В паралелограмі ABCD бісектриса кута А перетинає сторону ВС в точці М. ВМ=6см, МС=3см. Знайдіть периметр паралелограма» (рис.1) «сторону ВС» на «пряму ВС», отримаємо іншу задачу (рис.2).



$$P = (9+6)2 = 30$$

Рис.1



$$P = (3+6)2 = 18$$

Рис. 2

Подібні задачі сприяють усвідомленню учнями того, що від заміни одного поняття в умові може повністю змінитися зміст задачі, означення чи теореми.

*Прийом застосування задач з недостатчею даних.* Проаналізувавши умову задачі, учні мають вказати, яких даних в задачі не вистачає і чому.

Наприклад: В трикутнику довжина однієї сторони дорівнює 12 см, а другої 6 см. Знайти довжину третьої сторони трикутника

На перший погляд, може здатись, що задача розв'язку немає, бо в умові відсутні необхідні дані. Однак її розв'язання потребує більш глибокого аналізу даних, а також пошукової активності учнів. Позначивши невідому третю сторону а, використаємо нерівність трикутника. Матимемо систему

нерівностей: 
$$\begin{cases} 12 + 6 > a; \\ a + 12 > 6; \\ a + 6 > 12. \end{cases}$$
 Отже,  $6 < a < 18$ .

*Прийом застосування задач із надлишком даних.*

В прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 см., а один з катетів дорівнює 15 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник, якщо площа трикутника 60 кв. см.

Учням може здатися, що в умові задачі площа трикутника зайва. Однак без перевірки існування прямокутного трикутника з вказаним набором даних

розв'язання задачі не можна вважати повним.

Прийом застосування *провокативних (суперечливих) задач*.

1) В прямокутному трикутнику катети дорівнюють 10 см і 24 см, а гіпотенуза дорівнює 28см. Знайти його площу трикутника.

Деякі учні можуть обчислити площу трикутника за формулою:  $s = \frac{a \cdot b}{2}$ , вважаючи, що дані про довжину гіпотенузи зайві. Однак передусім треба було з'ясувати чи існує прямокутний трикутник з катетами 10 см і 24 см і гіпотенузою 28 см?

2) Сторони трикутника відносяться як 1:2:3. А його периметр дорівнює 24 см. Знайдіть довжину найменшої сторони трикутника.

Трикутник із заданими сторонами не існує, однак переформулювавши умову, можна отримати несуперечливу задачу. Насправді, мова йде не про некоректність умови задачі, а про включення в розв'язування елементів дослідження, що сприяє розвитку критичності мислення.

Застосування прийомів формування критичності мислення на уроках геометрії допомагають учням не просто розв'язувати задачі, а в першу чергу аналізувати умову на повноту використання даних, перевірку отриманого результату на відповідність початковим даним тощо.

### Література

1. Воєвода А.Л. Місце і роль некоректних задач в шкільному курсі математики / А. Л. Воєвода // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2014. – II (18), Issue 37. – р. 45-48.
2. Ковалёва Г. И. Варьирование как средство создания провоцирующих задач / Г. И. Ковалёва, Л. А. Воробьёва // Известия Волгоградского государственного технического университета. № 5 (132) / том 16 / 2014. С. 93-96. Режим доступа: [cyberleninka.ru/.../varirovanie-kak-sredstvo-sozdaniya-provotsiruyuschih-zadach-po-m...](http://cyberleninka.ru/.../varirovanie-kak-sredstvo-sozdaniya-provotsiruyuschih-zadach-po-m...)
3. Теплов Б. М. Избранные труды: в 2-х т. Том 2 / Б. М. Теплов. – М.: Педагогика, 1985. – 360 с.

**Аннотація.** У доповіді розглядаються можливості застосування різних методів прийомів навчання з метою розвитку критичності мислення учнів. Наводяться приклади розв'язування окремих задач з нестачею та надлишком даних, провокативних задач та розглядається їх вплив на формування критичності мислення учнів.

**Ключові слова:** критичність мислення, прийом навчання, задача.

**Annotations.** The report examined the possibility of using different methods of teaching techniques to develop critical thinking of students. Examples of solving specific problems of shortage and excess data provocative tasks and considered their impact on the critical thinking of students.

**Keywords:** criticality thinking, taking learning task.

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕРІВНОСТЯМИ, ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ГУРТКА У СЬОМОМУ КЛАСІ**

Геометрична компетентність є важливою складовою математичної компетентності учнів. Як зазначається в [2], однією із складових геометричної компетентності учнів 7–9 класів є така: «учень застосовує вивчені означення і властивості до розв'язування задач».

У сьомому класі учні вперше зустрічаються з геометричними нерівностями: при вивченні теми «Трикутники» розглядається нерівність трикутника, а також така його важлива властивість, яка теж пов'язується із нерівностями: навпроти більшого кута трикутника лежить більша сторона. Методичним аспектам того, як розвинути в учнів вміння застосовувати вказані властивості трикутника до розв'язування задач і присвячена ця стаття.

Не останню роль в успішності засвоєння теоретичного матеріалу та формування вміння розв'язувати задачі відіграє добірка задач на занятті та їх послідовність. Гарно вибудована система сприяє кращому розумінню самої суті певного математичного поняття або ж методу розв'язання. Під поняттям «система задач» ми розуміємо таку послідовність задач, взаємозв'язок та взаємодія яких призводить до створення в учнів цілісного уявлення про те чи інше математичне поняття чи твердження або про той чи інший метод розв'язування задач певного типу.

Ми зосередимо увагу на системі задач, яка була б доцільною для проведення першого заняття математичного гуртка на тему «Нерівності, пов'язані із елементами трикутника». Нижче запропонована добірка задач, доведення яких базується на тому факті, що навпроти більшого кута трикутника лежить його більша сторона.

Задача 1. Доведіть, що в трикутнику  $ABC$ : кут  $ABC$  менше кута  $BAC$  тоді і тільки тоді, коли  $AC$  менше  $BC$  [4, с.255].

*Методичний коментар.* Дана задача є фундаментальним геометричним фактом, на основі якого ґрунтується доведення багатьох інших тверджень. Саме тому ми вважаємо доцільним звернути на неї особливу увагу, продемонструвавши учням повне і детальне доведення. Окрім того, при

вивченні нового матеріалу, краще розпочинати засвоєння з розв'язування простих завдань. Це є запорукою того, що в учнів сформуються міцні уявлення про поняття, твердження чи явища, а також відпрацюються уміння розв'язувати типові задачі з даної теми.

Задача 2. В тупокутному трикутнику на одній із сторін, прилеглих до тупого кута, обрано точку  $X$ . Доведіть, що довжина відрізка, який з'єднує цю точку з протилежною вершиною трикутника, менше довжини сторони, яка лежить напроти тупого кута.

*Методичний коментар.* Не зважаючи на формальну простоту доведення, дана задача не є тривіальною. Не існує однозначного шаблону її розв'язання, бо для неї потрібно знайти свій, власний, підхід, який розвиває в учнів нестандартне бачення на розв'язання тої чи іншої проблеми. Разом з тим дана задача є корисною з психологічної точки зору, оскільки дає змогу відчувати учням спроможність успішно розв'язувати задачі підвищеного рівня складності.

Задача 3. В тупокутному трикутнику на двох сторонах, прилеглих до тупого кута, обрано точки  $X$  та  $Y$ . Довести, що довжина відрізка  $XY$  менше довжини третьої сторони трикутника.

*Методичний коментар.* На перший погляд задача здається важчою, ніж попередня, хоча доведення цієї задачі базується на результаті попередньої. В той же час, щоб «побачити» цей аспект доведення учням потрібно здійснити нестандартний крок: побудову. Такий метод є дуже корисним, адже досить часто ключ до розв'язання тої чи іншої задачі знаходиться за межами заданої фігури, проте не в контексті даної задачі.

Задача 4. На стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $D$ . Доведіть, що відрізок  $CD$  менше принаймні однієї з сторін  $AC$  чи  $BC$  [3, с.54].

*Методичний коментар.* На початковому етапі розв'язування даної задачі учневі здається, що вона кардинально відрізняється від попередніх двох, адже в них говорилося про тупокутний трикутник, а в цій – про довільний. Але насправді, розв'язання даної задачі схоже до розв'язання попередньої; задачею учня, як і раніше, залишається знайти підхід до розв'язання, помітити аналогію з попередньою задачею, «побачити» де саме утвориться тупокутний трикутник. Також відмітимо, що з кожною наступною задачею зростає кількість логічних кроків, необхідних для її розв'язання. Ця задача є корисною для розвитку в учня уважності та кмітливості.

Задача 5. Доведіть, що відрізок з кінцями в середині трикутника чи на його сторонах не перевищує найбільшої сторони трикутника.

*Методичний коментар.* Кожна задача в цій системі грає свою, досить серйозну, роль. Доведення кожної наступної базується на результаті попередньої. І таким чином ми поступово підводимо учня до розв'язання кінцевої задачі, найчастіше це задачі олімпіадного типу, в нашій системі це задача №5. Якщо учень скурпульозно розв'язував попередні задачі, одну за одною, в кінці кінців йому вдасться знайти підхід і до цієї задачі. Зрозуміти, що всі попередні задачі є інструментами, з допомогою яких він може розв'язати кінцеву задачу.

При підготовці уроку та заняття математичного гуртка, пошуку задач, окрім спеціалізованої літератури, радимо скористатись інтернет ресурсами [1,5]. На даних сайтах розміщено достатньо велику кількість різнорівневих задач з геометрії та алгебри відповідно.

### **Література**

1. ІПС «Задачі з геометрії» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: [zadachi.mcsme.ru](http://zadachi.mcsme.ru).
2. Матяш О.І. Теоретичні та методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії / О.І. Матяш. – Вінниця, 2013. – 450 с.
3. Нікулін О.В. Геометрія: Поглиблений курс. 7- 9 класи/ Нікулін О. В., Кукуш О. Г.// - К. : Перун ; Ірпінь, 1998. - 349 с.
4. Прасолов В.В. Задачі з планіметрії / Прасолов В.В. – Москва: МЦНМО, Московський підручник, 2006. – 640 с.
5. Система «Задачі» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: [problems.ru](http://problems.ru).

**Анотація.** Розглянуто систему задач для проведення першого заняття математичного гуртка на тему «Нерівності, пов'язані з елементами трикутника», з метою формування в учнів певних математичних компетентностей.

**Ключові слова:** математичний гурток, геометричні нерівності, нерівності у трикутнику.

**Abstract.** The system of problems for the first class of mathematical workshop on "Inequalities which related to elements of a triangle" in order to develop students' mathematical competencies.

**Keywords:** mathematical workshop, geometric inequalities, inequalities in the triangle.

*Мартиненко Дмитро Олександрович*  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, студент магистратури*

## **КОНСТРУЮВАННЯ ЗАДАЧ НА РОЗГОРТКИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ ЗАСОБАМИ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA**

Одним із основних завдань геометрії у старшій школі, як і в основній, є навчання учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але в контексті формування просторової уяви учнів стереометрія має більше можливостей.. Проблема формування та розвитку просторової уяви нелегке випробування для кожного вчителя. У процесі вивчення стереометрії перед учнем виникають проблеми, що стосуються побудови рисунка до тієї чи іншої задачі та його розуміння. Знаходження відстаней між елементами просторових тіл та площ їх поверхонь – це ті задачі, які викликають у старшокласників найбільше труднощів. Використання розгорток геометричних тіл – один із оптимальних способів розв'язання подібних задач.

Розгортка – це таке перетворення фігури, в результаті якого вона суміщається з площиною без утворення розривів та заломлень [1, с. 4]. В математиці виділяють навіть клас задач під назвою «Задачі на розгортку геометричних тіл». Але виникає питання: «Як учню побудувати розгортку, коли важко навіть уявити саму фігуру?»

Використання комп'ютерних технологій – це ефективний шлях вирішення даної проблеми. Наразі популярні такі математично орієнтовні середовища, як: Geometer's, Sketchpad, Gran, DG, Математический конструктор, Живая математика, GeoGebra тощо. Разом з цим у своїй більшості згадані програми оперують об'єктами двовимірної природи, і дуже мала кількість із них підтримує розв'язування задач, вивчення яких відбувається на уроках стереометрії [3, с. 124]. Одним з найбільш відомих та найбільш універсальних програмних засобів є середовище GeoGebra – графічний калькулятор для функцій, геометрії, статистики та 3D Геометрії [2]. Середовище GeoGebra



знаходиться у вільному доступі, має зручний інтерфейс та стане відмінним помічником як для учителя, так і для учня.

GeoGebra дозволяє конструювати різноманітні фігури, будувати графіки та створювати анімації, тим самим спрощуючи пошук розв'язання різних задач. Саме ця програма допоможе учням побудувати необхідні фігури та їх розгортки, на власні очі побачити те, що інколи складно уявити.

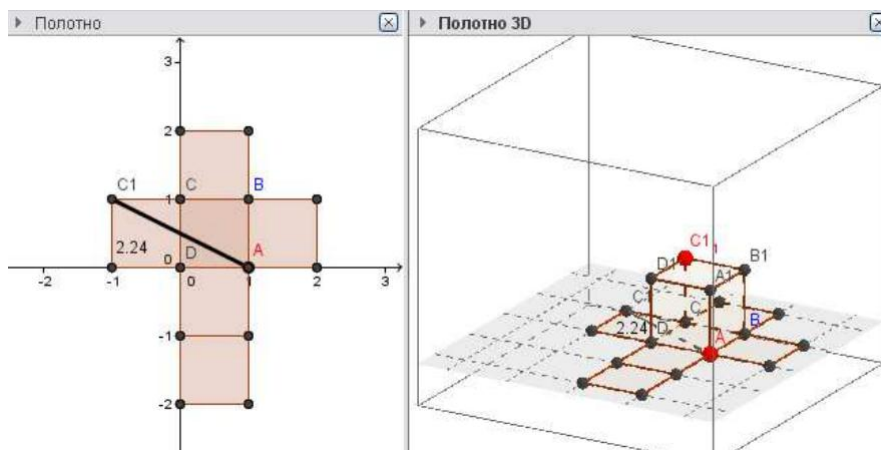
Для представлення повного потенціалу використання 3D-інструментарію середовища GeoGebra, розглянемо задачу на розгортку фігури.

*Задача.* Знайти довжину найкоротшого шляху по поверхні куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром 1 см, що з'єднує вершини  $A$  і  $C_1$ .

*Методичний коментар:* найкоротший шлях визначається через відстань між двома точками, але обмеження задачі на визначення відстані саме по поверхні куба вимагає прокласти шлях, який з'єднує ці точки. Застосування розгортки до розв'язування даної задачі значно спростить сам хід розв'язання.

*Розв'язання.* Для вдалого і негроміздкого зображення побудов заздалегідь обмежимо позначення об'єктів (*Налаштування/ Позначення/ Тільки для точок*). Побудуємо дві сусідні вершини нижньої основи куба зі стороною 1, для чого через командний рядок задамо точки  $A(1;0;0)$  та  $B(1;1;0)$ . За допомогою інструмента Куб побудуємо куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , вказавши дві сусідні вершини. Для точок  $A$  і  $C_1$  змінимо їх колір (наприклад, на червоний) і збільшимо їх розмір, тим самим виділимо їх серед інших вершин.

За допомогою інструменту *Розгортка* побудуємо розгортку куба (рис. 1), яка автоматично з'явиться і на 2D полотні.



(рис.1)

На розгортці лише точки нижньої основи залишаються позначеними. Інші вузлові точки розгортки не сприймаються, як такі, що були вершинами куба (середовище буде їх як нові). Елементи, побудовані на кубі (наприклад, точки на ребрах, відрізки на гранях), не переносяться на розгортку, і навпаки, усе, що побудовано на розгортці, не відображається на кубі. Куб і його розгортка динамічно не пов'язані.

Позначимо на розгортці точку, що відповідає вершині  $C_1$  і побудуємо відрізок  $AC_1$ . Визначимо його довжину – за допомогою правої кнопки миші відрізка  $AC_1$  викличемо *Властивості*, у пункті *Показувати позначення* оберемо *Значення*. Зауважимо, що після побудови розгортки знаходження точного розв'язку задачі зводиться до застосування теореми Піфагора і стає очевидним:  $\sqrt{5}$ .

*Відповідь.* Довжина відрізка  $AC_1$  дорівнює  $\sqrt{5} \approx 2,24$  [3, с. 127-128].

Зважаючи на вище викладене, динамічне середовище GeoGebra є необхідним помічником для учня, але й учитель зможе використовувати його у своїй роботі. Змінивши лиш вхідні дані він може самостійно конструювати задачі на розгортку геометричних тіл та використовувати їх для закріплення знань учнів з цієї теми. Наприклад, отримані задачі:

1. Знайти довжину найкоротшого шляху по поверхні куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром 2 см, що з'єднує вершини  $B$  і  $D_1$ .

2. Знайти довжину найкоротшого шляху по поверхні правильного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з бічним ребром 1 см та стороною основи 2 см, що з'єднує вершини  $A$  і  $C_1$ .

3. Знайти довжину найкоротшого шляху по поверхні правильного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з бічним ребром 2 см та стороною основи 1 см, що з'єднує вершини  $B$  і  $D_1$ .

З огляду на те, що навчання геометрії має базуватися на образах математичних об'єктів, то їх створення й оперування ними у спеціалізованих комп'ютерних середовищах може стати тією основою, яка забезпечить швидке і якісне засвоєння складного стереометричного матеріалу. Отже, під час розв'язання задач на розгортки геометричних тіл доцільним буде використання програмного середовища GeoGebra, адже робота саме з цією програмою з одного боку сприятиме розвитку просторової уяви та зацікавить учнів у вивченні геометрії, представивши усю її багатогранність, а з іншого боку допоможе вчителю легко створювати нові задачі на розгортку геометричних тіл.

### Література:

1. Григорьева О.О. Развертки поверхностей. Учебно-методические указания. / О.О. Григорьева; Ижевский гос. тех. ун-т им. М. Т. Калашникова. – Ижевск: Издательство ИЖГТУ, 2012. – 25 с.: С. 4-5.
2. Офіційний сайт GeoGebra [Електронний ресурс]:[Веб-сайт]. – Електронні дані. – Зальцбург: М. Hohenwarter, 2001. – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/>
3. Семеніхіна О.В. Інструментарій програми Geogebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. - 2014. - Т. 44, вип. 6. - С. 124-133.

**Анотація:** В тексті тез представлено розв'язання задач на розгортки геометричних тіл за допомогою використання динамічного середовища Geogebra та вказівки до конструювання відповідних задач на розгортки у цьому середовищі.

**Ключові слова:** Geogebra, задачі на розгортку, стереометрія.

**Abstract:** In text of theses the decision of tasks is presented on the involutes of geometrical bodies by means of the use of dynamic environment of Geogebra and pointing to constructing of corresponding tasks on involutes in this environment.

**Key words:** Geogebra, tasks on an involute, stereometry.

## **ФОРМУВАННЯ ДОБІРОК ЗАДАЧ-ПЕРЛИНОК У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕРЕОМЕТРІЇ**

Одна із специфічних особливостей навчання математики полягає в тому, що в процесі методично грамотної організації розв'язування вдало відібраних задач можуть бути створені належні умови для осмислення та сприйняття актуальних для учнів знань. З метою формування методичної компетентності майбутніх учителів математики навчати учнів розв'язувати стереометричні задачі на знаходження геометричних величин, ми розглядаємо методику розв'язування задач з різними ситуаціями для різних видів призм та пірамід: трикутних (в основі – правильний трикутник, рівнобедрений трикутник або довільний трикутник), чотирикутних (в основі – квадрат, прямокутник, ромб, паралелограм або довільний чотирикутник). Як виявилось, у студентів формується певний стереотип мислення. З метою активізації мислення, доречним, в цих умовах, вважаємо розгляд спеціально скомпонованої системи задач-перлинок:

- ✓ У пряму призму вписано кулю, радіус якої дорівнює 4 см. Знайдіть площу основи призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює  $48 \text{ см}^2$ .
- ✓ Площа бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює  $S$ , а відстань від центра основи до бічної грані -  $d$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- ✓ Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють  $a, b, c$ . Визначити об'єм піраміди.

Перше враження – маємо справу із стандартними стереометричними задачами. Ця зовнішня стандартність підштовхує до стандартних кроків. Однак, через кілька хвилин розв'язування першої задачі студенти дружно заявили, що слід уточнити її умову, бо не вказано вид многокутника основи. А як же знайти площу, якщо ми не знаємо вигляду фігури, площу якої шукаємо? І малюнок

виконати не можна, бо не знаємо вид многокутника в основі. Студенти впевнено настоювали, що умову слід скоректувати: неможливо знайти площу фігури не маючи про неї ніякої інформації. Задача спровокувала проблемну ситуацію: чи можливо знайти площу опуклого многокутника не знаючи його виду? Чи насправді в цій задачі відсутня будь-яка інформація про основу призми? Ця ситуація на занятті зручна для пояснення майбутнім учителям, як методично гарно скористатися проблемною ситуацією й красиво представити розв'язання цієї задачі, причому хвиля позитивних емоцій учнів може бути гарантована.

*За умовою задачі в призму вписана куля, тому основою призми є многокутник, в який можна вписати коло, радіус якого за умовою задачі дорівнює 4 см. Таким чином, площу многокутника основи можна шукати за формулою  $S = \frac{1}{2}Pr$ . Оскільки вписана в призму куля дотикається до обох основ призми, то  $H = 2r = 2 \cdot 4 = 8$ . За умовою задачі площа бічної поверхні призми дорівнює  $48 \text{ см}^2$ , тому  $P \cdot H = 48$ ,  $8P = 48$ ,  $P = 6$ , де  $P$  – периметр многокутника основи. Таким чином, основа даної призми має площу:  $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 (\text{см}^2)$ .*

*Появу в процесі розв'язування задачі формули  $S = \frac{1}{2}Pr$ , де  $P$  – периметр многокутника, в який можна вписати коло, а  $r$  – радіус цього кола, варто супроводжувати обґрунтуванням:  $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ , де  $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n$ ,  $S_2, \dots, S_n$  – площі трикутників, на які розбивається даний многокутник, якщо з'єднати центр вписаного в нього кола з усіма вершинами даного многокутника:*

$$S_1 = \frac{1}{2}a \cdot r; S_2 = \frac{1}{2}b \cdot r; S_3 = \frac{1}{2}c \cdot r;$$

$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c + \dots) = \frac{1}{2}r \cdot P$ , де  $S$  – площа даного многокутника,  $P$  – периметр,  $r$  – радіус вписаного в нього кола.

Наявність вказаної задачі в системі задач на уроці дозволить створити сприятливу атмосферу для усвідомлення учнями окремих важливих деталей

методики розв'язування геометричних задач. Перша задача допомагає зруйнувати стереотип: площа фігури? – формула площі залежно від виду фігури або розбиття фігури на інші фігури, площі яких шукаємо за формулами площ. Робота над першою задачею дає змогу викликати в учнів яскраві емоції, деяке здивування, стати певним прикладом збудження інтересу в процесі розв'язування стереометричної задачі.

Друга задача, вказаної нами трійки задач, цікава, по-перше, можливістю навчити учнів правильно вказувати й обґрунтовувати відстань від точки до площини, в нашому випадку від основи висоти правильної трикутної піраміди до її бічної грані. По-друге, крім стандартного підходу шукати об'єм даної піраміди за формулою  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H$ , який тут буде відносно громіздким, корисно розглянути з учнями інший спосіб: розглянути об'єм вказаної піраміди, як суму об'ємів трьох рівних пірамід, об'єм кожної з яких дорівнює  $V = \frac{1}{3} S d$ , де  $S$  – задана площа бічної грані,  $d$  – задана відстань від основи висоти правильної трикутної піраміди до її бічної грані,  $d$  в цьому випадку буде виступати висотою кожної із трьох пірамід, на які ми розбиваємо задану правильну трикутну піраміду. Отже, шуканий об'єм даної правильної трикутної піраміди дорівнює –  $Sd$ .

Третя задача вказаної добірки цікава тим, що крім стандартного, в даному випадку громіздкого способу знаходження об'єму, є чудовий спосіб, який полягає у здогадці покласти дану піраміду на одну із бічних граней. Тоді отримаємо піраміду в основі якої прямокутний трикутник, а висотою є бічне ребро, яке перпендикулярне до площини основи, тобто

$$V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc.$$

На формування певної скарбнички «задач-перлинок» налаштовуємо майбутніх учителів математики в процесі методичної підготовки. При цьому зазначаємо, що вчитель-майстер процес розв'язування будь-якої геометричної задачі може перетворити в захопливу для учнів пізнавальну картинку. Завдання творчого вчителя математики накопичувати скарбничку, особливих з

методичної точки зору, математичних задач, бачити за зовні звичайними геометричними задачами їхні справжні розвивальні можливості.

Наведемо ще приклади таких задач-перлинок:

- ✓ У трикутної піраміди площі двох граней дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ , їх спільне ребро -  $b$ , а двогранний кут між ними –  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- ✓ Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $m^2$ , бічне ребро утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- ✓ У пряму призму вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа її основи дорівнює  $8 \text{ см}^2$ .

Ефективність процесу навчання учнів геометрії в школі цілком залежить від методичної компетентності вчителя математики, від рівня його геометричної та методичної грамотності, від його особистісного ставлення, інтересу до геометрії, від його готовності і здатності створити умови для особистісного розвитку учнів у процесі навчання геометрії. Головні інструменти якісної методики навчання геометрії: хороша задача, красива картинка і логічно струнка, водночас «жива» мова.

**Анотація.** Обґрунтовано необхідність накопичення вчителями математики певної скарбнички «задач-перлинок» із стереометрії, наведено конкретні приклади.

**Ключові слова:** розв'язування стереометричної задачі; методична компетентність вчителя; позитивні емоції учнів.

**Abstract.** There was justified the necessity of mathematics teachers accumulation of a bank of "task-pearls" from stereometry and were given specific examples.

**Keywords:** solving of the stereometric problem; methodological competence of teachers; positive emotions of students.

*Михайленко Любов Федорівна*  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, кандидат педагогічних наук*  
*Михайленко Дмитро Володимирович*

## **ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ СТУДЕНТІВ ВИКОРИСТОВУВАТИ ПРИЙОМИ КОРЕКЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ**

**Постановка проблеми.** Одним із основних засобів навчання стереометрії є розв'язування задач. Стереометричні задачі мають свої специфічні особливості порівняно з планіметричними, чим і зумовлені труднощі при їх розв'язуванні і, відповідно, при навчанні їх розв'язувати. Перша і найголовніша з них часто пов'язана з виконанням рисунка до задачі. Рисунок до задачі — графічна модель геометричної конструкції, з якою пов'язана задача і яка розглядається для пошуку розв'язання задачі і його обґрунтування. Від якості цієї моделі значно залежить швидкість і якість розв'язання. Недостатньо наочна модель ускладнює пошук розв'язання, а іноді призводить до грубих помилок у розв'язанні. Формування вмінь виконувати правильний і якісний рисунок до задачі має постійно бути у полі зору вчителя.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження педагогів, психологів та методистів [1, 2] дозволяють виділити основні причини несформованості в учнів загальних умінь розв'язувати задачі:

1) несформованість уміння аналізувати задачу, виділяти умови і вимоги, проникати в її сутність, орієнтуватися у ситуаціях, сформульованих в умові задачі, у зв'язках між даними і шуканими, розуміти задачу;

2) відсутність аналізу власної діяльності учнем після розв'язання задачі, необхідного для того, щоб виділити суттєве в структурі розв'язання, виділити інформацію, важливу для розв'язування інших задач;

3) недостатнє управління розумовою діяльністю учнів з боку вчителя у процесі розв'язування задач.

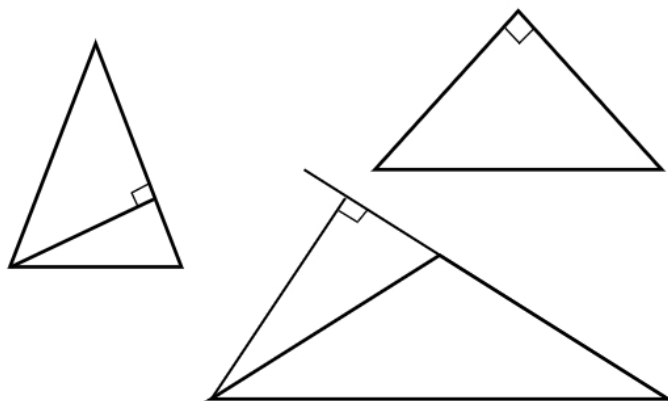


**Мета статті** виявлення способів і прийомів корекції знань і вмінь студентів щодо підвищення ефективності формування знань та умінь старшокласників із стереометрії.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Вміння підбирати систему задач на урок, або до всієї теми допомагає студенту глибше зрозуміти процес пошуку розв'язування задачі, дослідити можливі випадки та способи розв'язання. Також така робота залучає студентів до творчого процесу роботи над навчальним матеріалом, привчає їх самостійно виділяти проблеми, моделювати шкільні навчальні ситуації. Досить часто студенти-практиканти та молоді вчителі не готові до керування діяльністю учнів щодо роботи над задачею. Вони «підштовхують» учнів до свого способу розв'язання, подавляють ініціативу, відмовляються розглядати задачі із зірочками тощо. Тому на заняттях з методики навчання стереометрії значна увага приділяється методиці роботи із системою задач. Проте інколи вдало підібрана задача може замінити цілу систему задач на урок.

Позначення кутів на рисунку до стереометричної задачі, для значної кількості учнів є складним завданням. Тому вчитель має приділити значну увагу формуванню такого вміння. На прикладі конкретної задачі розглянемо особливості зображень та типові помилки учнів при їх виконанні.

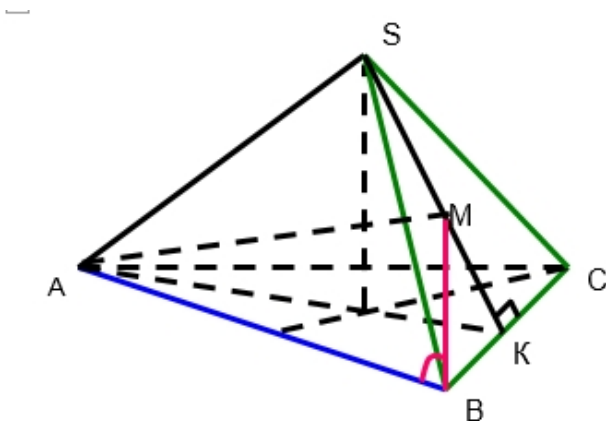
Задача. У правильній трикутній піраміді  $SABC$  побудувати кут між стороною  $AB$  основи і площиною суміжної бічної грані.



В процесі аналізу умови задачі, варто з'ясувати вид кута у просторі та пригадати означення, або алгоритм зображення; пояснити що для розв'язування задачі необхідно розглянути три випадки, коли кут при вершині бічної грані піраміди гострий, прямий, тупий (рис.1).

У випадку коли кут при вершині бічної грані піраміди гострий варто розглянути два способи його побудови.

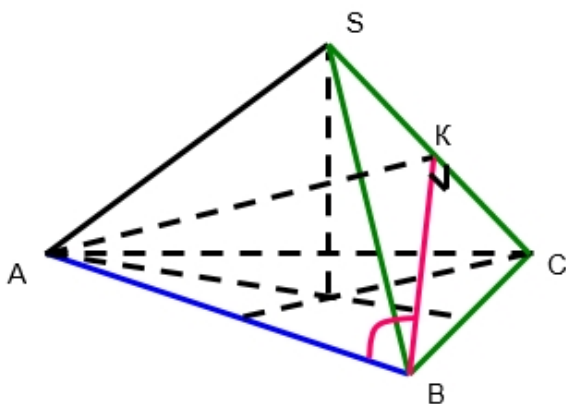
Перший спосіб за означенням кута між прямою і площиною. Щоб



Випадок 1( $\alpha < 90^\circ$ )

I спосіб

(AKS)  $\perp$  (BSC) за ознакою перпендикулярності двох площин; проводимо  $AM \perp SK$ , оскільки  $AM \subset (AKS)$ , то  $AM \perp (BSC)$ . Отже, AM шуканий перпендикуляр, BM – проекція AB на (BSC).



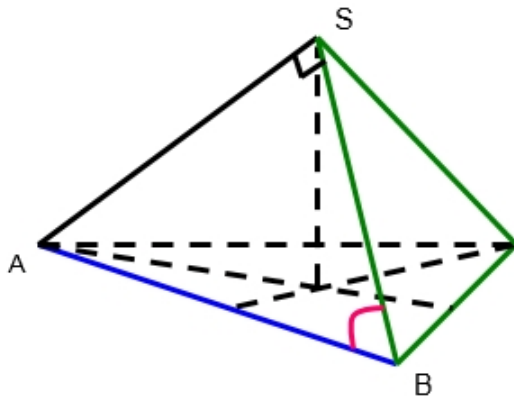
Випадок 1( $\alpha < 90^\circ$ )

II спосіб

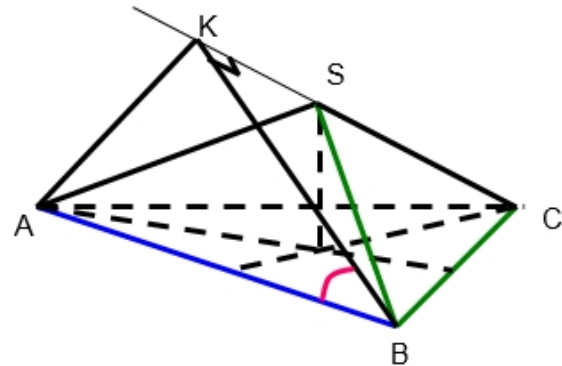
показати кут між прямою і її проекцією на цю площину, необхідно опустити перпендикуляр з точки прямої до площини (AM). Спробуємо провести площину перпендикулярну до даної площини. Вибудовуємо міркування таким чином:  $AK \perp BC$  і  $SK \perp BC$ ,  $BC \perp (BSC)$  за ознакою перпендикулярності прямої і площини;

Другий спосіб. Через AB проведемо площину перпендикулярну до (BSC). Вибудовуємо міркування таким чином: проведемо  $BK \perp SC$ , тоді з рівності трикутників AKC і BKC (за двома сторонами і кутом між ними)  $AK \perp SC$ , то  $SC \perp (AKB)$  за ознакою перпендикулярності прямої і площини; (AKB)  $\perp$  (BSC) за ознакою

перпендикулярності двох площин. Отже, АВ проектується на площину (BSC) в ВК, шуканий кут АВК. Як бачимо, другий спосіб значно простіший і у двох інших випадках побудови зручніший.



Випадок 2 ( $\alpha=90^\circ$ )



Випадок 3 ( $\alpha>90^\circ$ )

Щодо побудови кута у другому і третьому випадках студенти (учні) самостійно коментують обґрунтування.

В результаті розв'язання такої задачі студенти (учні) мають можливість побачити різні способи побудови кута між прямою і площиною, розглянути часткові випадки побудови кутів, зокрема, ті випадки, коли маємо справу з точками і прямими, що не лежать на поверхні многогранника.

**Висновки.** Ефективному формуванню знань та умінь старшокласників із стереометрії сприяє систематична діяльність вчителя щодо навчання учнів роботи із задачею, вміння відбирати задачі та послідовність, в якій пропонують їх розв'язувати. Також важливим засобом навчання стереометрії є сучасні засоби наочності, зокрема, комп'ютерні технології.

Вважаємо, забезпечення якісної професійної підготовки вчителя математики також залежить від урахування особливостей контингенту студентів та диференціації навчання. Забезпечення умов ефективності навчання передбачає розробку й теоретичне обґрунтування цілісної системи методичної підготовки вчителя математики з урахуванням сучасних технологій навчально-пізнавальної діяльності.

## Література

1. Матяш О. І. Формування знань старшокласників про різні методи розв'язування задач стереометрії / О. І. Матяш, В. А. Ясінський, А. В. Прус // Математика в школі. – 2010. – № 10. – С. 8–17.
2. Матяш О. І. Сучасні вітчизняні наукові дослідження шляхів удосконалення процесу формування знань та умінь учнів з геометрії / О. І. Матяш // Наукові записки. Серія: педагогіка та психологія. – Вип. 40. – Вінниця, 2013. – С. 63–68.
3. Михайленко Л.Ф. Актуальні проблеми підготовки майбутнього вчителя математики до викладання стереометрії в старшій школі// Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Збірник наукових праць Випуск 18. /Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. – Київ – Вінниця: ДОВ Вінниця, 2008.- С.413-417.

**Анотація.** У статті описано прийоми корекції знань і вмінь студентів щодо підвищення ефективності формування знань та умінь старшокласників із стереометрії.

**Ключові слова.** Корекція геометричних знань

**Annotations.** This article describes methods of correcting students' knowledge and skills to improve the efficiency of building knowledge and skills of high school geometry.

**Keywords.** Correction of geometrical knowledge

*Наконежна Людмила Йосипівна*  
*Вінницький державний педагогічний університет*  
*імені Михайла Коцюбинського, кандидат педагогічних наук*

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ СТУДЕНТІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ КООРДИНАТНИМ МЕТОДОМ**

Задачі є незамінним та ефективним засобом засвоєння студентами понять, методів та математичних теорій в цілому, засобом формування знань та умінь та засобом практичного застосування математики. Матяш О.І. переконана, що формування та розвиток знань та умінь учнів з математики значно залежить від майстерності вчителя відібрати, створити та оптимально використати в процесі навчання геометрії цілісну систему задач, в якій чітко вбачаються вчителем і навчальні, і розвивальні, і виховні, і прогностично-діагностичні функції.[2]

Ю.М. Колягін, П.М. Ерднієв, Г.В. Дорофєєв, І.Г. Шаригін та інші дослідники відносять системи задач до основних засобів удосконалення процесу навчання. Вони відзначають, що правильно сконструйована система задач забезпечує повноту уявлень про об'єкт, що вивчається, полегшує узагальнення, сприяє гнучкості, глибині та усвідомленості знань.

Впорядкована система задач може слугувати засобом підготовки до усвідомлення нового матеріалу, засобом удосконалення навичок розв'язування задач, засобом узагальнення та систематизації вивченого матеріалу, засобом контролю та корекції знань та умінь. Зрозуміло, що в кожному випадку мова йде про цілеспрямовану систему задач. [3]

**Метою** даної статті є конструювання системи задач, спрямованої на розвиток вмінь студентів розв'язувати задачі шкільного курсу математики методом координат.

Дослідження вчених показують, що вміння учнів, студентів розв'язувати задачі не знаходиться у прямій залежності від кількості розв'язаних задач, а в значній мірі залежить від досконалості безпосередньо системи задач.

Організація навчання через системи задач дозволяє повторити, узагальнити, поглибити та систематизувати раніше вивчений матеріал,

побачити взаємозв'язки окремих тем та озброїти студентів різними методами розв'язування задач. Метод координат є універсальний метод розв'язування планіметричних задач. Водночас зазвичай ним послуговуються при розв'язуванні задач з теми: «Декартові координати на площині». І лише досвідчені вчителі використовують на уроках розв'язування задач координатним методом. Для формування вмінь та готовності майбутніх учителів математики розв'язувати задачі координатним методом пропонуємо наступну добірку задач:

1. Дано прямокутну трапецію з основами  $a$  і  $b$ . Знайти відстань між серединами її діагоналей.
2. Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, рівна 160 см, а основа трикутника - 80 см. Знайти дві інші медіани цього трикутника.
3. У прямокутному рівнобедреному трикутнику проведені медіани гострих кутів. Обчислити косинус кута між ними.
4. В колі з центром  $O$  проведено два взаємно перпендикулярних діаметри  $AB$  і  $CD$ . На радіусі  $OB$  взято точку так, що  $OK = \frac{1}{3}OB$ , а на радіусі  $OD$  точку  $M$  таким чином, що  $OM = \frac{1}{2}OD$ . Довести, що точка перетину прямих  $CK$  і  $AM$  лежить на даному колі.
5. Довести, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він є прямокутником.
6. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.
7. Довести, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданий до подвоєного добутку основ.
8. Знайдіть геометричне місце точок, для кожної з яких відстані до двох точок  $A$  і  $B$  рівні.
9. Знайдіть геометричне місце точок, різниця квадратів відстаней яких від двох даних точок  $A$  і  $B$  є стала величина  $m^2$
10. Дано рівносторонній трикутник  $ABC$ . Знайдіть геометричне місце

точок  $M$ , для яких  $MC^2 = MA^2 + MB^2$

11. Дано дві точки  $A$  і  $B$ . Знайдіть геометричне місце точок, для кожної з яких відстань від точки  $A$  у два рази більша відстані від точки  $B$
12. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.
13. Доведіть, що середини сторін рівнобедреної трапеції є вершинами ромба
14. У трикутнику  $ABC$   $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Відрізок  $AA_1$  - медіана трикутника. Доведіть, що  $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .
15. Навколо рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює  $a$ , описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника дорівнює  $2a^2$
16. У квадрат вписано коло, радіус якого  $R$ . Доведіть, що сума квадратів відстаней довільної точки кола до сторін квадрата стала і дорівнює  $6R^2$
17. Дано прямокутник. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки до його вершин у два рази більша суми квадратів від цієї точки до сторін прямокутника.

Послідовне розв'язування кожної задачі із запропонованої системи забезпечує розвиток умов для сприйняття, осмислення і застосування знань про координатний метод розв'язування задач. Система задач включає задачі на обчислення, на доведення та на дослідження. Реалізація рівневої диференціації системи вправ досягається шляхом включення до цієї системи задач різного рівня складності, що дозволяє створити оптимальні умови для розвитку всіх студентів.

**Висновки.** Вважаємо, що результати процесу підготовки фахівця значно залежать від обґрунтованого планування та чіткої організації навчально-виховного процесу. При цьому суттєву роль відіграє система задач – як один із провідних засобів розвитку фактичних знань, умінь та навичок, прийомів розумової діяльності, способів навчально-пізнавальної діяльності,

математичного стилю мислення, творчості та пізнавальної самостійності студентів.

### Література

1. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас. За редакцією З. І. Слєпкань. – Харків, „Гімназія”, 2002, - 176 с.

2. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. - 2010. - Вип. 26. - С. 39-43. - Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn\\_2010\\_26\\_10](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn_2010_26_10).

3. Наконечна Л.Й. Система задач як засіб розвитку пізнавальної самостійності майбутніх учителів математики / Наконечна Л.Й. // Науковий вісник Південноукраїнського державного педагогічного університету ім. К.Д. Ушинського. – № 6-7. – Одеса, 2008. – С. 184-188.

4. Полонський В.Б. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії / Полонський В.Б.; Рабинович Ю.М.; Якір М.С. К.: Магістр-S. – 1998 р. - 256 с.

**Анотація.** У статті обґрунтовано важливість конструювання методично виважених систем задач. Запропоновано систему задач з планіметрії для формування вмінь майбутніх учителів математики розв'язувати задачі координатним методом.

**Ключові слова:** система задач, розв'язування планіметричних задач координатним методом, майбутні учителі математики.

**Abstract.** The article substantiates the importance of methodically constructing a balanced system of objectives. The tasks of plane geometry for the formation of skills of future teachers of mathematics to solve the problem of coordinate method.

**Key words:** system tasks, solving the planimetric tasks with coordinate method, future teachers of mathematics.



***Панченко Лариса Леонтіївна***

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, доцент  
кафедри вищої математики Фізико-математичного інституту*

***Шаповалова Наталія Валентинівна***

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, доцент  
кафедри вищої математики Фізико-математичного інституту*

## **СИСТЕМИ ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Основним засобом навчання студентів математичного моделювання є задачі. Вдало підібрана система задач забезпечить формування навичок та вмінь математичного моделювання на досить високому рівні..

Ця система задач носить інтегрований характер, вона складається з підсистем задач, створених у рамках кожної математичної дисципліни. Вказані підсистеми задач мають спільні риси:

1. Всі вони містять прикладні задачі. Прикладні задачі – це задачі, які поставлені зовні математики і розв’язуються математичними методами і засобами.

Прикладні задачі, як і будь-які інші задачі, у процесі навчання математики виконують різні дидактичні цілі, основними з яких є навчаюча (формування системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах засвоєння); виховна (формування наукового світогляду, пізнавального інтересу і самостійності, навичок навчальної праці, моральних якостей особистості); розвиваюча (розвиток логічного мислення, оволодіння загальними та специфічними розумовими діями та ефективними прийомами розумової діяльності) [2, с. 184]. Розв’язання будь-якої задачі прикладного характеру зводиться до побудови та дослідження відповідної математичної моделі.

2. Розв’язування задач здійснюється за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання.

3. За своїми дидактичними цілями задачі поділяються на тренувальні (для вироблення стійких навичок і вмінь) і розвиваючі (для розвитку, зокрема, і

творчого мислення). Тренувальні задачі – задачі досить простого змісту, такі, що текст задачі містить підказку у виборі математичної моделі. Саме тренувальні задачі повинні бути першими, що забезпечать поетапне оволодіння евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Зі студентами слід відпрацювати кожний етап схеми окремо.

Система прикладних задач з різних математичних дисциплін займає центральне місце як підсистема у системі задач, що є засобом формування вмінь математичного моделювання у студентів – майбутніх учителів математики. Такі задачі можуть бути розв’язані і в шкільних курсах алгебри, геометрії та алгебри і початків аналізу. Прикладні задачі широко використовуються для мотивації та активізації навчальної діяльності студентів.

У процесі навчання математичного моделювання заслуговують на увагу творчі завдання на складання розвиваючих текстових задач з різним змістом за даною математичною моделлю, які свідчитимуть про те, що математичні методи дослідження носять універсальний характер і застосовуються для вивчення різних за своєю природою процесів.

Формування вмінь математичного моделювання через систему прикладних задач реалізується в межах кожної навчальної дисципліни систематично, неперервно, в межах кількох математичних дисциплін – паралельно і обов’язково за однією і тією ж евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Навчання математичного моделювання сприяє міжпредметному узагальненню набутих знань і вмінь.

При розв’язання технічних, економічних, суспільних, біологічних, фізичних задач достатнього та високого рівня складності застосовується розширена евристична схема діяльності математичного моделювання з широким використанням інформатичних технологій. Навчати студентів педагогічних університетів математичного моделювання за цією схемою доцільно і на спецкурсах.

Окрім прикладних задач, вміння математичного моделювання в педагогічному університеті слід формувати і в процесі розв’язування задач на

створення аксіоматичної теорії та її аналізу, задач з неевклідових геометрій, наприклад, проєктивної геометрії, гіперболічної геометрії, які розв'язуються лише на математичних моделях проєктивної прямої чи проєктивної площини, площини Лобачевського.

У процесі розв'язування таких задач формуються наступні вміння:

1. Математичного моделювання, а саме:

- вміти інтерпретувати основні поняття та відношення проєктивної геометрії в термінах евклідової геометрії;
- вміти доцільно вибирати з кількох моделей найбільш зручну для розв'язання тієї чи іншої проблеми (доведення теореми, розв'язання задачі);
- вміти аналізувати одержаний результат на моделі та представляти його в образах проєктивної геометрії;
- розуміти евклідову природу проєктивних координат.

2. Проєктивної геометрії:

- знаходити зв'язок між різними системами проєктивних координат у вигляді формул;
- знаходити однорідні координати точок, коли задані її неоднорідні координати.

Таким чином, математичні моделі абстрактної теорії проєктивної геометрії допомагають правильно та наочно зрозуміти теорію проєктивної геометрії, підкреслюючи зв'язок між евклідовою та проєктивною геометрією через математичне моделювання.

При вивченні як проєктивної геометрії, так і інших неевклідових геометрій, математичне моделювання є тим ключем до розуміння суті цих теорій, що забезпечує у студентів міцність знань та позбавляє їх від труднощів, пов'язаних з високим рівнем абстрактності.

Важливе місце в системі задач займають задачі, математичні моделі яких забезпечують розуміння аксіоматичної побудови геометричної теорії. При

побудові та аналізі таких математичних моделей формуються наступні вміння математичного моделювання:

- вміти створювати моделі аксіоматичних теорій: інтерпретувати основні (неозначувані) поняття, положення та відношення систем аксіом в термінах конкретних математичних теорій (знаходити конкретні множини і відношення на них, які мають задані властивості);
- вміти обґрунтовувати еквівалентність тверджень, зокрема, аксіом;
- вміти перевіряти несуперечливість, незалежність, повноту, категоричність системи аксіом.

Перераховані вміння формуються в основному в процесі вивчення курсу «Основи геометрії». Вивчаючи аксіоматичний метод обґрунтування сучасної геометричної теорії, студенти знайомляться з різними системами аксіом та їх математичними моделями [1, с. 44].

### Література

1. *Панченко Л. Л.* Математичне моделювання. / Л. Панченко, Н. В. Шаповалова // Навчально-методичний посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 153 с.

2. *Шаповалова Н. В.* Значення математичного моделювання для реалізації практичної і прикладної спрямованості навчання математики / Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко // Економічний розвиток: теорія, методологія, управління [матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції]. – Будапешт-Прага-Київ, – К.: НДІЕР. – 2015. – С. 183-194.

**Анотація.** В доповіді розкрито основні підходи та сформульовано методичні вимоги до створення різних систем задач, які мають широкий спектр використання в навчальному процесі вищих педагогічних навчальних закладів і забезпечують належний рівень формування вмінь математичного моделювання відповідно до вимог підготовки сучасного вчителя математики.

**Ключові слова:** математичне моделювання, математична модель, задача, прикладна задача, навчання, навчальний процес, педагогічна освіта.

**Abstract.** The paper exposes basic approaches and formulates methodic requirements for selecting various systems of tasks that are broadly applied in different courses in pedagogical universities and facilitate acquiring by students of sufficient level of skills in mathematical modeling in accordance with necessary competences of mathematics teachers.

**Keywords:** mathematical modeling, mathematical model, task, applied task, studying, studying process, pedagogical education.

## **СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСТАНІ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ПРОСТОРОВОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ**

Практика навчання постійно виявляє слабкий розвиток просторового мислення учнів, починаючи з початкової школи і закінчуючи ВНЗ. У процесі розвитку просторового мислення учнів надзвичайно важливим є: формування умінь уявляти різні предмети, фіксувати їх положення в просторі, уявляти різноманітні їх обертання, вміння бачити і зображувати малюнки. Базою для розвитку просторового мислення є просторова уява, яка формується під час вивчення стереометрії, а саме у процесі розв'язування стереометричних задач.

Метою даної статті є запропонувати добірку задач, яка сприятиме розвитку просторового мислення учнів у процесі вивчення відстаней від точок до прямих.

Розглянемо вибірку задач на засвоєння теми «Знаходження відстані між точкою і прямою в просторі», яка на нашу думку, має значні можливості для формування просторового мислення.

*Задача 1. У прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AB = AA_1 = a$ ,  $AD = 3a$ . На ребрі  $A_1 B_1$  взята точка  $P$  – середина цього ребра, а на ребрі  $AD$ , точка –  $Q$  така, що  $AQ:AD=2:3$ . З вершини  $D_1$  опустимо перпендикуляр  $D_1 H$  на пряму  $PQ$  і знайдемо довжину  $D_1 H$ . ( В.  $\frac{a\sqrt{798}}{21}$ .)*  
[2, с.204]

*Задача 2. У правильній призмі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на ребрах  $CC_1$  і  $AD$  взяті відповідно точки  $P$  і  $Q$  – середини цих ребер. Опустивши перпендикуляр з*

вершини  $D_1$  на наступну пряму  $QP$ . Вважаючи  $AB = a$ ,  $AA_1 = 3a$ , знайдемо довжину цього перпендикуляра. (В.  $\frac{a\sqrt{157}}{2\sqrt{14}}$ .)

Задача 3. В прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  зі співвідношенням ребер  $AB:AD:AA_1 = 1:2:1$  на ребрі  $CC_1$  взята точка  $P$  – середина цього ребра. Вважаючи  $AB = a$  знайти відстань від точки  $D$  до лінії перетину площини  $A_1 DP$  з площиною  $A_1 B_1 C_1$ . (В.  $a\sqrt{3}$ .)

Задача 4. На ребрах  $AD$  і  $A_1 B_1$  правильної призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взяті відповідно точки  $P$  і  $M$  – середини цих ребер, а на ребрі  $CC_1$  взята точка  $Q$ . Співвідношення ребер  $AB:AA_1 = 1:2$ . Опустити перпендикуляр з точки  $M$  на пряму  $QP$ , коли відношення  $CQ:CC_1 = 1:2$ . Вважаючи  $AB = a$  знайти відстань від точки  $M$  до прямої  $QP$ . (В.  $\frac{3a}{2}$ .)

Наведемо приклад методики розв'язування однієї із задач, № 1. Розв'язання. Геометричний метод. Для побудови перпендикуляра  $D_1 H$  до прямої  $PQ$  потрібно розглядати таку площину, яка містить і перпендикуляр і пряму одночасно. Такою площиною є площина трикутника  $D_1 PQ$ . Обчислимо сторони трикутника  $D_1 PQ$ . З прямокутного трикутника  $D_1 DQ$ ,  $D_1 Q = a\sqrt{2}$ . З прямокутного трикутника  $D_1 A_1 P$ ,  $D_1 P = \sqrt{D_1 A_1^2 + A_1 P^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2}$ .

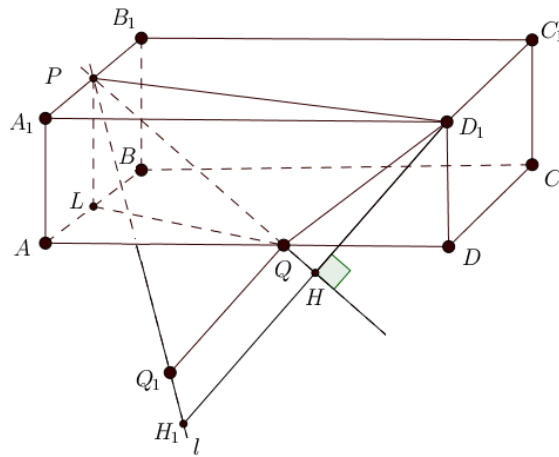


Рис. 1

У площині  $ABB_1$  через точку  $P$  проведемо пряму  $PL \perp AA_1$  до перетину з прямою  $AB$ , отримаємо точку  $L$  і з'єднаємо її з точкою  $Q$ . З прямокутного трикутника  $PQL$ .

$$PQ = \sqrt{PL^2 + QL^2} = \sqrt{PL^2 + AQ^2 + AL^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

З'ясуємо якого виду є трикутник  $D_1PQ$ , адже якщо  $\angle Q$  гострий то основа перпендикуляра  $D_1H$  лежатиме на стороні трикутника, а якщо  $\angle Q$  тупий то основа перпендикуляра  $D_1H$  лежатиме на продовженні сторони  $PQ$  трикутника  $D_1PQ$ .

Вид  $\angle PQD_1$  трикутника  $D_1PQ$  можна дізнатися використавши теорему косинусів. Якщо сума квадратів двох сторін трикутника більша за квадрат сторони, яка лежить проти досліджуваного кута трикутника то кут тупий.

$$\text{Отже } PQ^2 + D_1Q^2 = \frac{21a^2}{4} + 2a^2 = \frac{29a^2}{4}, \text{ і } D_1P^2 = \frac{37a^2}{4}, \text{ то } D_1P^2 < PQ^2 + D_1Q^2$$

тобто кут  $D_1QP$  – тупий і тому якщо точка  $H$  – основа шуканого перпендикуляра лежатиме на продовженні сторони  $PQ$ , то  $PH = PQ + QH$ .

Виразивши  $D_1H^2$  двома способами, отримаємо  $D_1Q^2 - QH^2 = D_1P^2 - PH^2$ ,

$$\text{або } D_1Q^2 - QH^2 = D_1P^2 - (PQ + QH)^2, \text{ тобто, } 2a^2 - QH^2 = \frac{37a^2}{4} - \frac{a\sqrt{21}}{2} + QH^2$$

$$\text{звідки } QH = \frac{2a}{\sqrt{21}}.$$

$$\text{Тоді } PQ:QH = \frac{a\sqrt{21}}{2} : \frac{2a}{\sqrt{21}} = 21:4.$$

Побудуємо точку  $H$ . Відкладемо у площині  $D_1PQ$  кут  $Q_1PQ$  рівний куту  $D_1PQ$ . Розхилом циркуля  $PD_1$  відкладемо  $H_1$  на промені  $PQ_1$ . З'єднавши  $D_1H_1$  отримаємо точку  $H$  на промені  $PQ$ .

Далі з прямокутного трикутника  $D_1QH$  знаходимо  $D_1H$ :

$$D_1H = \sqrt{D_1Q^2 - QH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{21}} = \frac{a\sqrt{798}}{21}.$$

*Координатно-векторний метод.* Знайдемо сторони трикутника  $D_1PQ$ .

Введемо в просторі прямокутну систему координат  $Bxyz$ , як показано на рисунку (Рис. 2) скориставшись тим, що прямі  $BC$ ,  $BA$  і  $BB_1$  попарно перпендикулярні.

Запишемо координати точок:  $B(0;0;0)$ ,  $C(3a;0;0)$ ,  $A(0;a;0)$ ,  $B(0;0;a)$ ,

далі  $D_1(3a;a;a)$ ,  $P\left(0;\frac{a}{2};a\right)$ ,  $Q(2a;a;0)$ .

$$\text{Тоді } D_1Q = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$D_1P = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2}$$

$$PQ = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Підрахуємо тепер  $\cos \angle D_1PQ$ . За теоремою косинусів

$$D_1Q^2 = D_1P^2 + PQ^2 - 2D_1P \cdot PQ \cos \angle D_1PQ, \text{ тобто}$$



$$2a^2 = \frac{37a^2}{4} + \frac{21a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{37}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{2} \cos \angle D_1PQ, \text{ звідси маємо, що}$$

$$\cos \angle D_1PQ = \frac{25}{\sqrt{37 \cdot 21}}$$

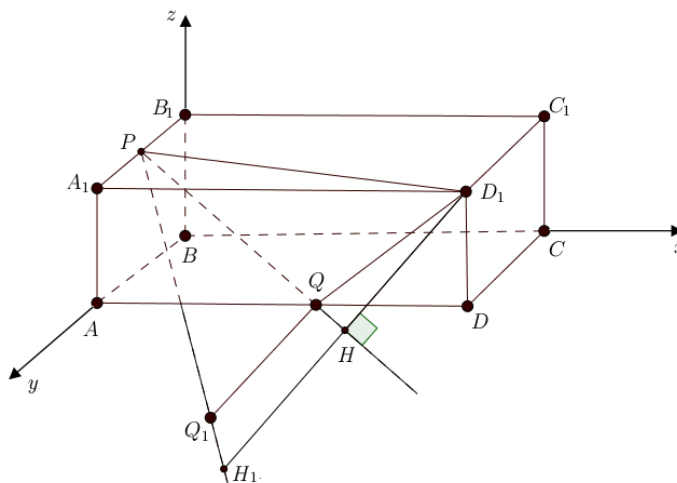


Рис. 2

$$\text{Тоді } \sin \angle D_1PQ = \sqrt{1 - \frac{625}{37 \cdot 21}} = 2\sqrt{\frac{38}{37 \cdot 21}}, \text{ і якщо } D_1H \perp PQ,$$

$$\text{то } D_1H = D_1P \cdot \sin \angle D_1PQ = \frac{a\sqrt{37}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{38}{37 \cdot 21}} = \frac{a\sqrt{798}}{21}.$$

Тепер можна виконати побудову перпендикуляра  $D_1H$  до прямої  $PQ$ , підрахувавши відношення  $PQ:PH$ .

$$\text{Знаходимо: } PH = D_1P \cos \angle D_1PQ = \frac{a\sqrt{37}}{2} \cdot \frac{25}{\sqrt{37 \cdot 21}} = \frac{25a}{2\sqrt{21}},$$

$$PQ:PH = \frac{a\sqrt{21}}{2} : \frac{25a}{2\sqrt{21}} = 21:25.$$

За допомогою допоміжного променя  $l$ , на якому відкладаємо відрізки  $PQ_1$  і  $PH_1$  – такі, що  $PQ_1:PH_1 = 21:25$ , будуємо точку  $H$  і потім шуканий перпендикуляр  $D_1H$ .

Дана добірка буде актуальною під час вивчення учнями 10 класу теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», а також під час вивчення учнями 11 класу теми «Координати, геометричні перетворення та вектори у

просторі». Використання подібних добірок задач на уроках геометрії допоможе у розвитку просторового мислення учнів. Відмінною особливістю розвиненого просторового мислення є той факт, що його одиницею виміру служить образ, який укладає у собі специфічні характеристики простору. Наприклад: розмір, форма, місцезнаходження в просторі, тому чим частіше учні зустрічатимуться із задачами на просторове зображення, тим краще вони орієнтуватимуться в майбутньому у заданому матеріалі. Розв'язування ж задач різними способами, допоможе учням усвідомити можливість різноманітних підходів до розв'язування геометричних задач. Також варто відмітити, що стереометричні задачі на знаходження відстані є досить складними для учнів і здебільшого учні розв'язують їх на основі координатного або координатно-векторного методів. Геометричний метод розв'язування таких задач сприятиме кращому формуванню якісного просторового мислення, адже вміння побачити перпендикуляр, який дорівнюватиме шуканій відстані, є досить актуальним з точки зору просторового бачення.

### **Література:**

1. Вітюк О. В. Розвиток мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання інформатики» / Вітюк Олександр Володимирович – Київ, 2001. – 20 с.
2. Гусев В. А. Практикум по элементарной математике. Геометрия / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1992. – 352 с.
3. Осадчий В. В. Інформаційно-комунікаційні технології у процесі розвитку візуального мислення майбутніх учителів / В. В. Осадчий, К. П. Осадча. // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету. Сер : Педагогіка. – 2014. – №1. – С. 128–133.
4. Юсупова М. Ф. Застосування нових інформаційних технологій в графічній підготовці студентів вищих навчальних закладів : автореф. дис.

на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання» / Юсупова Маргарита Федорівна – Київ, 2002. – 20 с.

**Анотація.** У статті представлено добірку задач зорієнтовану на розвиток просторового мислення учнів під час вивчення відстаней між точкою у просторі. Наведено приклад методики розв'язування однієї із задач двома способами.

**Ключові слова:** просторове мислення, просторова уява, відстань між точкою і прямою в просторі.

**Abstract.** The selection of tasks focused on development of spatial thinking of pupils when studying distances between a point in space is presented in article.

**Key words:** spatial thinking, spatial imagination, distance between a point and a straight line in space.

## **СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ**

Одним з ефективних засобів формування в учнів просторової уяви і просторового уявлення є розв'язання задач на побудову перерізів многогранників і тіл обертання, обґрунтування форм цих перерізів. Така навчальна робота є, так би мовити, пропедевтикою, вступом до розв'язування стереометричних задач із застосуванням тригонометрії. Побудова наочних зображень на площині стереометричних форм та ще й з перерізом, створює учням певні труднощі, які є причиною небажаних помилок при розв'язанні задач із застосуванням стереометрії.

Матяш О.І. зазначає, що «саме в процесі методично грамотного розв'язування вдало відібраних задач створюються оптимальні умови для осмислення, сприйняття і застосування навчального матеріалу.» [2]

На думку Наконечної Л. система задач є одним із засобів організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів. [4]

Проблемі створення систем задач як засобів підвищення ефективності навчання приділяли увагу різні математики та методисти. Це, зокрема, Г. Бевз, О. Вашуленко, О. Матяш, Н. Сяська, С. Саврасова, Н. Трегуб, Л. Наконечна, Г. Саранцев, В. Якиляшек та ін.

**Мета даної статті** створити добірку задач на побудову перерізів многогранників.

**Виклад основного матеріалу.** Малюнкам просторових фігур належить першорядна роль у розвитку просторової уяви, просторового мислення, такого необхідного в умовах науково-технічного прогресу.

Важливий момент у навчанні розв'язування задач на побудову перерізів складає виділення в умові задач елементів, які задають січну площину. Якщо умовою задачі січна площина задана точкою і прямою або прямими, які

перетинаються, або паралельними прямими, то, обираючи на них три точки, зводимо розв'язання задачі до побудови перерізу площиною, яка задана трьома точками.

Побудова перерізів многогранників здійснюється *методом зовнішніх або внутрішніх слідів* і базується на використанні понять *слідів прямої в площині* та *слід січної площини в даній площині*, правил паралельного і центрального проектування, тощо.

При вивченні теми "*Перерізи многогранників площиною*" особливу увагу потрібно приділити вмінню будувати точку перетину (слід) прямої з площиною та пряму (слід) перетину двох площин, одна з яких задана трьома точками. Тому доцільно розпочати викладання теми з вивчення базових задач.

Задача 1. Побудувати слід перетину прямої  $AB$  з площиною  $\alpha$ , якщо пряма задана точками  $A$  і  $B$ .

Задача 2. Побудувати слід перетину площини  $(ABC)$ , що задана точками  $A, B$ , і  $C$  з площиною  $\alpha$ .

Задача 3. Побудувати лінію перетину (слід) площини  $\beta$  з основною площиною  $\alpha$ , якщо площина  $\beta$  задана точками  $A, B, C$ , які не належать площині  $\alpha$ .  $A_1, B_1, C_1$  - проекції точок  $A, B, C$  на площину  $\alpha$ .

Далі варто розглянути задачі на побудову перерізу многогранника площиною, що задана трьома точками.

Задача 4. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через три точки на ребрах, що виходять з даної вершини.

Задача 5. Побудувати переріз призми (трикутної, чотирикутної, п'ятикутної, шестикутної) площиною, що проходить через точки  $M, N$  та  $K$  на бічних ребрах.

Задача 6. Побудувати переріз призми площиною, що задана точками на трьох різних гранях.

Задача 7. Побудувати переріз призми площиною, що задана двома точками на бічних гранях і точкою на верхній грані.

Задача 8. Побудувати переріз призми площиною, що задана точками на основах призми та точкою на бічній грані.

Задача 9. Побудувати переріз піраміди (трикутної, чотирикутної, п'ятикутної, шестикутної) площиною, що проходить через три точки на її бічних ребрах.

Задача 10. Побудувати переріз піраміди площиною, що задана трьома точками на бічних гранях.

Задача 11. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через дві точки, що лежать на сторонах основи та точку, взятую на висоті піраміди.

Система задач на побудову перерізів многогранників має містити також задачі на побудову перерізу многогранника площиною, що задана прямою та точкою поза нею, або двома паралельними прямими.

Задання січної площини прямою і точкою поза нею, двома прямими, що перетинаються, або двома паралельними прямими рівносильне визначенню цієї площини трьома точками, що не лежать на одній прямій. При цьому, у ряді випадків побудова перерізу полегшується, тому, що ми одразу отримуємо 2-4 вершини многокутника – перерізу.

Задача 12. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точку  $M$  на бічному ребрі і має слід на площині основи пряму  $p$ , яка не перетинає основу призми.

Задача 13. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точку  $M$  на бічній грані і має слід - пряму  $p$  з площиною основи, причому  $p$  не перетинає сторін основи призми.

Задача 14. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точку  $M$  на верхній основі та має слід з нижньою основою – пряму  $p$ , яка не перетинає основи призми.

Задача 15. Побудувати переріз куба площиною, що проходить через середини двох сусідніх ребер основи та середину бічного ребра, яке не перетинає прями, що містять ці ребра основи.

Задача 16. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через точку  $M$  на бічній грані і має слід з площиною основи – пряму  $p$  у площині основи, яка не перетинає сторони основи.

Задача 17. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через точку  $M$  на бічному ребрі та має слід з площиною основи – пряму  $p$ , що не перетинає сторін основи.

Задача 18. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через її висоту, і одну з вершин основи.

Система задач на побудову перерізів многогранників має містити також задачі на побудову перерізу многогранника площиною, що проходить через задану на грані точку під заданим кутом  $\alpha$  до площини основи, або через задану сторону основи під кутом  $\alpha$  до площини основи.

При побудові таких перерізів многогранників потрібно враховувати метричну визначеність кута. Якщо ж кут метрично не визначений, то побудову обґрунтовуємо, спираючись на означення кута між площинами.

Задача 19. У трикутній піраміді побудувати переріз площиною, яка проходить через її висоту паралельно одній з сторін основи.

Задача 20. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через сторону основи перпендикулярно до протилежного ребра.

Задача 21. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через центр основи паралельно бічній грані.

Задача 22. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через середню лінію  $KL$  основи, паралельно бічному ребру.

Задача 23. Побудувати переріз трикутної призми площиною, що проходить через сторону основи під кутом  $\alpha$  до площини основи.

Задача 24. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка поділяє пополам кут, утворений бічною гранню і площиною основи піраміди.

*Задача 25. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через точку  $M$ , задану на бічному ребрі  $SA$ , перпендикулярно до висоти  $AF$  основи  $ABC$ .*

Висновки. З початком вивчення учнями курсу стереометрії перед вчителем постає завдання навчити їх виконувати зображення просторових фігур та їх елементів. Застосування чіткої і логічно вибудованої технології формування та розвитку вмінь старшокласників виконувати стереометричні побудови дозволить сформувати у них цілісну картину про зображення як такі. Одним із елементів такої технології має бути система вдало відібраних задач.

### Література

1. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи/ Я.Е.Гольдберг: Пособие для учителя. - К.: Рад.шк., 1990 - 118 с.
2. Изаак Д.Ф. Об изображении пространственных фигур/ Д.Ф.Изаак // Математика в школе. - 1998. - №4. - с.66-81- К.: Рад.шк., 1990 - 118 с;
3. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. - 2010. - Вип. 26. - С. 39-43. - Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn\\_2010\\_26\\_10](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn_2010_26_10).
4. Наконечна Л.Й. Система задач як засіб розвитку пізнавальної самостійності майбутніх учителів математики / Наконечна Л.Й. // Науковий вісник Південноукраїнського державного педагогічного університету ім. К.Д. Ушинського. – № 6-7. – Одеса, 2008. – С. 184-188.
5. Сайт учителя математики Сидорука Володимира Анатолійовича / Режим доступу: <http://sva.in.ua/>.
6. Синько Л. С. - Розв'язування стереометричних задач /Л.С.Синько: Посібник для учителя – Суми, 2011. – 190 с.

**Анотація.** У даній статті проаналізовані труднощі, пов'язані з правильним усвідомленням учнями просторової форми та використанням рисунка. Представлена система задач, на побудову перерізів многогранників.

**Ключові слова:** стереометрія, задачі, многогранники, перерізи, просторова уява, побудова, зображення рисунка, система задач.

**Abstract.** This article analyzes the difficulties associated with the correct students awareness of the spatial forms and use of pattern. The system of task, to build cross-sections of polyhedra.

**Key words:** stereometry, tasks, polyhedra, sections, spatial imagination build an image of the pattern, system tasks.



## **СИСТЕМА ЗАДАЧ З ПЛАНІМЕТРІЇ СПРЯМОВАНА НА РОЗВИТОК НАВИЧОК УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ДОДАТКОВОЇ ПОБУДОВИ**

**Вступ.** Активізація творчої діяльності учнів в процесі оволодіння математикою найефективніше здійснюється через розв'язування задач з геометрії. Будь-яке розв'язування геометричної задачі починається з роботи над малюнком. При цьому іноді на початковому зображенні важко помітити зв'язок між даними і шуканими величинами. Тоді використовують метод додаткової побудови. Однією з таких додаткових побудов може бути проведення прямої через вершину трикутника паралельно його стороні. *Мета статті* – створити добірку задач з планіметрії, в якій використовується метод додаткової побудови, а саме побудова прямої через вершину трикутника паралельно до однієї з його сторін. Для реалізації поставленої мети ми користувались джерелами [1-3].

### **Виклад основного матеріалу**

Прийом додаткової побудови пов'язується із задачами підвищеного рівня складності в геометрії. Серед найпоширеніших додаткових побудов відмічаємо побудову трикутника до паралелограма, побудову допоміжного кола, проведення відрізка, який з'єднує певні точки, проведення допоміжної прямої. Саме останній додатковій побудові і буде приділена увага в цій статті, а саме: проведення через вершину трикутника прямої, яка паралельна до сторони трикутника.

Вперше із такою додатковою побудовою учні знайомляться у 7 класі, під час доведення теореми про суму кутів трикутника.

Під час вивчення теми «Подібні трикутники» у 8 класі з'являється низка задач, які ефективно розв'язуються з допомогою такої додаткової побудови.

Найпершими задачами на ілюстрацію цього можуть бути властивість точки перетину медіан та властивість бісектриси трикутника:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою на дві частини у відношенні  $2:1$ , рахуючи від вершини кута.
2. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам трикутника.

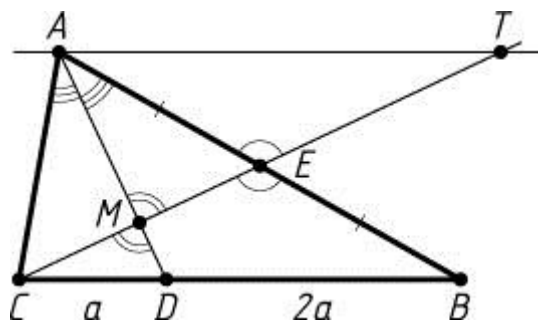
Наступні задачі, на нашу думку, доцільно використати при роботі із здібними до математики учнями, можливо на заняттях математичного гуртка, у 8 класі під час вивчення теми «Подібні трикутники». З одного боку, це є гарним тренажером розвитку вміння «бачити» подібні трикутники, а з іншого – привчає учнів шукати таку додаткову побудову, яка приводить до появи низки подібних трикутників.

3. В трикутнику  $ABC$  бісектриса  $AD$  ділить сторону  $BC$  у відношенні  $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$ . В якому відношенні медіана  $CE$  ділить цю бісектрису?

*Розв'язання.*

Нехай медіана  $CE$  і бісектриса  $AD$  перетинаються в точці  $M$ . Через вершину  $A$  проведемо пряму, паралельну  $BC$  і продовжимо медіану  $CE$  до перетину з цією прямою в точці  $T$ . Нехай  $CD = a$ ,  $BD = 2a$ .

З рівності трикутників  $AET$  і  $BEC$  слідує, що  $AT = BC = 3a$ , а з подібності трикутників  $AMT$  і  $DMC$  випливає, що  $\frac{AM}{MD} = \frac{AT}{CD} = \frac{3a}{a} = 3$ .



4. На медіані  $AA_1$  трикутника  $ABC$  взята точка  $M$ , причому  $AM : MC = 1:3$ . В якому відношенні пряма  $BM$  ділить сторону  $AC$ ?

5. В рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) на стороні  $BC$  взята точка  $D$  так, що  $BD : DC = 1:4$ . В якому відношенні пряма  $AD$  ділить висоту  $BE$  трикутника  $ABC$ , рахуючи від вершини  $B$ ?
6. Дано трикутник  $ABC$ . На продовженні сторони  $AC$  за точкою  $C$  взята точка  $N$ , причому  $CN = AC$ ; точка  $K$  – середина сторони  $AB$ . В якому відношенні пряма  $KN$  ділить сторону  $BC$ ?
7. На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  розташовані точки  $K$  і  $L$ , причому  $AK : KB = 4:7$  і  $AL : LC = 3:2$ . Пряма  $KL$  перетинає продовження сторони  $BC$  в точці  $M$ . Знайдіть відношення  $CM : BC$ .

Вказані задачі тісно пов'язані із теоремою Менелая і можуть бути просто розв'язані без здійснення додаткової побудови, а на основі використання теореми Менелая. Разом з тим, одне з можливих доведень самої теореми Менелая може базуватись на здійсненні побудови додаткової прямої, яка проходить через вершину трикутника, паралельно до його сторони. Її доведення ми пропонуємо розглядати після розв'язання вказаних вище задач для того, щоб розвинути в учнів прагнення використовувати прийом додаткової побудови.

8. (Теорема Менелая) На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  взято відповідно точки  $C_1$  і  $A_1$ , а на продовженні сторони  $AC$  – точку  $B_1$ . Для того щоб точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ .

Наступна добірка задач може бути розв'язана як з використанням додаткової побудови, так і простіше – з використанням теореми Менелая.

9. На стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  взята точка  $K$ , а на стороні  $BC$  – точки  $M$  і  $N$  так, щоб  $AB = 4AK$ ,  $CM = BN$ ,  $MN = 2BN$ . Знайдіть відношення  $AO : ON$  і  $KO : OM$ , де  $O$  – точка перетину прямих  $AN$  і  $KM$ .
10. На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  обрано точки  $N$  і  $M$  відповідно, причому  $AN : NB = 3:2$ ,  $AM : MC = 4:5$ . Прямі  $BM$  і  $CN$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть відношення  $OM : OB$  і  $ON : OC$ .

11. Дано трикутник  $ABC$ . На сторонах  $AB$  і  $BC$  взяті точки  $M$  і  $N$  відповідно, причому  $AB = 5AM$ ,  $BC = 3BN$ . Відрізки  $AN$  і  $CM$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть відношення площ трикутників  $AOC$  і  $ABC$ .

**Висновки.** Виконання тих чи інших додаткових побудов дає змогу конкретизувати в свідомості учнів окремі геометричні факти, допомагає краще засвоїти теоретичний матеріал, розвиває логічне мислення і конструктивні здібності, сприяє розвитку просторової уяви.

Розв'язування задач методом додаткової побудови, з одного боку, розвиває нестандартне мислення, а з іншого – може бути й ефективним засобом підвищення алгоритмічної культури учнів. Особливістю наведених у цій статті задач є знаходження й наступне однозначне виконання послідовності певних операцій, тобто знаходження деякого алгоритму, виконання якого приводить до розв'язування даної задачі.

У поданій роботі розглянуто матеріал, який може бути використаний як на уроках з геометрії, так і в позакласній роботі, при підготовці до математичних олімпіад, на факультативних заняттях.

### Література

1. Бевз Г. П. Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ: Відродження, 2015. – 192 с.
2. Погорєлов О. В. Геометрія 7-9 клас / О. В. Погорєлов. – Київ: Школяр, 2004. – 240 с.
3. ИПС "Задачи по геометрии" [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://zadachi.mccme.ru/>.

**Анотація.** У статті наведено добірку задач з планіметрії, в якій використовується метод додаткової побудови, а саме побудова прямої через вершину трикутника паралельно до однієї з його сторін.

**Ключові слова:** планіметрія, додаткові побудови, подібні трикутники.

**Annotation.** The article shows us the selection of tasks from plane geometry, in which the method of additional construction is used, such as a construction of line through the top of triangle in parallel to one of his sides.

**Keywords:** geometry on the plane, additional construction, similar triangles.

## **КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ**

Науковцями дотепер визначені лише загальні схеми конструювання систем задач, а дослідженню способів їх конструювання достатньої уваги не приділено. Зустрічаються поодинокі дослідження (Г. І. Ковальова, О. Н. Орлянська), присвячені розкриттю специфіки процесу конструювання системи задач та опанування умінь, необхідних для його реалізації.

Очевидно, опанування вчителем математики умінь конструювати системи задач для конкретних навчальних цілей є важливою й невід'ємною складовою його методичної компетентності. Формування та розвиток математичної (геометричної) компетентності учнів значно залежить від майстерності вчителя відібрати, створити та оптимально використати в процесі навчання геометрії цілісну систему задач, в якій, зокрема, вбачаються і діагностичні функції.

**Мета даної статті:** обґрунтувати місце і роль систем задач для моніторингу математичних компетентностей учнів у процесі навчання стереометрії в старшій школі.

Сучасні програми з математики акцентують увагу на формування геометричних компетентностей учнів: геометрична грамотність (знання, вміння), особистісне ставлення до геометрії та процесу її вивчення, формування здатності застосовувати геометричні знання та вміння.

Геометричний зміст шкільного курсу математики старшої школи сприяє не тільки опануванню старшокласниками математичною компетентністю, а ще й формуванню та перевірці елементів ключових компетентностей, наприклад: здатність критично мислити, знаходити різні способи для розв'язування навчальної задачі, складати алгоритм виконання дій, аналізувати та вибирати потрібні для розв'язування задач дані чи інформацію, будувати зв'язні висловлювання з використанням математичної термінології.

Основна ідея задачного підходу до дослідження та побудови навчальної діяльності учнів полягає в тому, що пізнавальну діяльність учні доцільно розглядати та проектувати як систему процесів розв'язування різних задач. Результативність навчання визначається тим, які саме задачі, в якій послідовності і якими способами розв'язуються учнями [1].

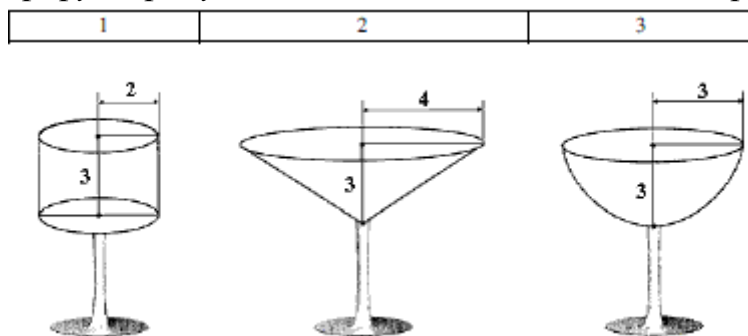
Розв'язування задачі слід розглядати як головний шлях проникнення до механізмів мислення учнів. Використовуючи задачі в процесі перевірки рівня сформованості практичних та розумових умінь учнів під час уроків геометрії, вчителі мають визначити правильність дій, згідно з якими досягається розв'язання; індивідуальні особливості розумової діяльності учнів та їхні якісні характеристики.

Співвідношення між задачами та навчальною метою варто розглядати в системі «набір задач – безліч цілей». У процесі утворення набору задач Ю. І. Машбиць рекомендує дотримуватись наступних вимог [2, с.112-113]: конструюватись має не одна конкретна задача, а набір задач; при конструюванні системи задач слід намагатись, щоб вона забезпечувала досягнення не тільки найближчих навчальних цілей, а й віддалених; задачі мають забезпечити засвоєння системи засобів, необхідної і достатньої для успішного здійснення навчальної діяльності.

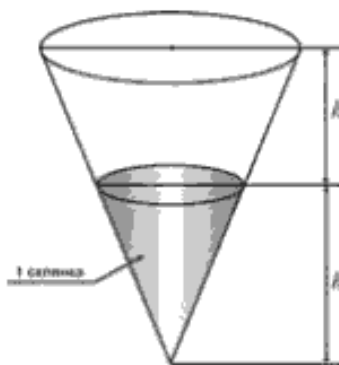
Під системою задач ми розуміємо набір упорядкованих і підібраних, відповідно до поставленої мети, завдань, що діють як одне ціле, взаємозв'язок і взаємодія яких призводить до заздалегідь наміченого результату у навчанні. Оскільки система задач в нашому дослідженні спрямовується на моніторинг геометричної компетентності учнів, тому слід враховувати різні аспекти у доборі таких завдань. У першу чергу, потрібно звернути увагу, що не всі задачі здатні перевірити «чи сформована в учня математична компетентність», а не лише знання та уміння.

Розглянемо сконструйовану нами систему задач з геометрії для старшої школи придатну для моніторингу геометричної компетентності учнів після вивчення многогранників та тіл обертання:

1. Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?
2. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50м. Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру 15м\*18м\*25м?
3. Укажіть номер фужера, у який можна налити найбільше рідини.



4. Сировари вважають, що при рівному об'ємі сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості, ніж сири форм циліндра або куба. Чому?
5. На рисунку зображено ємність, у яку налито одну склянку рідини. Обчисліть, на яку кількість повних склянок рідини розрахована ця ємність.



6. Раніше, а подекуди і зараз, для виготовлення сирної паски використовували форму у вигляді правильної 4-кутної зрізаної піраміди. Вона складається із 4-х бічних дощечок, з'єднаних крючками, дна (меншої основи) і дощечки (вона складає більшу основу) для підкладання її під вагу, якою надавлюють на сир. Визначити висоту форми, якщо площа бічних дощечок складає  $1700\text{см}^2$ ; площа всіх дощечок  $2376\text{см}^2$ , а висота бічної дощечки - 25см.
7. Бокал у вигляді конуса до країв наповнено соком. Петро хоче поділитися із Василем цим соком. Він перелив у інший, такий же бокал сік так, що у першому бокалі соку залишилось, приблизно, три четверті від

попередньої висоти соку в бокалі. В якому бокалі більше соку? Відповідь обґрунтуйте.

8. Власник кафе купив оптом 22 пакети соку (об'єм кожного – 1,5 л). Скільки відсотків прибутку він отримав від продажу цього соку склянками, які мають форму зрізаних конусів з діаметрами основ 4 см і 6,5 см та висотою – 13 см (сік недоливають до краю, приблизно, на 1 см), якщо він заплатив за весь сік 85 гривень 80 копійок, а продав склянку по 1 гривні?
9. Над димовою трубою, довжина кола основи якої дорівнює 126 см, поставлено конічний навіс, край якого виступає над краєм труби на 2 см. Висота навісу 35 см. Яку масу заліза використали на навіс, якщо на з'єднання пішло  $17,5 \text{ см}^2$  і лист шириною 70 см та довжиною 140 см має масу 4,9 кг?
10. Фільтр має форму перекинутого конуса. Скільки рідини міститься у фільтрі, якщо радіус його основи (розтруб) складає 10 см, довжина від дна до краю (твірна) дорівнює 26 см?
11. Вафельний ріжок вміщує близько  $170 \text{ см}^3$  морозива. Відомо, що висота ріжка дорівнює 7 см, діаметр зверху в 1,2 рази більший від діаметра дна. Скільки (у метрах квадратних) вафель потрібно для виготовлення 100 таких ріжків?
12. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Дно горщика займає  $113 \text{ см}^2$ , висота дорівнює 20 см, а висота його стінки від одного краю до іншого – 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40% об'єму. Скільки господині треба купити землі, якщо земля має бути пухкою та її густина  $= 1,5 \text{ г/см}^3$ ?

Шляхом теоретичного моделювання нами виокремлені певні положення щодо конструювання систем практично-орієнтованих завдань: аналіз наявних задач на можливість їх включення в систему шляхом дослідження умов і вимог, встановлення відповідності поставленим цілям; місце системи задач в системі уроків, реалізація функцій сконструйованої системи задач. Ключові аспекти конструювання систем задач розкривають способи створення її структури, а методи і прийоми визначають наповнювачі структури системи завдань конкретними елементами або конструктами.

При роботі із побудованою нами системою задач, учні поставлені в умови розв'язувати задачі, які можуть зустрітись у повсякденному житті, повинні



розпізнати проблеми, які можна розв'язати математичними методами, сформулювати їх математичною мовою, досліджувати та розв'язувати ці проблеми, використовуючи набуті математичні знання та уміння, інтерпретувати отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей, логічно мислити (аналізувати, порівнювати, узагальнювати і систематизувати, класифікувати математичні об'єкти за певними властивостями, наводити контрприклад, висувати та перевіряти гіпотези), що дозволяє визначати рівень геометричної компетентності майбутніх випускників.

### Література

1. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: Монографія / О. І. Матяш. – Вінниця: ФОП Легкун В. М., 2013. – 445 с.
2. Машбиц Е. И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е. И. Машбиц. – К. :Вища шк., 1987. – 224 с.
3. Орлянская О. Н. Учимся конструировать системы задач по математике: учеб.-метод. пособие / О. Н. Орлянская, Т. К. Смыковская, В. М. Монахов. — М.: Альфа, 2002. — 32 с.
4. Прус А. В. Вчимося розв'язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях: Навчальний посібник. / А. В. Прус, І. А. Сверчевська – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

**Анотація.** Розглянуто питання конструювання системи задач для моніторингу геометричних компетентностей учнів. Обґрунтовано загальнотеоретичні уявлення про необхідність використання системи задач в якості моніторингу процесу і результату формування в учнів математичної компетентності у процесі навчання геометрії.

**Ключові слова:** діагностика, моніторинг, система задач, геометрична компетентність.

**Abstract.** There was considered the problem of designing a system of tasks for monitoring geometric competencies of students. Also there was justified the general theoretical understanding of the need to use the task system as the monitoring process and the result of the formation of students' mathematical competence in the process of learning geometry.

**Keywords:** diagnostics, monitoring, system of tasks, geometric competence.

## **ДІАГНОСТИКА РОЗВИНЕНOSTІ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ**

Дослідження психологів, дидактів і методистів в останні роки показали, що вміння школярів розв'язувати задачі не знаходяться прямій залежності від кількості розв'язаних задач. Учень може виконати велику кількість окремих завдань, але якщо у нього не сформований загальний підхід до їх аналізу, пошуку плану розв'язання, вміння узагальнювати, порівнювати, знаходити спільні відмінні ознаки об'єктів, проводити аналогію – самостійно розв'язувати задачі він не навчиться.

Високий рівень розвитку прийомів розумової діяльності є необхідною умовою формування критичності мислення учнів. Тому, важливою є діагностика в учнів розвиненості прийомів розумової діяльності, таких як аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія, абстрагування і конкретизація, узагальнення та порівняння.

Розглянемо приклади окремих завдань, які ми пропонуємо для використання у процесі діагностики розвитку прийомів розумової діяльності при навчанні геометрії учнів основної школи:

1. Дано два рівних гострих кута. Чи будуть вони вертикальним?
2. Доведіть, що якщо катет і протилежний кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і протилежному куту другого, то такі трикутники рівні.
3. Центр кола, описаного навколо трикутника є точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника. Чи буде ця точка центром кола, вписаного у трикутник?
4. Які спільні властивості мають паралелограм, прямокутник, ромб і квадрат? Яка з розглянутих фігур містить властивості всіх видів чотирикутників? [1]

У першому завданні перевіряється, крім відповідних знань, вміння аналізувати. Аналізуючи завдання, учні повинні відповісти на таке запитання: Хіба лише вертикальні кути рівні?

У другому завданні перевіряється можливість узагальнення, що тісно пов'язане з абстрагуванням, порівнянням та конкретизацією. Якщо учні володіють прийомом узагальнення, то вони виконають поставлене завдання. Учні повинні узагальнити ознаки рівності двох трикутників, а також звернути увагу на рівність прямокутних трикутників. Зауважимо, що, крім узагальнення, мова може йти про певну аналогію, яка у навчанні призводить, як до правильних, так і до неправильних висновків. Для встановлення висновків за аналогією необхідне доведення. Однак на етапі діагностики, описаний прийом важливий з точки зору фіксації володіє чи не володіє ним учень.

У третьому завданні явно перевіряється вміння застосовувати аналогію. Умовивід за аналогією стверджує про більшу схожість між об'єктами на основі виявленої часткової схожості. Якщо учень знає спосіб обґрунтування одного твердження, то порівняння та аналіз умови іншого повинні навести його на думку, що друге твердження неправильне. Учні повинні чітко розуміти, яка фігура називається колом, а також про ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка та рівновіддалених від його сторін.

Четверте завдання виявляє вміння учнів розрізняти суттєве і несуттєве при формуванні понять. Тут велику роль відіграють різні види абстракції: ізолююча, підкреслююча, протиставна. При формуванні узагальнення в школі часто користуються *ізолюючою абстракцією*, суть якої полягає в тому, що учні шукають і узагальнюють суттєві спільні властивості, а несуттєві підкреслюють як фон, але не узагальнюючи їх. *Протиставне узагальнення* складається з двох «фаз»: називаються і узагальнюються суттєві ознаки (перша фаза узагальнення), відділяються і узагальнюються несуттєві (друга фаза узагальнення). Такі «двофазові узагальнення» на основі протиставного узагальнення досліджувала О. Кабанова-Міллер. На її думку шлях «двофазового узагальнення» найбільш ефективний в навчальному процесі. [2].

*Дедуктивне узагальнення.* Якщо в індуктивних узагальненнях спільна ознака невідома, її шукають, то в дедуктивних – її вже знають і слід розпізнати дану ознаку в інших об'єктах. Психологи називають такі задачі задачами на підведення під поняття або на розпізнавання. *Підведення під поняття* – розумова дія співставлення будь-якого об'єкту з поняттям, яке передбачає наявність у цього об'єкта ознак даного поняття [3].

Наприклад, у сьомому класі при засвоєнні поняття «суміжні кути» учні повинні навчитися безпомилково знаходити їх в різних геометричних фігурах. Можна запропонувати учням на рис.1. назвати суміжні кути і пояснити, чому в інших випадках вони є несуміжними.

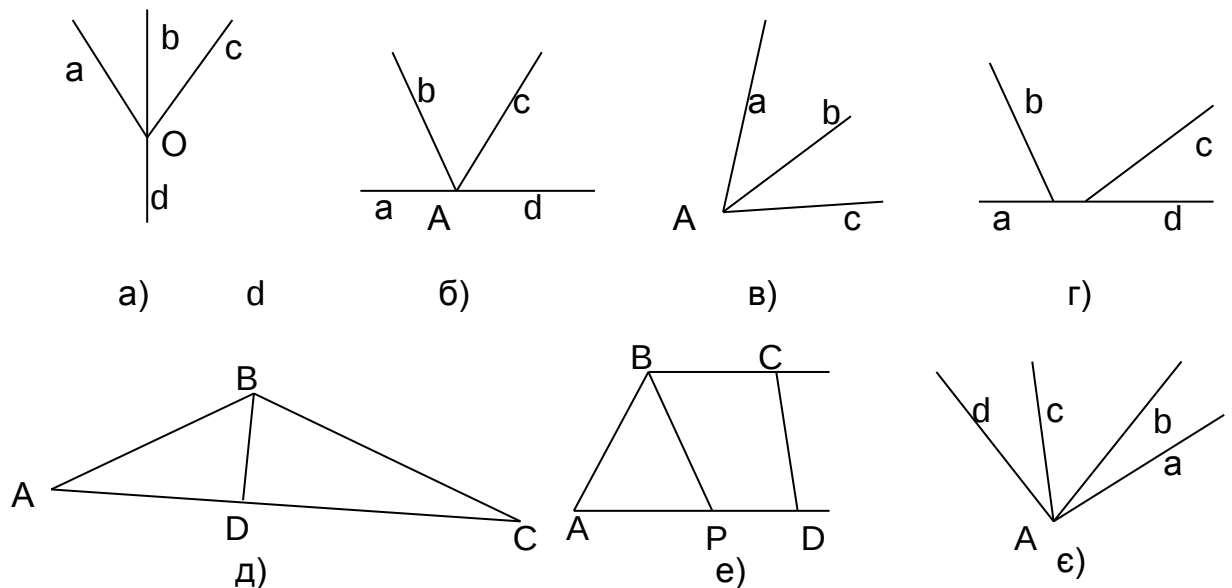


Рис 1

Учні навчаються розмірковувати відповідно зі схемою розв'язання задачі на підведення під поняття. Пригадують і виписують відмінні ознаки суміжних кутів, в кожному випадку послідовно перевіряють наявність ознак і таким чином класифікують всі кути на суміжні та інші.

Дедуктивне узагальнення – основа *класифікації*. Узагальнення і класифікація – загально пізнавальні прийоми.

Дуже важливо вміти вибрати критерій, ознаку, основу для класифікації і, навпаки, вміти по заданій класифікації назвати її критерії. Наприклад: За якими

ознаками можна ділити трикутники на види? За якими ознаками розділені трикутники на прямокутні, тупокутні, гострокутні?

Головним чином розвиненість прийомів розумової діяльності залежить від доцільно вибудованої системи задач, яка не лише допоможе розвивати різні прийоми розумової діяльності учнів, але й дозволить учням ґрунтовніше та ефективніше вивчити матеріал кожної теми.

### **Література**

1. Воевода А.Л. Місце та роль некоректних задач в шкільному курсі математики// Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2014.
2. Кабанова-Меллер В.И. Формирование приёмов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / В.И.Кабанова-Меллер. – М.:Просвещение, 1968. – 258 с.
3. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике / В.Н.Осинская. – К.:Рад.школа, 1989. – 192 с.

***Анотація.** В статті розглядаються можливі шляхи діагностики рівня розвиненості прийомів розумової діяльності учнів в процесі навчання геометрії. Наведено приклади задач для діагностики розвитку прийомів розумової діяльності.*

***Ключові слова:** прийом розумової діяльності, задача, діагностика.*

***Annotations.** The article deals with possible ways of development of diagnostic techniques of mental activity of students in learning geometry. Examples of problems for diagnostic techniques of mental activity.*

***Keywords:** acceptance of mental activity, problem diagnosis.*

**Науменко Таміла Василівна**

*Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка,  
студентка магістратури*

## **ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ЯК ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У МЕТОДИЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ**

Актуальність застосування тестових технологій зумовлена потребою створення і використання більш якісних і результативних методик для контролю навчальних досягнень учнів на уроках математики. Такі переваги тестів, як об'єктивність, швидкість перевірки виконаної роботи, можливість індивідуалізації процесу навчання, зумовлюють активне їх використання як форми контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів. Існують різні методики тестування, але найбільш ефективна – використання комп'ютерного тестування, оскільки вона дозволяє швидко та об'єктивно провести оцінювання учнів за короткий проміжок часу. Використання інформаційних технологій в процесі оцінювання знань, навичок та вмінь учнів з математики також робить саму процедуру контролю більш цікавою для учнів [1]. Якщо тестування здійснено за допомогою комп'ютерних програм, то повністю відсутня суб'єктивність оцінки знань учнів, обробка результатів проводиться за лічені секунди, є можливість відразу на уроці математики надати диференційовану допомогу учням для усунення прогалин у знаннях [2].

Особливого значення тестовий контроль знань та вмінь учнів набуває у зв'язку з впровадженням в Україні зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Проходження ЗНО є серйозним психологічним випробуванням для учня, тому завдання школи – допомогти учням психологічно налаштуватися на успіх, ознайомити з правилами проходження ЗНО, допомогти в підготовці до тестування. Тому використання тестових технологій для оцінювання та діагностики навчальних досягнень учнів 10-11 класів є важливим компонентом діяльності вчителя математики.

Для реалізації комп'ютерного тестового оцінювання знань учнів існує безліч програм, зокрема ADTester, OpenTEST, MyTest X, x-TLS, NetTest тощо.

У власному досвіді роботи вчителя математики широко використовуємо таку систему, як MyTestX. Слід зауважити, що MyTest X – це безкоштовна програма, що легко інсталюється, є потужним комплексом програм для підготовки і проведення комп'ютерного тестування, збору і аналізу результатів та оцінювання їх за вказаною в тесті шкалою. За допомогою цього пакета можна легко створювати тести з математики у форматі завдань ЗНО, оскільки програма MyTestX підтримує дев'ять типів завдань [3].

Наприклад, під час вивчення теми «Застосування похідної» на етапі формування навичок та вмінь пропонуємо учням 11 класу у програмі MyTestX виконати завдання на знаходження критичних точок функції (рис.1).

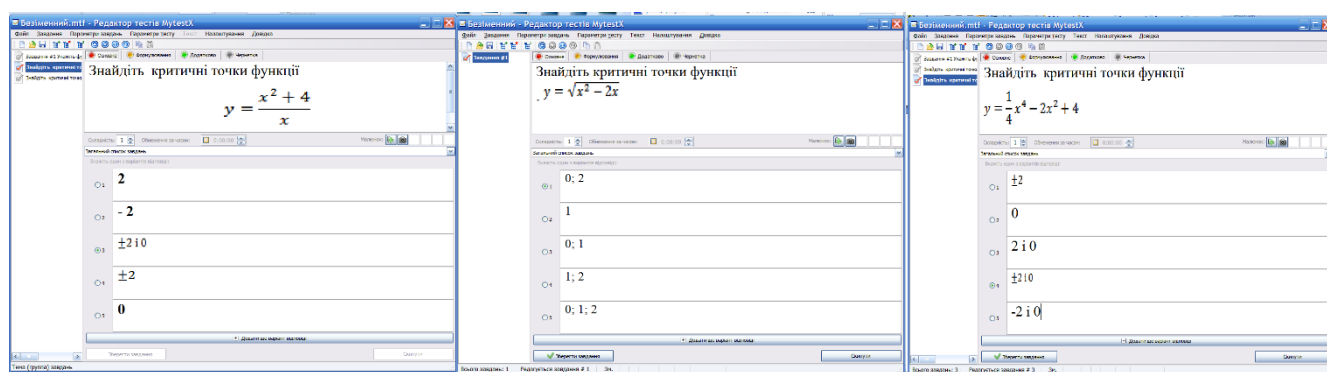


Рис. 1. Завдання у програмі MyTestX

На виконання завдання учням відводиться 5 хвилин, при цьому такий вид роботи доцільно проводити і на етапі актуалізації опорних знань, і на етапі підведення підсумків уроку. Варіанти відповідей розміщуються в довільному порядку, тому кожен учень одержує свій варіант.

Зауважимо, що тестування як форма контролю навчальних досягнень учнів не повинна повністю замінити традиційні форми і методи педагогічного контролю, а має органічно вписатися в існуючий навчальний процес, доповнити систему контролю, сприяючи вирішенню проблеми підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.

Отже, результати зовнішнього незалежного оцінювання з математики попередніх років та власний досвід роботи вчителем математики показує, що учням не завжди легко подолати психологічний бар'єр у написанні таких тестів. Для цього учню необхідно мати навички роботи з будь-якими тестовими

завданнями. Вчителю математики слід формувати їх поступово, запроваджуючи тести для поточного контролю навчальних досягнень учнів та тематичного оцінювання з математики, зокрема з використанням ком'ютерних технологій.

### Література

1. Андрущенко В. П. Теоретико-методологічні засади модернізації вищої освіти / В. П. Андрущенко // Вища освіта України. – 2001. – № 2. – С. 5-13.
2. Блажко М. А. Тестові технології в оцінюванні навчальних досягнень учнів з української мови : основні поняття і терміни / М. А. Блажко // Вісник Львівського університету. – 2010. – Вип. 50. – С. 174-179.
3. MyTestXPro – система програм для создания и проведения компьютерного тестирования, сбора и анализа их результатов [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [http : //mytest.klyaksa.net](http://mytest.klyaksa.net)

**Анотація.** Розглянуто особливості застосування тестових технологій для контролю навчальних досягнень учнів на уроках математики, зокрема за допомогою програми MyTestX. Наголошується, що тестові завдання доцільно включати до системи задач у методичній діяльності вчителя математики з метою підготовки учнів до ЗНО.

**Ключові слова:** комп'ютерне тестування, математика, зовнішнє незалежне оцінювання.

**Abstract.** The peculiarities of application of test technologies for control of educational achievements of pupils at lessons of mathematics, in particular using the MyTestX program. It is noted that the test tasks are appropriate to include in the system of tasks in methodological activities of the teacher of mathematics with the aim of preparing students for testing.

**Key words:** computerized testing, math, independent external evaluation.



## **АНАЛІЗ НАВЧАЛЬНО МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ЩОДО КОНСТРУЮВАННЯ СИСТЕМ ЗАДАЧ**

**Вступ.** Ефективність навчання математики більшою мірою залежить від правильної організації навчання. Основним завданням вчителя є побудова системи задач, яка задовольняє індивідуальні особливості кожного учня, класу в цілому та навчальну програму.

Сучасні підручники наповнені великою кількістю задач від найлегших до складних, що дає вчителю широкий вибір та можливість реалізації диференційованого підходу до навчання. Тому велика кількість вчителів вважають не є необхідністю складати власні системи задач, але той перелік задач, що дається у сучасних підручниках ще не є логічно побудованою системою.

Великий внесок у створення систем задач, як засобів підвищення ефективності навчання, належить таким відомим математикам та методистам: Г. Бевзу, М. Бурді, О. Валушенко, Г. Кирилецькій, О. Матяш, С. Семенцю Н. Сяські, Г. Саранцеву, Н. Тарасенковій та ін.

**Мета даної статі.** описати вимоги до формування систем задач, дослідити погляди видатних методистів щодо формування систем задач.

**Виклад основного матеріалу.** Розв'язуючи задачі, учні засвоюють найважливіші математичні поняття, навчаються виконувати доведення, отримують навички розумової праці, мислення уяви, формують наполегливість, уважність тощо. Тому система задач повинна бути правильно і логічно сконструйована.

В методичній літературі виділяють чотири методи формування системи задач:

- **метод ключової задачі:** кожна задача всієї системи задач використовує результати ключової задачі.

- **метод цільової задачі:** виділення однієї складної задачі, розв'язання якої розбивається на ряд простих задач або на ряд задач що передують їй.

- **метод варіювання задачі:** кожна наступна задача отримана з попередньої варіюванням(змінною, відхиленням) або змінною форми.

- **метод «сніжного кому»:** в першій задачі необхідно здійснити одну операцію, в наступній цю ж саму і плюс ще одну операцію і так з кожною наступною задачею добавляти одну операцію, доки задача не набуде вигляду достатньо важкої.

О.І. Матяш виокремила сучасні вимоги до формування систем задач:

- задачі системи мають бути дібрані з врахуванням: вимог навчальної програми; специфіки навчального матеріалу; вікових можливостей учнів; рівня їх навченості з математики; профілю навчання конкретного класу; дидактичної мети уроку;
- кожна задача повинна мати місце і роль в системі відібраних задач;
- методика розв'язування кожної задачі системи має враховувати умови диференційованого навчання;
- розв'язання задач повинно передбачати застосування раніше набутих знань та умінь;
- важливе планування, які із задач системи будуть розв'язуванні усно, а які письмово;
- в систему задач включати змінені задачі, задачі не стандартних форм;
- методи, прийоми і засоби розв'язування задач мають бути раціональними, сучасними з використанням новітніх технологій. [4]

Бевз Г. П. пропонує спочатку давати дітям однотипні задачі, а тип вибирати залежно від видів фігур. Якщо пропонувати дітям розв'язувати задачі згруповані за певними ознаками, методами або прийомами розв'язання, то учні краще і швидше засвоюють ці методи і прийоми, успішніше навчаються розв'язувати задачі і цих і інших типів. Задачі інших типів бажано пропонувати лише після того, як учні навчаться розв'язувати задачі простіших типів.

Кожний новий тип задачі доцільно починати розв'язувати з найпростіших і поступово ускладнювати. [1]

Д. Пойя надавав перевагу методу варіювання задачі, він виділяє шість основних способів варіювання задачі: узагальнення, спеціалізація, аналогія, складання нових комбінацій, введення допоміжних елементів, повернення до означення. [3]

Г. І. Саранцев вважав що необхідно використовувати блок задач, об'єднаних спільною ідеєю. Блоки задач пропонує конструювати такими способами: результати попередніх задач використовуються в умові наступної задачі; результати попередніх задач використовуються в розв'язанні наступної задачі; попередні задачі є елементами наступної; розв'язання задач виконується одним і тим же методом.

Г. В. Толкмазов використовував одну задачу як основну, а підзадачі конструював різними способами: заміняв питання до задачі, формував задачу яка розглядає особливі випадки основної задачі, створював задачі які розв'язуються декількома способами, створював задачу контрприклад.

Н.А. Сяська виділяє основні етапи навчання учнів планіметрії через систему задач та виділяє такі типи задач, які повинні бути включені до системи: ввідні, першозакріплюючі, тренувальні, поглиблюючі, комбіновані, контролюючі.

**Висновки.** Навчання з допомогою систем задач позитивно впливає на якість знань учнів, навчає думати наперед, уявляти, нестандартно мислити, системи задач дозволяють систематизувати знання учнів. Тому системи задач повинні бути головним інструментом вчителя при організації навчального процесу. Формуючи систему задач вчитель повинен враховувати: навчальний план, індивідуальні особливості і здібності кожного з учнів, навчальний рівень класу тощо.

### Література

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач. Посібник для вчителя. / Г. П. Бевз. – Київ: Радянська школа, 1988. – 192 с.

2. Ковалева Г. И. Теория и методика обучения математике: Конструирование систем задач. Волгоград: Изд-во ВГПУ «Перемена». — 2008. — 156 с.
3. Матяш О. І. Конструювання систем задач у навчанні учнів геометрії в старшій школі / О. І. Матяш // Тези всеукраїнської конференції. — Полтава, 2013. — С.7— 8.
4. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр.- Випуск №26 – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2010. – 566 с.
5. Пойя Д. Как решать задачу. Пособия для учителей / Д. Пойя. – Москва: государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. – 208 с.
6. Сяська Н. А. Методична система реалізації функції задач в навчанні планіметрії : автореф. дис. . канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Сяська Наталія Андріївна. — Київ. — 2005. — 20 с.

**Анотація.** В даній статті описано методи та вимоги до формування систем задач та проаналізовано навчально методичну літературу, щодо конструювання систем задач.

**Ключові слова.** Система задач, ефективність навчання, диференційоване навчання, метод формування систем задач, тип уроку, вимоги.

**Annotation.** In this article described methods and requirements for the formation systems tasks and analysis of educational methodical literature on design systems tasks.

**Keywords.** System problems, the effectiveness of learning, differentiated instruction, a method of forming tasks, the type of lesson requirements.

## **ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ ЗАСІБ КОРЕКЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ**

**Постановка проблеми.** У сучасній дидактиці поняття корекції виступає як супровідне для поняття контролю, а власне процедура корекції є одним з етапів контрольно-оціночного акту. Корекція математичної підготовки учнів може здійснюватися не тільки в процесі чи після контролю результатів навчання, але й у ході формування знань і вмінь, коли неправильні, помилкові уявлення учнів ще не усталилися, а також при підготовці до контролювальних заходів для вдосконалення знань і вмінь учнів, їх узагальнення і систематизації. Основні компоненти корекції – профілактична робота із запобігання математичних помилок учнів та усунення допущених помилок. Корекція навчальних досягнень учнів планується і здійснюється на основі інформації про реальний стан знань і вмінь учнів, одержаної за результатами контролю. Контроль і корекція у навчальному процесі можуть здійснюватися або по чергово: контроль – корекція, корекція – контроль, або одночасно. Таке співвідношення визначає етапність у здійсненні корекції знань і вмінь учнів під час навчання математики: перший етап – доконтрольна корекція; другий етап – синхронна корекція; третій етап – післяконтрольна корекція. [3]

Вважаємо, проблема підвищення ефективності навчання може бути успішно вирішена за умови, що отримані знання на уроці будуть підкріплюватися добре продуманою і організованою домашньою роботою учнів.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Аналіз методичної літератури, спілкування із учителями математики та батьками учнів свідчить, що в організації домашньої навчальної роботи учнів є суттєві недоліки. До основних можна віднести: багато учнів при підготовці домашніх завдань за підручником перетворюють виконання домашнього завдання на півмеханічне читання

навчального матеріалу, та не здійснюють самоконтроль за засвоєнням знань; багато учнів при виконанні домашнього завдання не вміють організувати свій робочий час, що приводить до поспішності в роботі і поверхневому засвоєнню матеріалу, що вивчається; виконання письмових завдань багатьма школярами здійснюється без попереднього засвоєння теоретичного матеріалу, на якому засновані ці завдання, тобто учні не тільки допускають істотні недоліки і помилки у завданнях, але і не осмислюють того зв'язку, що існує між теоретичним матеріалом і практичними вправами.

У методичній літературі щодо організації домашньої роботи учнів найчастіше можна зустріти такі поради:

- вчитель має забезпечувати диференційований підхід до визначення змісту й обсягу домашніх завдань з урахуванням індивідуальних особливостей учнів, їх запитів та інтересів;
- використовувати творчі завдання, які приваблювали б учнів новизною і цікавістю, стимулювали до пошукової діяльності;
- в окремих випадках доцільно давати учням індивідуальні завдання, які допомагають усунути прогалини у знаннях;
- komponувати домашнє завдання можна із поточних та випереджаючих завдань. Під час виконання випереджаючих завдань учні мають отримати допомогу від учителя через інструктаж, складання планів, пам'яток, карток-підказок;
- у старшій школі варто практикувати домашнє завдання на час вивчення певної теми. Тобто учням для домашнього розв'язання пропонують добірку задач яку потрібно розв'язати за певний період часу;
- важливими умовами ефективності самостійної роботи учнів є систематична перевірка вчителем виконання домашніх завдань, об'єктивне оцінювання їх результатів. [2]

**Мета статті.** Виділити вимоги до конструювання системи вправ домашнього завдання з математики.

**Виклад основного матеріалу.** Визначення обсягу домашніх завдань, їх структури і характеру залишається невирішеною проблемою в роботі вчителів математики. Досить часто, учні та їхні батьки справедливо скаржаться на незбалансований характер домашніх завдань, на перевантаженість учнів внаслідок невиправданого збільшення їх розміру, на одноманітні вправи, що не формують інтересу до предмету, що включаються в домашні завдання. Важко у кожному окремому випадку встановити оптимальні характеристики домашнього завдання. Проте, необхідно розуміти, що домашня робота - це продовження роботи на уроці з урахуванням інтересів і особливостей кожного учня. Оскільки на уроках, як би добре вони не проводилися, має місце концентроване запам'ятовування, і знання переводяться лише в оперативну, короткочасну пам'ять. Щоб перевести їх у пам'ять довгострокову, учню необхідно здійснити їхнє наступне повторення, тобто розосереджене засвоєння, що також вимагає організації їхньої домашньої навчальної роботи. Не менш важливе значення має вона також для виховання учнів, оскільки сприяє формуванню в них старанності, самостійності, служить засобом розумної і змістовної організації позашкільного часу. [1, 2]

При складанні системи задач для домашніх завдань учитель-початківець може керуватися такими порадами:

- мета обов'язкового домашнього завдання, в більшості випадків - відпрацювання основних навичок, ілюстрація продемонстрованих на уроці ідей і актуалізація знань, необхідних для подальшого вивчення матеріалу. Обов'язкові завдання повинні бути посильні практично всім учням;

- в класах з поглибленим вивченням математики порівняно часто повинні пропонуватися завдання, які передбачають тривалі самостійні роздуми, пошук нетривіальних і нових ідей або використання відомих ідей в різних галузях [1, 2];

- кожне домашнє завдання з математики повинно аналізуватися і будуватися з урахуванням його місця в навчальному процесі та знаходитися в тісному зв'язку з тим, що вивчається на уроках;

- при складанні домашнього завдання слід враховувати не тільки особливості класу в цілому, але і особливості окремих учнів. Завдання можуть бути індивідуалізовані - різним учням можуть в певних випадках пропонуватися різні завдання або завдання на вибір, що дозволить учням відчувати себе більш комфортно. У багатьох ситуаціях доцільно включення в домашні завдання необов'язкових завдань: як завдань підвищеної складності для учнів, які виявляють особливий інтерес до предмета, так і завдань зниженого рівня складності, спрямованих на надання допомоги тим учням, які відчують труднощі при виконанні основної частини завдання і потребують повторення вивчених знань та закріплення навичок; [1]

- доцільно використовувати такі форми завдань як тривалі індивідуальні проекти, що дозволяють учням раціонально в часі повніше використовувати свої індивідуальні можливості і здібності;

- бажано, щоб домашні завдання були різноманітні за характером. Домашнє завдання з математики може включати усну частину - читання (в обмеженій кількості) матеріалу підручника, розібраного на уроці і підготовка до усної відповіді на питання і частину письмову, в якій можуть бути вельми різноманітні вправи: і традиційні завдання, і завдання, в яких необхідно проводити логічні міркування, і графічні завдання, і виконання геометричних побудов, і завдання на аналіз таблиць діаграм і їх побудова, завдання які передбачають самостійне виготовлення моделей учнями (виготовлення моделей фігур, інше моделювання, включаючи і комп'ютерне);

- обговорення домашнього завдання, його перевірка, відповіді на питання учнів по ньому повинні бути обов'язковою частиною уроку.

**Висновки.** Дотримання виділених вимог до конструювання системи вправ домашнього завдання з математики сприятиме не тільки ефективній корекції знань та умінь учнів, а також формуватиме позитивне ставлення до навчального предмету, розвивати інтерес до математики, як науки.



### Література

1. Методические рекомендации о преподавании учебного предмета «Математика» в 2015-2016 учебном году / Е.Ю. Лукичева.- Санкт-Петербург, 2015. [Электронный ресурс]. Режим доступа: [www.spbappo.ru/remository/func-startdown/634/](http://www.spbappo.ru/remository/func-startdown/634/)
2. Михайленко Л.Ф. Збірник навчально-методичних задач з методики навчання геометрії в школі / О. І. Матяш, А. Л. Воєвода, Л. Ф. Михайленко, Л.Й. Наконечна. – Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2012.– 392 с.
3. Черкаська Л.П. Методика контролю та корекції навчальних досягнень з математики учнів основної школи: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец.13.00.02 / Л.П.Черкаська. – Черкаси, 2009. - 22с.

**Анотації.** У статті виокремлено вимоги до конструювання системи вправ домашнього завдання з математики, що сприяють ефективній корекції знань та умінь учнів.

**Ключові слова.** Домашнє завдання, корекція знань та умінь учнів.

**Annotations.** The article singled out requirements for the construction of a system of exercises math homework, contributing to effective correction of the knowledge and skills of students.

**Keywords.** Homework, body of knowledge and skills of students.

## **ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ КЛАСІВ З ГУМАНІТАРНИМ ПРОФІЛЕМ НАВЧАННЯ**

У Навчальній програмі з математики (рівень стандарту) зазначається, що одним із головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем *практичної компетентності*. Тобто особливо наголошується, що для успішного вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи, для отримання якісної професійної освіти та продовження освіти на наступних етапах, для успішної участі в сучасному суспільному житті, особистість повинна володіти навичками застосувань прийомів математичної діяльності до розв'язування практичних задач. Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти.

Формування практичної компетентності учнів класів з гуманітарним профілем навчання ускладнюється, насамперед, нестачею часу, який відводиться програмою на вивчення математики в цих класах. Окрім цього, необхідно враховувати спрямованість інтересів учнів класів з гуманітарним профілем навчання та високий рівень їх завантаженості профільними предметами. Лінгвістичні особливості пам'яті учнів-гуманітаріїв дозволяють їм достатньо легко запам'ятовувати незвичні, чужинні звукосполучення та слов, тому ці учні легко запам'ятовують математичні терміни та назви, однак важко усвідомлюють їх зміст.

Активізації пізнавальної діяльності учнів класів з гуманітарним профілем навчання сприяє використання в процесі навчання математики *інтегрованих уроків*. Проведення інтегрованих уроків підвищує та розвиває інтерес учнів-гуманітаріїв до предметів природничо-математичного циклу, формує впевненість у цих учнів, що вони можуть з розумінням вивчати достатньо складний математичний матеріал. Проведення інтегрованих уроків з математики та інших дисциплін надає можливість на початку вивчення нової

теми показати практичне застосування математичного матеріалу, що врешті дозволяє наголосити учням-гуманітаріям, що подальше розв'язування вправ тренувального характеру необхідне саме для формування навичок самостійно розв'язувати більш складні завдання практичного спрямування.

Активізації пізнавальної діяльності старшокласників-гуманітаріїв сприяє також проведення *уроків-конференцій*. Учнівська конференція сприяє формуванню знань, умінь і навичок учнів, їх закріпленню, узагальненню і систематизації. Уроки-конференції з математики у класах з гуманітарним профілем навчання забезпечують позитивну установку на сприйняття змісту матеріалу, відповідного морального і психологічного мікроклімату, атмосфери поваги і довіри на уроках математики.

Наприклад, дбаючи про розуміння сутності поняття «функція», вчитель має організувати бесіду з учнями на зразок наступної: У повсякденному житті ви часто зустрічаєтеся з функціональними залежностями та вдало їх використовуєте в потрібний для себе момент на інтуїтивному рівні. Якщо маєте сумніви, тоді наведемо приклади таких життєвих ситуацій. Уявімо, що ви відчуваєте, коли можете вранці запізнитися до школи, бо вийшли на кілька хвилин пізніше. Як будете діяти? При цьому ви чітко знаєте залежність, чим швидше йдеш, тим менше часу витратиш на дорогу. Відповідно до цієї закономірності ви, очевидно, будете рухатися жвавіше, тобто дотримуватися загального закону: час, витрачений на шлях, є функцією швидкості руху. Спробуйте навести власні приклади, коли функціональні залежності працюють у життєвих ситуаціях.

*Очікувана відповідь учнів.* Наприклад, чим більше користуєшся мобільним телефоном упродовж дня, тим швидше закінчується заряд батареї телефону, тобто маємо залежність заряду батареї телефону від часу його використання.

*Вчитель.* Звичайно, ідучи до школи чи користуючись мобільним телефоном, ми не замислюємося про самі функціональні залежності, але в обох прикладах є дуже важливий момент: якщо знати закон залежності, то це

означає, що ми знаємо, що необхідно зробити зараз, щоб отримати необхідний результат потім! Тобто саме знання функціональних залежностей дозволяє прорахувати результат наперед. Якщо ми хочемо прорахувати певні результати точно та безпомилково, а це необхідно не лише в багатьох технічних галузях, але й таких професіях, як соціолог, психолог, філолог, треба провести точні математичні розрахунки.

Наш досвід свідчить, що учні гуманітарних класів з більшим інтересом розв'язують ті завдання, які хоча б частково подані «не математично». Певне переформулювання завдання дозволяє подолати психологічні бар'єри учнів класів з гуманітарним профілем щодо вивчення математики. Наприклад:

*Задача. Великий шовковий шлях в околі міста Кашгар має розгалуження, що описується залежністю  $y = 2|x| - 3$ . Вийшовши з цього міста, караван у пустелі збився зі шляху й зупинився в точці  $(2; -3)$ . Звіздар каравану визначив, якщо повертатися на Великий шовковий шлях найкоротшою дорогою, то караван прийде до оази на цьому шляху. Знайти координати цієї оази.*

Задача може бути розв'язана різними способами: логічними міркуваннями, знаходженням екстремумів функції з застосуванням похідної, з використанням геометричного змісту похідної, векторним методом чи застосуванням геометричних властивостей трикутників. Доцільно запропонувати учням вказану задачу в процесі вивчення застосування похідної в 11 класі. Задача зацікавлює учнів нестандартністю формулювання, не містить важких для сприйняття термінів, за змістом тісно пов'язана з історією, географією, тобто має реальний прикладний зміст.

Проведення інтегрованих уроків, уроків-конференцій сприяє підготовці учнів-гуманітаріїв до складнішої творчої діяльності з обробки та засвоєння значних обсягів інформації, зняттю емоційної напруженості, встановленню емоційних контактів, створенню сприятливої атмосфери спілкування, розвитку інтересу до математики, загальної культури та особистісних якостей учнів.

## Література

1. Власенко С. В. Інтегрований урок з математики – інформатики / С. В. Власенко, Л. М. Страннікова // Математика в школі. – 2005. – № 6. – С. 27-30.
2. Матяш О. І. Екскурси в історію математики та фізики з метою здійснення міжпредметних зв'язків / О. І. Матяш, М. М. Бараболя. – Вінниця: ВДПУ, 2004. – 112 с.
3. Шищенко І. В. Врахування особливостей учнів-гуманітаріїв у роботі вчителя математики / І. В. Шищенко // Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні : матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції, [10–11 грудня 2009 р.]. – Вінниця : Планер, 2009. – С. 136-138.

**Анотація.** *Активізації пізнавальної діяльності учнів класів з гуманітарним профілем навчання сприяє використання в процесі навчання математики інтегрованих уроків, уроків-конференцій, прикладних задач.*

**Ключові слова:** *учні класів з гуманітарним профілем, інтегрований урок, урок-конференція, формування практичної компетентності.*

**Abstract.** *Activation of cognitive activity of students of humanitarian profile classes teaching promotes use in teaching mathematics integrated the lessons learned conferencing applications.*

**Keywords:** *classes with students humanitarian profile, integrated lesson lesson conference, the formation of practical competence.*